

# 等方弾性体・粘弾性体中の空洞に対する 線形化 Born 逆散乱解析の適用性の検討

## CONSIDERATION ON APPLICABILITY OF LINEARIZED INVERSE SCATTERING ANALYSIS

### BASED ON BORN APPROXIMATION FOR CAVITY IN ISOTROPIC ELASTIC AND VISCOELASTIC MEDIA

竹田 晴彦<sup>1)</sup>, 斎藤 隆泰<sup>2)</sup>, 廣瀬 壮一<sup>3)</sup>

Haruhiko TAKEDA, Takahiro SAITOH and Sohichi HIROSE

1) 群馬大学大学院理工学府 修士課程 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail: t160c056@gunma-u.ac.jp)

2) 群馬大学大学院理工学府 准教授 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail: t-saitoh@gunma-u.ac.jp)

3) 東京工業大学環境・社会理工学院 教授 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

The linearized inverse scattering analysis based on the Born approximation is a method to reconstruct defects in a solid using scattered waves generated by the interaction between incident waves and defects. In general, the Born approximation is known as effective for weak scatterers like inclusions. However, the Born approximation has been empirically used for defect shape reconstruction of strong scatterers like cavities. Therefore, in this research, the applicability of the linearized inverse scattering method based on the Born approximation for a cavity in elastic and viscoelastic media is considered. After the formulation for the linearized inverse scattering method for a cavity is introduced, the effectiveness of the far-field and the Born approximations is discussed. Some numerical results for several cavities are shown to check the applicability of the linearized inverse scattering method based on the Born approximation.

**Key Words:** Viscoelastodynamics, Linearized inverse scattering analysis, Far-field approximation, Born approximation.

#### 1. はじめに

本論文では, 等方性弾性波動および粘弾性波動を対象に, 線形化逆散乱解析法の空洞への適用性について検討する. 線形化逆散乱解析法は, 欠陥からの散乱波を用いて無限弾性体中の欠陥位置や形状を再構成する手法であり, 現在までに多くの解析が行われてきた. 例えば, Kitahara ら<sup>(1)</sup> は, 線形化逆散乱解析を用いて, 3次元無限等方弾性体中の空洞やき裂の位置, 形状の再構成を行っている. また, Kimoto ら<sup>(2)</sup> は, 線形化逆散乱解析の理論を二層体中の欠陥推定に応用し, 3次元スカラー波動場における欠陥像の推定に成功している. 中畑らは, 線形化逆散乱解析の高速化<sup>(3)</sup> や, 欠陥像の高精度イメージング法<sup>(4)</sup> を提案している. 加えて, 山田ら<sup>(5)</sup>, Guillermin ら<sup>(6)</sup> は, 実験によって観測された計測波形データを用いて, 実問題に対する逆散乱解析の適用及びその性能の評価を行ってきた. また近年では, 波速が方向依存性を示す異方性弾性波動問題<sup>(7)</sup> に対する逆散乱解析<sup>(8)(9)</sup> の開発や, 波動が分散性と減衰性を示す粘弾性波動問題<sup>(10)(11)</sup> に対する逆散乱解析法<sup>(12)</sup>

も開発されている.

さて, 線形化逆散乱解析では, 対象とする波動問題における散乱波の積分表現式を起点として, その定式化が行われる. 散乱波の計算には, 対象とする波動問題における基本解の遠方場表現を求める必要がある. また, 散乱波の積分表現式は, 未知波動場の変位を含むため, 一般に, Born 近似<sup>(13)</sup> 等の近似を導入することによって式を線形化することで定式化がなされる. ここで注意すべき点は, 線形化逆散乱解析法で用いる遠方場表現や線形化法の近似精度である. 基本解の遠方場表現に関しては, Schmerr<sup>(14)</sup> や藤原ら<sup>(15)</sup> によって, それぞれ検討されており, 等方性および異方性弾性波動問題に対する基本解の遠方場表現の有効性が確認されている. 一方, 積分表現式の線形化法の一種である Born 近似は, 一般に低周波近似と呼ばれ, 介在物等の透過性の弱散乱体に対して有効な近似であるとされる. ただし, 中畑ら<sup>(4)</sup>, Rose<sup>(13)</sup>, Hsu ら<sup>(16)</sup> の検討によれば, Born 近似を用いた線形化逆散乱解析は, 弱散乱体である介在物のみならず, 強散乱体である空洞に対しても, その形状を良好に再構成することが示されている. しかしながら, これらの結果は経験的に得られているに過ぎず, 弱散乱体に

対して有効である Born 近似が,なぜ強散乱体である空洞の欠陥形状再構成にも有効であるかの詳しい検討は,著者らの知る限り示されていない。

そこで本研究では,強散乱体に対する Born 近似の適用性の検討の初期段階として,従来より研究が進められている等方弾性波動,および,著者らの前論文で扱った粘弾性波動<sup>(12)</sup>を対象に, Born 近似を用いた線形化逆散乱解析が,どのような形状の強散乱体に対して有効であるかを確認する。以下ではまず,本研究における解くべき問題を示す。その後,線形化逆散乱解析の定式化について簡単に示す。数値解析例として,逆散乱解析に用いる基本解の遠方場表現,および,様々な形状の空洞に対する Born 近似の有効性について検討する。その後,空洞に対する再構成結果を示し,線形化逆散乱解析の適用性を検討する。ここで,逆散乱解析に用いる空洞からの散乱波の計算は,著者らの前論文<sup>(12)</sup>同様,演算子積分時間領域境界要素法 (CQBEM)<sup>(17)(18)</sup>を用いて求める。CQBEM は,従来の時間領域境界要素法に対して演算子積分法 (CQM)<sup>(19)</sup>を適用することで,粘弾性波動問題のような波動が分散性を示す問題であっても安定に精度よく計算できる手法である。最後に,結論や今後の課題等について述べる。

## 2. 解くべき問題

解くべき問題は,2次元無限等方弾性体,または粘弾性体中の空洞の位置や形状を再構成する逆問題である。なお,定式化については,粘弾性波動問題について記述すれば,等方弾性体の場合も計算可能なため,ここでは粘弾性波動問題を対象とした定式化について説明する。さて, Fig.1 に示すような,等方・均質な2次元無限粘弾性体  $D$  中に,空洞  $D_c$  が存在する場合を考える。空洞のおよその位置は分かっているものとし, Fig.1 中の空洞近傍の原点  $o$  に向け,十分遠方から入射波  $u_i^{\text{in}}$  を送信し,空洞による散乱波  $u_i^{\text{sc}}$  を,入射波と同じ方向に位置する点  $\boldsymbol{x}$  において取得する。この操作を,入射方向の角度  $\theta$  を  $0 \leq \theta < 2\pi$  と変化させて,空洞を取り囲むようにあらゆる方向で波動の送受信を行うとする。ここで,入射波  $u_i^{\text{in}}$  は,空洞の境界表面  $S$  により散乱されるとし,入射波が空洞に到達するまでは,静止過去の条件を満足するものとする。すなわち,初期条件  $u_i(\boldsymbol{x}, t = 0) = 0$  および  $\partial u_i(\boldsymbol{x}, t = 0)/\partial t = 0$  を考慮すれば,位置  $\boldsymbol{x}$ , 時刻  $t$  における変位  $u_i(\boldsymbol{x}, t)$  が満足する粘弾性波動問題に対する時間領域での基礎方程式,および境界条件は,それぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} \mu(t) * \dot{u}_{i,jj}(\boldsymbol{x}, t) + \left( K(t) + \frac{1}{3}\mu(t) \right) * \dot{u}_{j,ij}(\boldsymbol{x}, t) \\ = \rho \ddot{u}_i(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{in } D \end{aligned} \quad (1)$$

$$t_i = 0 \quad \text{on } S \quad (2)$$

ただし,  $\rho$  は密度,  $\mu(t)$ ,  $K(t)$  はそれぞれ,せん断弾性係数,体積弾性係数に対する緩和関数を表し,不遡及の公理  $\mu(t) = 0$ ,  $K(t) = 0$ ,  $-\infty < t < 0$  を満足するものとする。また  $*$  は畳込み積分,  $(\cdot)_{,i}$  および  $(\cdot)_{,i}$  はそれぞれ,時間および空間に関する微分  $\partial/\partial t$ ,  $\partial/\partial x_i$  を,  $t_i$  は表面力を表す。

式 (1) を,初期条件および式 (2) の境界条件の下で解き,得

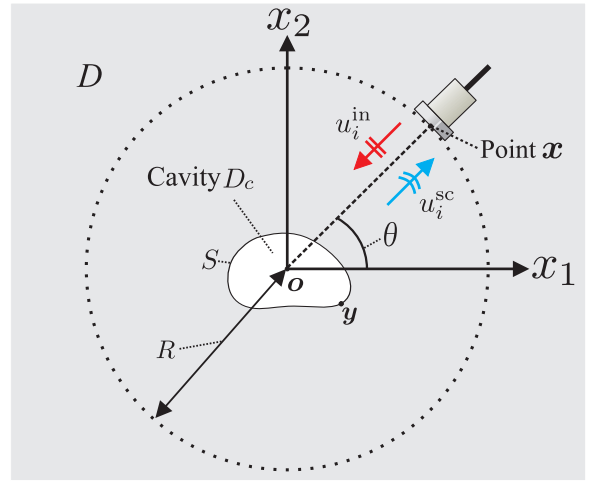


Fig. 1 Inverse scattering model.

られた散乱波を用いて逆散乱解析を実行することで,2次元無限粘弾性体  $D$  中の空洞  $D_c$  の位置や形状の再構成を行う。

## 3. 粘弾性波動問題に対する線形化逆散乱解析の定式化

式 (1) を基礎式とする時間領域における粘弾性波動問題の場合,散乱波の積分表現式に時間領域の基本解および緩和関数が現れる。しかしながら,波動に分散性を持つ粘弾性波動問題の場合,時間領域の基本解および緩和関数の直接計算は困難である。そのため,以下で説明する線形化逆散乱解析の定式化では,周波数領域における散乱波の積分表現式を起点として定式化を行う。その際,通常の弾性波動問題で用いる弾性定数や基本解の計算を,弾性-粘弾性対応原理<sup>(20)</sup>により,粘弾性体における複素緩和関数や基本解に置き換えて計算することとなる。

### 3.1. 粘弾性波動問題に対する散乱波の積分表現式

式 (1) の時間に関するフーリエ変換を取れば,粘弾性波動問題に対する周波数領域での基礎方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^*(\omega) \tilde{u}_{i,jj}(\boldsymbol{x}, \omega) + \left( \tilde{K}^*(\omega) + \frac{1}{3}\tilde{\mu}^*(\omega) \right) \tilde{u}_{j,ij}(\boldsymbol{x}, \omega) \\ = -\rho \omega^2 \tilde{u}_i(\boldsymbol{x}, \omega) \quad \text{in } D \end{aligned} \quad (3)$$

ここで,  $\omega$  は角周波数,  $\tilde{\mu}^*(\omega)$ ,  $\tilde{K}^*(\omega)$  はそれぞれ,周波数領域におけるせん断弾性係数および体積弾性係数に対する複素緩和関数である。さて,2次元面内粘弾性波動問題における周波数領域での散乱波  $\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\boldsymbol{x}, \omega)$  に関する積分表現式は,空洞の境界  $S$  において表面力フリーを仮定すると,次式で表される。

$$\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\boldsymbol{x}, \omega) = - \int_S \tilde{T}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega) \tilde{u}_j(\boldsymbol{y}, \omega) dS_y \quad (4)$$

ここで,  $\tilde{u}_j(\boldsymbol{y}, \omega)$  は空洞境界  $S$  上の全変位を表す。また,  $\tilde{T}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega)$  は2次元面内粘弾性波動問題における周波数領域の二重層核であり,

$$\tilde{T}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega) = n_k(\boldsymbol{y}) \tilde{G}_{j k p q}^*(\omega) \frac{\partial}{\partial y_q} \tilde{U}_{ip}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega) \quad (5)$$

と定義される。ここで、 $n_k(\mathbf{y})$  は境界  $S$  上の点  $\mathbf{y}$  における外向き (空洞の中を向く) 単位法線ベクトル成分、 $\tilde{G}_{jkpq}^*(\omega)$  は周波数領域における複素緩和関数であり、等方・均質な粘弾性体の場合、

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{jkpq}^*(\omega) &= \left( \tilde{K}^*(\omega) - \frac{2}{3} \tilde{\mu}^*(\omega) \right) \delta_{jk} \delta_{pq} + \tilde{\mu}^*(\omega) (\delta_{jp} \delta_{kq} + \delta_{jq} \delta_{kp}) \quad (6) \end{aligned}$$

と表される。また、式 (5) において、 $\tilde{U}_{ip}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  は 2 次元面内粘弾性波動問題に対する周波数領域の基本解であり、次式で表される。

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{ip}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) &= \frac{i}{4\tilde{\mu}^*(\omega)} \left[ H_0^{(1)}(\tilde{k}_{Tr}r) \delta_{ip} + \frac{1}{\tilde{k}_T^2} \left( H_0^{(1)}(\tilde{k}_{Tr}r) - H_0^{(1)}(\tilde{k}_{Lr}r) \right) \right]_{,ip} \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、 $i$  は虚数単位、 $H_0^{(1)}(kr)$  は第 1 種 0 次 Hankel 関数、 $\delta_{ip}$  はクロネッカーのデルタであり、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  である。また、 $\tilde{k}_L$ 、 $\tilde{k}_T$  はそれぞれ粘弾性波動問題における周波数領域の縦波および横波の複素波数である。

さて、式 (7) に対し、 $r \simeq |\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}$  なる遠方場近似を導入する。ハンケル関数  $H_0^{(1)}(kr)$  の無限遠での漸近展開

$$H_0^{(1)}(kr) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k |\mathbf{x}|}} e^{i(k|\mathbf{x}| - \frac{\pi}{4})} e^{-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}}, \quad (|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|) \quad (8)$$

を式 (7) に代入することで、基本解の遠方表現  $\tilde{U}_{ij}^{\text{far}}$  を得る。さらに、 $\tilde{U}_{ij}^{\text{far}}$  を式 (5) に代入することで、二重層核の遠方表現  $\tilde{T}_{ij}^{\text{far}}$  を得る。さて、遠方場での波動は、一般に縦波と横波が分離されて観測される。そこで、本研究では、散乱波の縦波 ( $L$ ) 成分のみを考慮する。すると式 (4) は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega) &= - \frac{i\tilde{k}_L B_{ijk}^L}{\sqrt{8\pi\tilde{k}_L |\mathbf{x}|}} e^{i(\tilde{k}_L |\mathbf{x}| + \frac{\pi}{4})} \\ &\quad \times \int_S n_k(\mathbf{y}) e^{-i\tilde{k}_L \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} \tilde{u}_j(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、 $B_{ijk}^L$  は、 $B_{ijk}^L = -\{(1 - 2\kappa)\delta_{jk} + 2\kappa\hat{x}_j\hat{x}_k\}\hat{x}_i$ 、 $\kappa = \tilde{k}_L/\tilde{k}_T$ 、 $\hat{\mathbf{x}}$  は  $\mathbf{x}$  の単位ベクトルである。さて、式 (9) の右辺の積分は空洞境界  $S$  上の変位を含んでおり、このままでは非線形解析が必要となる。そこで、次の節では Born 近似を施すことで方程式を線形化近似し、空洞に対する欠陥形状再構成式を導出する。

### 3.2. 空洞に対する線形化逆散乱解析

ここでは、前節で得られた式 (9) の散乱波の積分表現式に対して、Born 近似を施すことで方程式を線形化する。Born 近似では、式 (9) における空洞境界  $S$  上の点  $\mathbf{y}$  での変位  $\tilde{u}_j(\mathbf{y}, \omega)$  を入射波変位  $\tilde{u}_j^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega)$  で近似する。ここで本研究における入射波  $\tilde{u}_j^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega)$  は、縦波平面波と仮定し、周波数領域において次のように与える。

$$\tilde{u}_j^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega) = F(\omega) \tilde{d}_j^{\text{in}} e^{i\tilde{k}_L \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \mathbf{y}} \quad (10)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{d}}^{\text{in}}$  は入射波の偏向方向を表す単位ベクトル、 $\hat{\mathbf{p}}^{\text{in}}$  は入射波の進行方向を表す単位ベクトルである。なお、本解析における散乱波の取得法は、非破壊評価の分野におけるパルス・エコー法を想定する。よって、 $\hat{\mathbf{d}}^{\text{in}}$  および  $\hat{\mathbf{p}}^{\text{in}}$  と、散乱波の観測方向の単位ベクトル  $\hat{\mathbf{x}}$  の関係は、 $\hat{\mathbf{d}}^{\text{in}} = \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} = -\hat{\mathbf{x}}$  と表せる。また、 $F(\omega)$  は次式で与える。

$$F(\omega) = 2u_0 \sqrt{\pi} t_p \left( \frac{\omega t_p}{2} \right)^2 e^{-\left(\frac{\omega t_p}{2}\right)^2} e^{i\omega t_s} \quad (11)$$

ただし、 $u_0$  は変位振幅、 $t_p$  は入射波の中心周波数に対応する時間パラメータ、 $t_s$  は位相のずれを表す。さて、Born 近似により、空洞境界  $S$  上の変位  $\tilde{u}_j(\mathbf{y}, \omega)$  を入射波の変位  $\tilde{u}_j^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega)$  に置き換えた後、式 (9) に対し、Gauss の発散定理を適用することで式変形を行う。さらに式 (9) に対し、空洞内部でのみ 1 の値をとり、その他の領域ではゼロとなる次の特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$

$$\Gamma(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{y} \in \text{Cavity}) \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

を導入することで、式 (9) の積分を全領域  $A$  へと拡張する。実際に、式 (12) を用いて、式 (9) を整理すると、空洞に対する散乱波の積分表現式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{\tilde{k}_L^2 \tilde{d}_i^{\text{in}} F(\omega)}{\sqrt{2\pi\tilde{k}_L |\mathbf{x}|}} e^{i(\tilde{k}_L |\mathbf{x}| + \frac{\pi}{4})} \\ &\quad \times \int_A \Gamma(\mathbf{y}) e^{-2i\tilde{k}_L \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} dV_{\mathbf{y}} \quad (13) \end{aligned}$$

ここで、式 (13) に対し、 $\mathbf{K} = 2\tilde{k}_L \hat{\mathbf{x}}$  なる  $\mathbf{K}$  空間を考える。 $\mathbf{K}$  空間において、 $\hat{\mathbf{x}}$  に対する変数変換を行い、式 (13) に逆フーリエ変換を適用すれば、特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$  を次のように導出することができる。

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{y}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi\tilde{k}_L |\mathbf{x}|} \tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{d}_i^{\text{in}}}{\pi^2 \omega F(\omega)} \\ &\quad \times e^{-i(\tilde{k}_L |\mathbf{x}| - 2\tilde{k}_L \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} + \frac{\pi}{4})} d\omega d\theta \quad (14) \end{aligned}$$

ただし、 $\theta$  は Fig.1 に示すような偏角である。式 (14) で導出された特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$  は、空洞内部でのみ値を持つ関数であるため、式 (14) の右辺を精度よく計算することで、粘弾性体中の空洞の位置や形状の再構成が可能となる。

さて、式 (14) の特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$  に含まれる周波数領域の散乱波  $\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega)$  は、時間領域の散乱波  $u_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t)$  が求まっていれば、その時間に関するフーリエ変換によって得ることができる。ここで、式 (14) 自体の評価は、 $\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega)$  を直接、周波数領域で計算した方が厳密であると思われる。しかしながら、時間領域の散乱波  $u_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t)$  を周波数領域の散乱波  $u_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega)$  にフーリエ変換する際に含まれる数値誤差は、本研究で扱う、線形化 Born 逆散乱解析の適用性の検討に大きな影響は与えないものと考えられる。よって本研究では、現実の計測実験に即した解析とするために、演算子積分時間領域境界要素法 (CQBEM)<sup>(17)(18)</sup> を用いた時間領域の散乱波  $u_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t)$  の計算を出発点として、線形化 Born 逆散乱解析の適用性の検討を行う。なお、粘弾性波動問題における CQBEM を用いた空洞によ

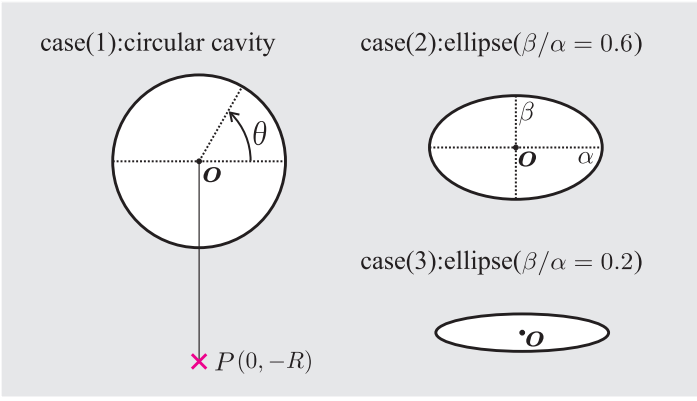


Fig. 2 Target cavity shape (a) circular cavity, (b) ellipse( $\beta/\alpha = 0.6$ ), and (c) ellipse( $\beta/\alpha = 0.2$ ).

る散乱解析法については, Saitoh ら<sup>(21)(22)</sup>により提案されていることから, それらの説明は当該文献に譲るものとする。

#### 4. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す。まず, 本解析で用いた粘弾性モデルについて簡潔に説明する。その後, 解析に用いた入射波について説明する。加えて, 遠方表現された基本解の近似精度, および, 様々な形状の空洞に対する Born 近似の有効性について検討する。最後に, 空洞に対する逆散乱解析結果を示し, 等方弾性体および粘弾性体中の空洞に対する欠陥形状再構成能について検討する。ただし, 等方弾性体に対する計算は, 粘弾性波動問題における初期縦波速度  $c_{L0}$  を用いて行うものとする。

さて, 本数値解析で対象とする空洞は, Fig.2 に示すように, (1) 半径  $r = a$  の真円空洞, (2) 長軸半径  $\alpha$  を  $\alpha = a$ , 短軸半径を  $\beta$  とした時,  $\beta/\alpha = 0.6$  の楕円空洞, (3)  $\beta/\alpha = 0.2$  の楕円空洞の計 3 つのケースとし, 全ての空洞の中心は座標原点  $\mathbf{o}$  とする。また, 以下の計算では, 時間ステップ数  $N = 1024$ , 時間増分を  $c_{L0}\Delta t/a \simeq 0.04$  と設定して計算を行った。

##### 4.1. 三要素標準モデル

粘弾性波動問題を扱う場合, そのモデル化はいくつか存在するが, 以下の解析においては, Fig.3 のように粘弾性体を粘性係数  $\eta$  のダッシュポットと, ばね定数  $\mu_1, \mu_2$  の二つのばねにより表す三要素標準モデル<sup>(23)</sup>を用いて解析を行った。なお, 本解析では, CQBEM により計算された時間領域における散乱波をフーリエ変換することで, 逆散乱解析に用いる周波数領域での散乱波を求めている。CQBEM では, ラプラス変換領域での基本解が必要となる。そのため, ここでは CQBEM の計算で用いるラプラス変換領域での三要素標準モデルについて簡単に説明する。時間領域の入射波および逆散乱解析の計算に用いる周波数領域での三要素標準モデルに関しては, Fukui らの文献<sup>(11)</sup>等を参照されたい。

三要素標準モデルの場合, ラプラス変換領域における複素せん断弾性係数は次のようになる。

$$\mu^*(s) = \frac{1 + s\tau_\sigma}{1 + s\tau_\epsilon} \mu_R \quad (15)$$

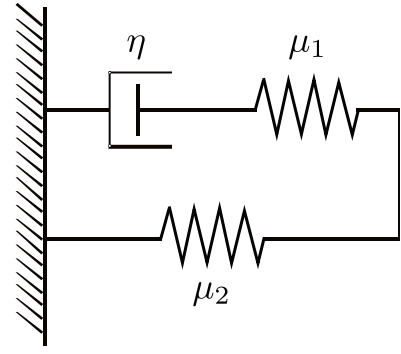


Fig. 3 Three-element standard linear viscoelastic model.

ただし,  $\tau_\sigma$  および  $\tau_\epsilon$  はそれぞれ, 応力緩和時間, ひずみ緩和時間であり三要素標準モデルのパラメータを用いて

$$\tau_\sigma = \eta \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right), \quad \tau_\epsilon = \frac{\eta}{\mu_1} \quad (16)$$

と表される。また,  $\mu_R = \mu_2$  は緩和弾性係数であり,  $t \rightarrow \infty$  におけるせん断弾性定数になる。 $t \rightarrow 0$  における弾性定数は初期弾性定数  $\mu_0$  であり, 応力緩和時間  $\tau_\sigma$  とひずみ緩和時間  $\tau_\epsilon$  を用いて次式で表される。

$$\mu_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \mu^*(s) = \mu_R \frac{\tau_\sigma}{\tau_\epsilon} \quad (17)$$

以下の数値解析で用いた粘弾性パラメータは, 緩和せん断弾性係数と初期せん断弾性係数の比を  $\mu_R/\mu_0 = 0.85$ , 体積弾性係数と初期弾性係数の比  $K/\mu_0 = 5/3$ , また, 初期縦波速度  $c_{L0}$  の波が case(1) の空洞を通過する基準時間  $T_0 = 2a/c_{L0}$  を用いて,  $\tau_\sigma = 0.5T_0$ ,  $\tau_\epsilon = 17T_0/40$  として計算を行っている。また, 体積弾性係数  $K$  は粘弾性効果を持たせず一定に与え, せん断弾性係数  $\mu$  にのみ粘弾性体の性質を与えて解析を行った。

##### 4.2. 入射波特性の確認

以下では, 解析に用いた入射波の特性について考察しておく。用いた入射波は縦波平面 Ricker 波であり, 式 (10), (11) に対してフーリエ逆変換  $\mathcal{F}^{-1}$  を用いて次式で与えられる。

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0 \hat{d}_i^{\text{in}} \mathcal{F}^{-1} \left[ 2\sqrt{\pi} t_p \left( \frac{\omega t_p}{2} \right)^2 e^{-\left(\frac{\omega t_p}{2}\right)^2} e^{i(\bar{k}_L \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \mathbf{x} + \omega t_s)} \right] \quad (18)$$

ただし, 式 (18) の入射波は, 厳密には静止過去の条件を満足しないことに注意されたい。Fig.4 (a), (b) は, 式 (18) に対し,  $\hat{d}_i^{\text{in}} = \hat{\mathbf{p}}_i^{\text{in}} = (1, 0)$  として与えた場合の,  $x_1/a = 4.0, 7.0, 10.0, 13.0$  における入射波  $u_1^{\text{in}}/u_0$  の時刻歴波形, および, そのフーリエスペクトルをそれぞれ示している。また, Fig.4 (a), (b) 中の黒色点線は等方弾性体に対する入射波  $u_1^{\text{in}}/u_0$  の計算結果である。ただし, Fig.4(b) のフーリエスペクトルに関するそれぞれの結果は, 等方弾性体の場合の最大スペクトル値  $u_{\text{max}}$  で正規化している事に注意されたい。入射波の計算に用いたパラメータは, 入射波の中心周波数に対応する無次元化波数  $ak_{L0}^{\text{in}}$  を  $ak_{L0}^{\text{in}} = 2.5$ ,  $t_p = T_0/ak_{L0}^{\text{in}}$ ,  $t_s = 2.0T_0$  として与えている。Fig.4(a) より, 時間領域の入射波  $u_1^{\text{in}}(t)/u_0$  は粘弾性体の影響を受け, 減衰して

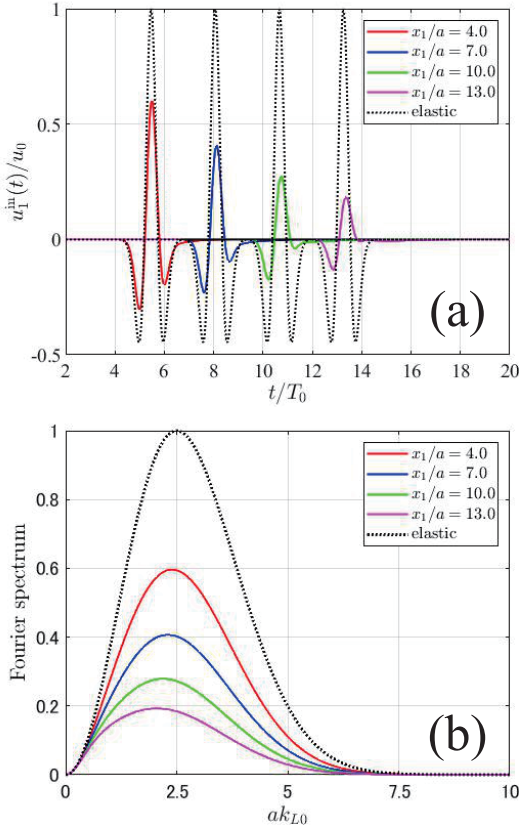


Fig. 4 Incident wave forms  $u_i^{\text{in}}/u_0$  calculated by eq.(18) at  $x_1/a = 4.0, 7.0, 10.0$  and  $13.0$ . (a)time histories and (b)Fourier spectrums.

いる様子が確認できる。また, Fig.4(b) より, 入射波の中心周波数が粘弾性効果を受けることで減少しており, 粘弾性波動の分散性を確認できる。なお, 中心周波数  $ak_{L0}^{\text{e}} = 2.5$  と設定した場合, 入射波の初期波長  $\lambda_0$  は  $\lambda_0 = 2\pi a/(ak_{L0}^{\text{e}}) \simeq 2.5a$  となる。すなわち, case(1)-(3) の対象空洞の全ての欠陥長に比べ, 波長がやや長くなるような中心周波数を用いている。この設定は, 入射波の波長が欠陥長に比べ大きくなるような低周波帯域において有効となる Born 近似の性質<sup>(4)</sup> と, 高周波の入射波を用いる場合, その波動が粘弾性効果によって著しく減衰してしまい, 欠陥からの散乱波の取得が難しいという点を考慮している。

### 4.3. 遠方場近似の精度の確認

次に, 線形化逆散乱解析に適用した遠方場近似の精度について検討する。ここでは, 例として 2 次元面内等方弾性波動および粘弾性波動問題に対する周波数領域での二重層核  $\tilde{T}_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ , およびその遠方表現  $\tilde{T}_{11}^{\text{far}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  を比較する。Fig.5(a), (b) に, それぞれ等方弾性波動および粘弾性波動に対する  $\tilde{T}_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  および  $\tilde{T}_{11}^{\text{far}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  の無次元化波数  $k_{L0}r$  に対する比較結果を示す。Fig.5(a), (b) 中の曲線は通常の二重層核  $\tilde{T}_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ , 丸印は遠方場近似された二重層核  $\tilde{T}_{11}^{\text{far}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  を示している。Fig.5(a), (b) より, 等方弾性体および粘弾性体の両者の結果においても, 無次元化波数  $k_{L0}r$  が大きくなるにつれ, 遠方場近似された二重層核  $\tilde{T}_{11}^{\text{far}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  が通常の二重層

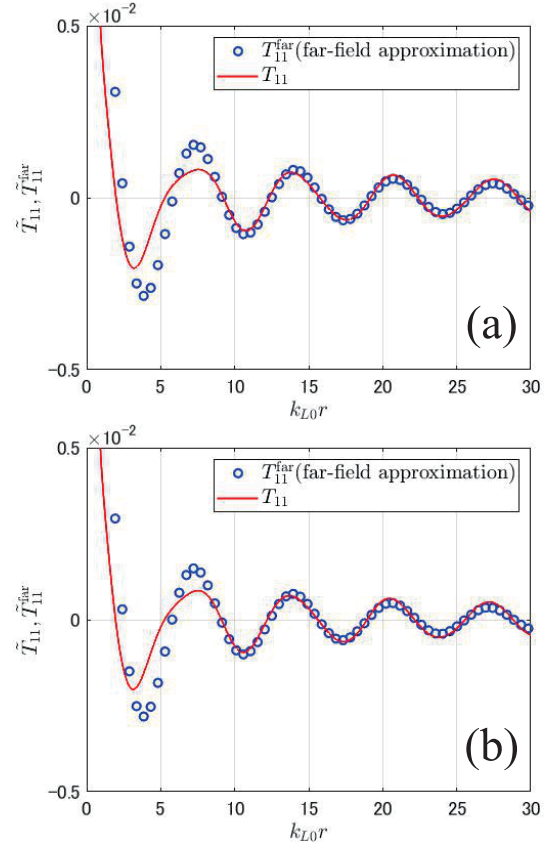


Fig.5 Far-field approximation for double layer kernel  $\tilde{T}_{11}^{\text{far}}$  for (a) an elastic medium and (b) a viscoelastic medium.

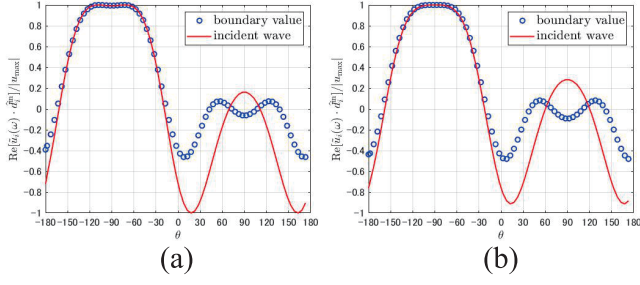
核  $\tilde{T}_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  に近づく様子が確認出来る。よって, 以下の解析では, Fig.1, 2 において, 遠方場近似の条件が概ね成立する距離  $R = r = 14a$  において, 散乱波を取得するものとする。

### 4.4. Born 近似の適用性の確認

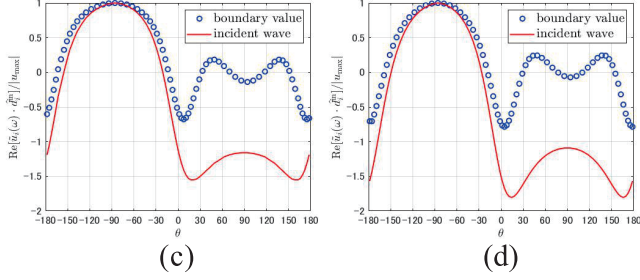
次に, Born 近似の適用性に関して検討する。ここで扱う Born 近似は, 3 節で示した通り, 強散乱体である空洞境界上の変位  $\tilde{u}_i(\mathbf{y}, \omega)$  を入射波変位  $\tilde{u}_i^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega)$  で置き換えることで線形化近似する手法である。よって, 本節では空洞境界上の変位  $\tilde{u}_i(\mathbf{y}, \omega)$  と, その位置における入射波変位  $\tilde{u}_i^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega)$  を比較する。その際, 対象とする空洞の形状や粘弾性の性質が, Born 近似の適用性にどのように影響を与えるのかを検討する。Fig.6(a)-(f) に, case(1)-(3) の空洞に対する, 無次元化波数  $ak_{L0} = 2.5$  での空洞境界上の変位 (boundary value) の実部  $\text{Re}[\tilde{u}_i(\omega) \cdot \hat{d}_i^{\text{in}}]$  および入射波変位 (incident wave) の実部  $\text{Re}[\tilde{u}_i^{\text{in}}(\omega) \cdot \hat{d}_i^{\text{in}}]$  と, Fig.2 の空洞に対する偏角  $\theta$  との関係を示す。なお, Fig.6 中の丸印は空洞境界上の変位を表し, 曲線は入射波変位を表している。また, Fig.6(a), (c), (e) には等方弾性体, (b), (d), (f) には粘弾性体に対する計算結果を示している。ただし, これらの結果は, 式 (18) の入射波を  $x_2$  方向に向けて入射させた場合, すなわち  $\hat{d}^{\text{in}} = \hat{p}^{\text{in}} = (0, 1)$  の場合の CQBEM による解析結果をフーリエ変換することで得られたものであることに注意されたい。さらに, プロット値は, それぞれのグラフ中の絶対値の最大値  $|u_{\text{max}}|$  で正規化している。

Fig.6(a), (b) より, case(1) の真円空洞においては, 入射波

case(1):circular cavity



case(2):ellipse( $\beta/\alpha = 0.6$ )



case(3):ellipse( $\beta/\alpha = 0.2$ )

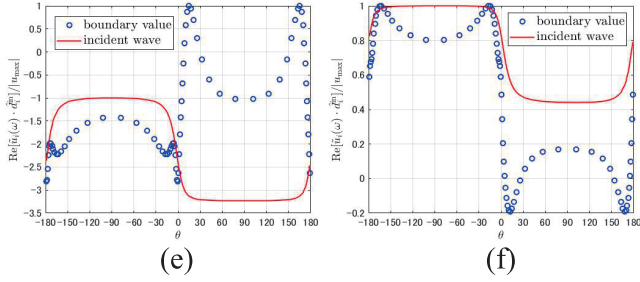


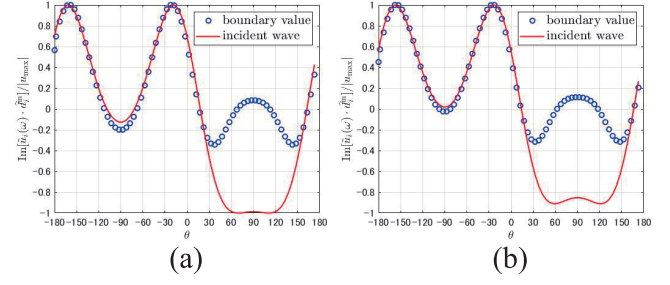
Fig. 6 Real part of boundary and incident wave values on each cavity for case(1)-(3) at non-dimensional wave number  $ak_{L0} = 2.5$ . (a), (c), (e) an elastic medium and (b), (d), (f) a viscoelastic medium.

の照射面である  $-180^\circ \leq \theta \leq 0^\circ$  において、境界上の変位  $\text{Re}[\tilde{u}_i(\omega) \cdot \tilde{d}_i^{\text{in}}]/|u_{\text{max}}|$  と入射波変位  $\text{Re}[\tilde{u}_i^{\text{in}}(\omega) \cdot \tilde{d}_i^{\text{in}}]/|u_{\text{max}}|$  が概ね一致していることが分かる。また、Fig.6(c), (d) より、case(2) の楕円空洞 ( $\beta/\alpha = 0.6$ ) に関しては、入射波の照射面における境界上の変位と入射波変位は、完全には一致していないものの、プロット値の波形自体は似た形状となっていることがわかる。しかしながら、Fig.6(e), (f) より、case(3) の楕円空洞 ( $\beta/\alpha = 0.2$ ) に対しては、境界上の変位と入射波変位は一致していないことが分かる。また、入射波の照射面の反対方向である  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  においては、Fig.6 中の全てのグラフにおいて、プロット値の波形形状すら一致していないことがわかる。

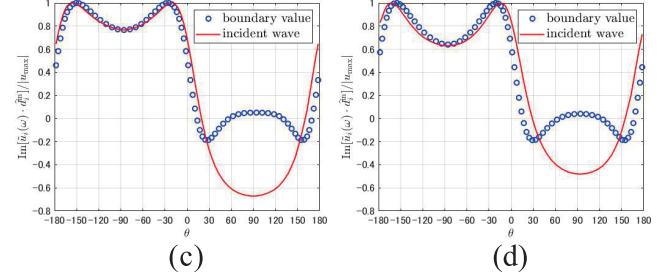
同様に、Fig.6に対応する虚部  $\text{Im}[\tilde{u}_i(\omega) \cdot \tilde{d}_i^{\text{in}}]$  の結果を Fig.7(a)-(f) に示す。Fig.7(a)-(f) より、虚部の場合も、概ね実部の場合と同様の傾向を示すことが分かる。

また、Fig.8(a), (b) および Fig.8(c), (d) は、それぞれ case(2) および case(3) の空洞を  $\theta = 30^\circ$  回転させた場合の、無次元化波数  $ak_{L0} = 2.5$  における境界上の変位と入射波変位の比較結果を示している。Fig.8(a), (c) には、それぞれの空洞に対する境界上の変位と入射波変位の実部を、Fig.8(b), (d) には、それ

case(1):circular cavity



case(2):ellipse( $\beta/\alpha = 0.6$ )



case(3):ellipse( $\beta/\alpha = 0.2$ )

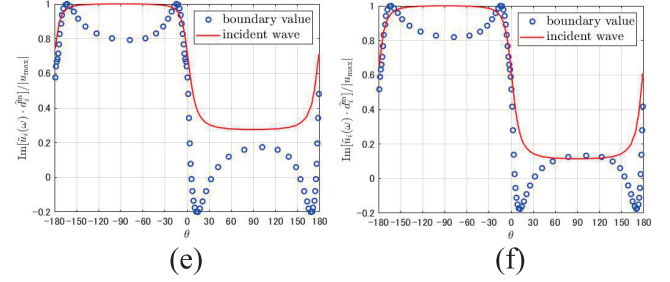
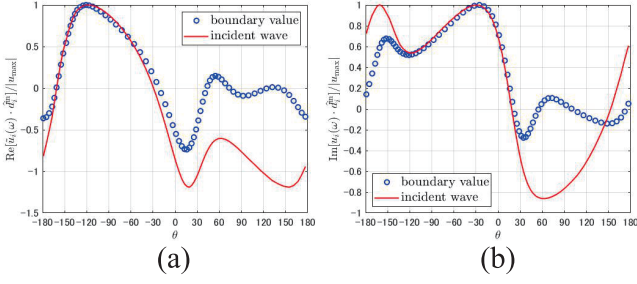


Fig. 7 Imaginary part of boundary and incident wave values on each cavity for case(1)-(3) at non-dimensional wave number  $ak_{L0} = 2.5$ . (a), (c), (e) an elastic medium and (b), (d), (f) a viscoelastic medium.

らの虚部を示している。ただし、ここでは等方弾性体に対する結果のみを示していることに注意されたい。Fig.8(a) では、 $-150^\circ \leq \theta \leq -30^\circ$ 、Fig.8(b) では、 $-120^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$  において境界上の変位と入射波変位が良好に一致している。すなわち case(2) の空洞の場合は、その空洞を傾けた場合であっても、入射波の照射面における境界上の変位と入射波変位がよく一致することが確認できる。一方、Fig.8(c) では、 $\theta = -150^\circ$  付近においては、境界上の変位と入射波変位が概ね一致しているものの、それ以外の点ではほとんど一致していない。また、Fig.8(d) では、境界上の変位と入射波変位はほとんど一致していないことが分かる。よって、前述した Fig.6, 7 における傾向の通り、case(2) の空洞に対しては、入射波の照射面における境界上の変位と入射波変位は概ね一致するものの、case(3) の空洞に対しては境界上の変位と入射波変位はほとんど一致しないことが分かる。

Fig.9(a)-(f) は、無次元化波数  $ak_{L0} = 1.25$  における境界上の変位  $\text{Re}[\tilde{u}_i(\omega) \cdot \tilde{d}_i^{\text{in}}]/|u_{\text{max}}|$  と入射波変位  $\text{Re}[\tilde{u}_i^{\text{in}}(\omega) \cdot \tilde{d}_i^{\text{in}}]/|u_{\text{max}}|$  の比較結果を示している。無次元化波数  $ak_{L0} = 1.25$  に対す

case(2):ellipse( $\beta/\alpha = 0.6$ )



case(3):ellipse( $\beta/\alpha = 0.2$ )

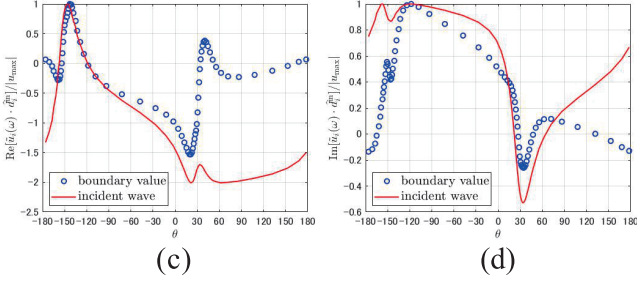


Fig. 8 Real and imaginary parts of boundary and incident wave values on  $30^\circ$  inclined cavities for case(2), (3) in an elastic medium at non-dimensional wave number  $ak_{L0} = 2.5$ . (a), (b) for case(2) and (c), (d) for case(3).

る解析結果では, case(1)-(3) の全ての形状の空洞において, 入射波に照射される境界上の変位と入射波変位は良好に一致していることが分かる.

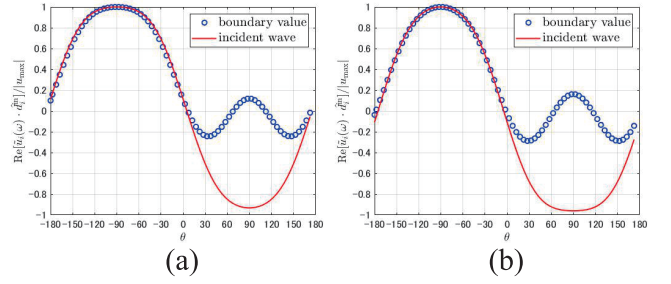
また, Fig.10(a)-(f) は, Fig.9 に示す結果と同様の計算を行った場合の, 境界上の変位と入射波変位の虚部  $\text{Im}[\tilde{u}_i(\omega) \cdot \tilde{d}_i^*]$  を示している. 実部の計算結果に比べ, 境界上変位と入射波変位の一一致部分がやや減少するものの, 入射波に照射される面においては, 境界上の変位と入射波変位が概ね一致している事が分かる. これらの結果より, 無次元化波数  $ak_{L0} = 2.5$  での計算結果に比べ, 低い周波数である  $ak_{L0} = 1.25$  での計算結果の方が Born 近似の精度が向上していることがわかる.

以上の考察より, 一般的に Born 近似は介在物等の弱散乱体に対して適用できる手法であるが, case(1) の空洞のように, 形状が真円に近い強散乱体であれば, ほぼ入射波の照射面で Born 近似を用いて良いことが確かめられた. よって, 真円形状の強散乱体に対して Born 逆散乱解析を適用する場合は, 入射波の欠陥に対する照射面を増やすことで精度よく欠陥形状の再構成が出来ることが考えられる. 一方, case(3) の空洞のように, 形状が真円から外れる強散乱体の場合, 入射波の照射面であっても, 高周波帯域において Born 近似の精度が低下する事が確認された. すなわち, 形状が真円から外れるような強散乱体に対して Born 逆散乱解析を適用する場合, その再構成精度が低下することが推察される.

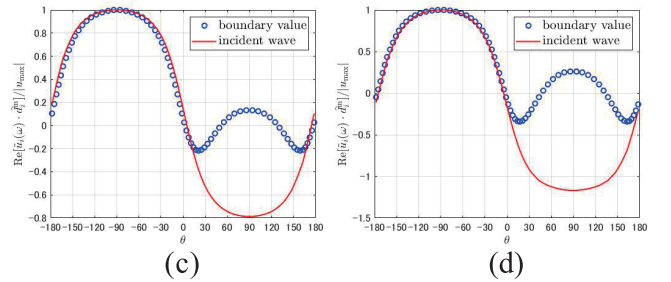
#### 4.5. 空洞に対する逆散乱解析結果

最後に, case(1)-(3) の空洞に対する逆散乱解析結果を, Fig.11(a)-(f) に示す. Fig.11 の (a), (c), (e) は等方弾性体中の空洞に対する解析結果であり, (b), (d), (f) は粘弾性体中の空洞に対する解

case(1):circular cavity



case(2):ellipse( $\beta/\alpha = 0.6$ )



case(3):ellipse( $\beta/\alpha = 0.2$ )

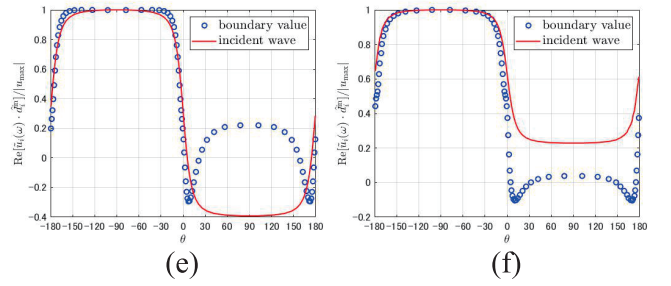
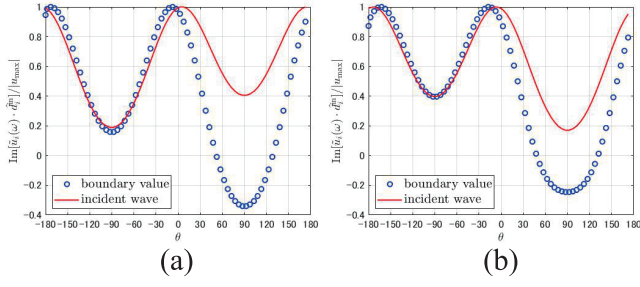


Fig. 9 Real part of boundary and incident wave values on each cavity for case(1)-(3) at non-dimensional wave number  $ak_{L0} = 1.25$ . (a), (c), (e) an elastic medium and (b), (d), (f) a viscoelastic medium.

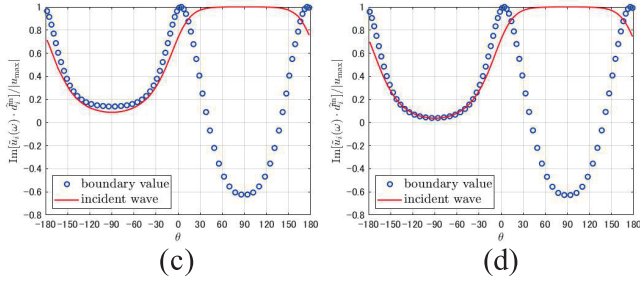
析結果である. なお, Fig.11 では, 原点中心, 一辺が  $6a$  の可視化領域に対し, 特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$  をその最大値  $\Gamma_{\max}$  で正規化した値をプロットすることで欠陥像を再構成している. 逆散乱解析に用いた散乱波は, Fig.1 において,  $R = 14a$  上の観測点  $\mathbf{x}$  方向から座標原点  $\mathbf{o}$  に向けて, 入射波の空洞に対する散乱解析を行い, その観測点  $\mathbf{x}$  において散乱波を受信するといったパルス・エコー法を想定して計算を行う. この一連の計算を, 入射角  $\theta = 5^\circ$  から空洞の全周を取り囲むように,  $10^\circ$  刻み ( $\Delta\theta = 10^\circ$ ) で計 36 点で行う. このように観測点を欠陥に対して全周に配置した理由は, 4.4 節の考察より, 入射波の欠陥に対する照射面をできるだけ増やすことが, 強散乱体である空洞の再構成精度向上に繋がると考えられるためである. なお, 式 (14) の特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$  の計算には, 無次元化波数  $ak_{L0}$  に対して,  $0.5 \leq ak_{L0} \leq 10.0$  の範囲における散乱波を用いて計算を行っており, 無次元化波数の刻みは  $\Delta(ak_{L0}) \simeq 0.07$  と設定している. また, Fig.11 中の白色点線は, 正解空洞の境界を表している.

Fig.11 の解析結果より, 粘弾性の影響を受ける場合であっても, 特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$  の値は, 空洞境界内部に大きく出ており,

case(1):circular cavity



case(2):ellipse( $\beta/\alpha = 0.6$ )



case(3):ellipse( $\beta/\alpha = 0.2$ )

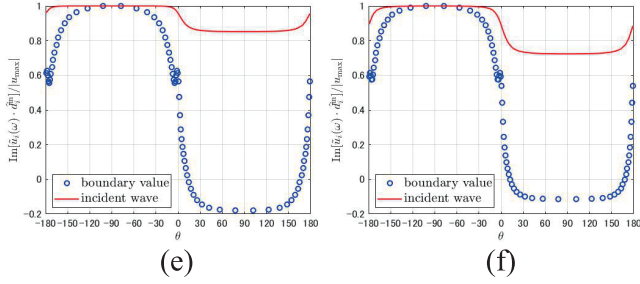


Fig. 10 Imaginary part of boundary and incident wave values on each cavity for case(1)-(3) at non-dimensional wave number  $ak_{L0} = 1.25$ . (a), (c), (e) an elastic medium and (b), (d), (f) a viscoelastic medium.

欠陥の位置や形状を概ね再構成出来ている。しかし、粘弾性を考慮した場合の解析結果では、仮定した空洞部の外側に特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$  の値がやや大きく出ており、その再構成精度が、等方弾性体の再構成結果と比べて、やや落ちていることが分かる。これは、粘弾性効果により、入射波の波長が、等方弾性体の場合に比べ大きくなったことや、逆散乱解析に用いた散乱波の高周波成分が減少したこと起因するものであると考えられる。また、Fig.11(e), (f) は、Born 近似の精度が低く見積もられた case(3) の楕円空洞に対する再構成結果であるが、楕円空洞の外側に、空洞の位置や形状とは無関係の特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$  の値が現れていることが分かる。これは、前節で議論した、Born 近似の適用性能が低下したことが大きな影響を与えているものと考えられる。

## 5. おわりに

本論文では、Born 近似を用いた場合の空洞に対する線形化逆散乱解析の適用性について考察した。基本解の遠方場近似や、強散乱体である様々な空洞の形状に対する Born 近似の有効性について検討した。また、等方弾性体と粘弾性体中の様々

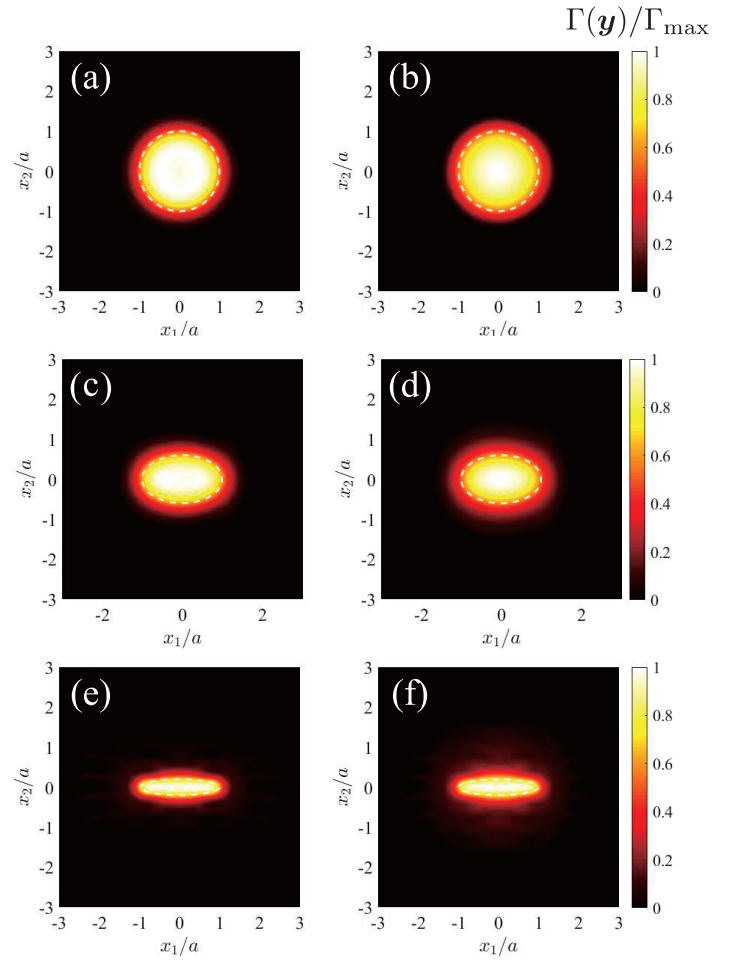


Fig. 11 Shape reconstruction of each cavity for case(1)-(3) in (a), (c), (e) an elastic medium and (b), (d), (f) a viscoelastic medium.

な形状の空洞に対して逆散乱解析を実行し、欠陥形状再構成を行った。解析結果より、弱散乱体に対して有効である Born 近似を用いたとしても、強散乱体である空洞の形状が真円に近い場合、入射波に照射される境界において Born 近似が概ね成立することを示した。よって、真円空洞のような単純な強散乱体を対象にした場合、入射波の空洞に対する照射面を増やすことで、線形化逆散乱解析法により空洞を精度良く再構成できることが確認された。一方、空洞の形状が真円と離れ、長軸の長い楕円に近づく場合、入射波に照射される境界であっても、Born 近似の精度が低下し、それに伴って空洞の形状再構成精度も低下することを示した。今後は、適用性のさらなる検討、散乱波に計測誤差が含まれる場合の影響、並びに異方性材料中の強散乱体に対する Born 近似および線形化逆散乱解析法の適用性の検討を行う予定である。

## 謝辞

本研究の一部は、令和2年度学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点(課題番号:jh200052-NAH, 拠点共同研究先:京都大学)および令和3年度学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点(課題番号:jh210033-NAH, 拠点共同研究先:京都大学, 北海道大学)並びに科学研究費補助金基盤研究(B)(20H0223022)



の支援の下, 実施されました。

## 参考文献

- (1) Kitahara, M., Nakahata, K. and Hirose, S.: Elastodynamic inversion for shape reconstruction and type classification of flaws, *Wave motion*, **36** (2002), pp. 443–455.
- (2) Kimoto, K. and Hirose, S.: A 3D linearized inverse scattering method for scatterers in a two layered medium, *Struct. Eng./Earthq. Eng.*, **22**(2) (2005), pp. 201s–207s.
- (3) 中畑和之, 大西正浩, 北原道弘: 線形化逆散乱解析の高速化と欠陥形状再生への適用, 応用力学論文集, **5** (2002), pp. 67–74.
- (4) 中畑和之, 北原道弘: 計測波形による欠陥形状の再生と使用周波数帯域に関する考察, 応用力学論文集, **3** (2000), pp. 91–98.
- (5) 山田真幸, 宮腰寛之: 線形化逆散乱解析法による三次元欠陥形状再構成, 土木学会論文集 A, **64**(1) (2008), pp. 133–141.
- (6) Guillermin, R., Lasaygues, P., Sessarego, J.P. and Wirgin, A.: Inversion of synthetic and experimental acoustical scattering data for the comparison of two reconstruction methods employing the Born approximation, *Ultrasonics*, **39** (2001), pp. 121–131.
- (7) Furukawa, A., Saitoh, T. and Hirose, S.: Convolution quadrature time-domain boundary element method for 2-D and 3-D elastodynamics analyses in general anisotropic elastic solids, *Eng. Anal. Bound Elem.*, **39** (2014), pp. 64–74.
- (8) 斎藤隆泰, 稲垣祐生, 下田瑞斗: 異方性弾性体中の欠陥に対する 2 次元逆散乱解析, 非破壊検査, **66**(2) (2017), pp. 84–89.
- (9) 斎藤隆泰, 小野寺貴, 古川陽, 廣瀬壮一: 純面外波を利用した異方性弾性体中のき裂に対する逆散乱解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), **74** (2018), pp. 65–74.
- (10) Schanz, M. and Antes, H.: Application of operational quadrature methods in time domain boundary element methods, *Meccanica*, **32**(3) (1997), pp. 179–186.
- (11) Fukui, T. and Funato, K.: Time domain boundary element method in anti-plane viscoelastic wave propagation problems, Proc. 7th Japan-China Symp. Boundary Element Methods, M.Tanaka and Z. Yao(eds.), Elsevier, (1996), pp. 47–56.
- (12) 竹田晴彦, 斎藤隆泰: 演算子積分時間領域境界要素法を用いた粘弾性体中の空洞に対する 3 次元順解析および逆散乱解析, 計算数理工学論文集, **20** (2020), pp. 1–6.
- (13) Rose, J.H.: Elastic wave inverse scattering in non-destructive evaluation, *J. Pure Appl. Geophys.*, **131** (1989), pp. 715–739.
- (14) Schmerr, L. W.: Fundamentals of ultrasonic nondestructive evaluation, Plenum Press, (1998).
- (15) 藤原千織, 永田泰昭, 廣瀬壮一: 異方性厚板鋼に対する超音波探傷試験の遠方場解析, 応用力学論文集, **5** (2002), pp. 881–886.
- (16) Hsu, D.K., Rose, J.H. and Thompson, D.O.: Reconstruction of inclusions in solids using ultrasonic Born inversion, *J. Appl. Phys.*, **55** (1984), pp. 162–168.
- (17) 福井卓雄, 岡山美央, 石田貴之: 2 次元波動伝播問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算数理工学論文集, **6** (2006), pp. 153–158.
- (18) 斎藤隆泰, 石田貴之, 福井卓雄, 廣瀬壮一: 演算子積分法および高速多重極法を用いた新しい二次元時間領域動弾性境界要素法について, 応用力学論文集, **11** (2008), pp. 193–200.
- (19) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 129–145.
- (20) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000).
- (21) Saitoh, T., Hirose, S. and Fukui, T.: Convolution quadrature time-domain boundary element method and acceleration by the fast multipole method in 2-D viscoelastic wave propagation, *Theor. appl. mech. Japan*, **57** (2009), pp. 385–393.
- (22) 斎藤隆泰, 福井卓雄, 廣瀬壮一, 石田貴之: 粘弾性面内波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, 論文番号 No.20080021, (2008).
- (23) ファン, Y. C. (大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀生 共訳): 固体の力学 / 理論, 培風館, (1970).

