# 演算子積分時間領域境界要素法を用いた様々な異方性弾性体中の空洞による3次元弾性波動散乱解析

## Analysis of 3-D Elastic Wave Scattering by a Cavity in Various Anisotropic Media Using Convolution Quadrature Time-domain Boundary Element Method

斎藤 隆泰 [1)]，古川 陽 [2)]，廣瀬 壮一 [3)]

Takahiro SAITOH, Akira FURUKAWA and Sohichi HIROSE

1) 群馬大学大学院理工学府環境創生部門 准教授 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail:t-saitoh@gunma-u.ac.jp)
2) 北海道大学工学研究院土木工学部門 准教授 (〒 060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目, E-mail:afurukawa@eng.hokudai.ac.jp)
3) 東京工業大学環境・社会理工学院土木工学系 教授 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:shirose@cv.titech.ac.jp)

This paper presents a convolution quadrature time-domain boundary element method (CQBEM) for general three-dimensional anisotropic elastodynamics. A convolution quadrature method (CQM), first proposed by Lubich, is applied to the convolutions of time-domain boundary integral equations for general three-dimensional anisotropic elastodynamics. Laplace-domain fundamental solutions are utilized for this proposed time-domain BEM formulation. Elastic wave scattering by a cavity in various anisotropic solids is analyzed using a hybrid parallelization with MPI and OpenMP to validate the proposed CQBEM.

***Key Words***: Time-domain BEM, General anisotropy, Convolution quadrature method (CQM), Elastic waves

## 1. はじめに

本論文では, 一般の 3 次元異方性弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法 (CQBEM: Convolution Quadrature Boundary Element Method)，すなわち，どのような異方性問題に対しても適用可能な CQBEM を開発し，具体的に様々な異方性弾性波動場の可視化結果を示すことで，本手法の妥当性について検討する．CQBEM は，演算子積分法 (CQM: Convolution Quadrature Method)[(1)(2)] を時間領域境界要素法の時間方向の離散化に適用したものであり，Schanz により提案された [(3)]．その後，福井ら [(4)]，Saitoh ら [(5)] により，高速多重極法 [(6)(7)] を適用した高速化等がなされ，工学の様々な問題へ適用されてきた [(8)]．CQBEM は，従来の時間領域境界要素法に比べて，時間増分が小さい場合でも比較的安定に計算を行うことができるだけでなく，分散性 (周波数が変化すると波動速度も変化する) 波動問題のように，時間領域基本解を閉じた形で求めることが困難な問題にも有効である．また，時間領域基本解が複雑な問題に対して，比較的容易に求解のスキームを実行することができる．そのため，分散性波動問題ではないものの，基本解が複雑で，波動速度が方向に依存する異方性弾性波動に対する時間領域の問題にも CQBEM は適用されてきた．例えば，Zhang[(9)] は，純面外異方性弾性波動問題を CQBEM を用いて解いている．古川ら [(10)] は，純面内異方性弾性波動問題を CQBEM を用いて解いている．斎藤ら [(11)]，Furukawa ら [(12)] は，一般の 3 次元異方性問題に対する CQBEM の定式化を示している．

もちろん，従来の時間領域境界要素法を用いた異方性弾性波動解析も行われている．それらの多くは Wang と Achenbach[(13)] により導かれた基本解を用いており，例えば，廣瀬ら [(14)] は，純面内問題に対して，様々な異方性材料中の欠陥による散乱問題を解いている. 一方，Tan ら [(15)] は，純面内問題に対して，き裂による散乱問題を解いている．また，一般の 3 次元異方性弾性波動問題へと拡張し，その定式化の一部についても示している [(16)]．さらに志戸岡ら [(17)] は，一般の 3 次元異方性弾性波動問題に対して高速多重極法を適用した場合の定式化を示している．このように，時間領域境界要素法を用いた異方性弾性波動解析は，従来法, CQBEM の両者でいくつかの解析例が見られるものの，特に一般の 3 次元異方性弾性波動問題に対して，具体的に弾性波動場を解析した例は，著者らの知る限り例はなく，定式化までに留まっている．実際，計算負荷が問題となり，例えば文献 [(11)(12)(16)(17)] においても，一般の異方性弾性波動問題に対する基本解に，等方性の弾性定数を与えて境界データの計算精度を確認する程度に留まっている．

2021 年 10 月 18 日受付，2021 年 11 月 21 日受理

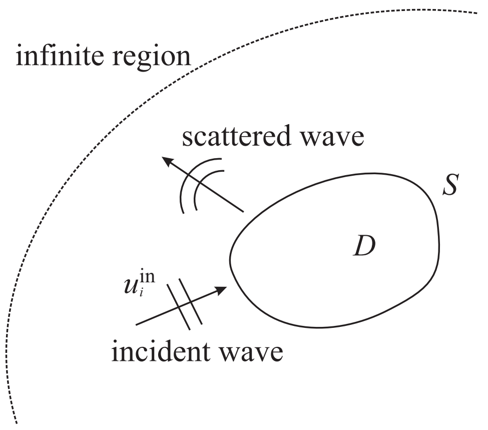



Fig.1　Elastic wave scattering in anisotropic media.

そこで，本研究では，前論文 [11] を拡張し，具体的に一般の 3 次元異方性弾性波動問題を CQBEM により解析する．その際，具体的にいくつかの異方性材料に対する弾性定数を与え，一般の異方性弾性波動問題を解析できていることを確認する．また，計算負荷の軽減策として，MPI と OpenMP を用いたハイブリッド並列化を施す [18]．以下では，一般の 3 次元異方性弾性波動問題に対する基礎式について簡単に説明した後，時間領域境界積分方程式や，CQBEM について簡単に説明する．最後に，3 次元解析での群速度曲線について説明すると共に，実際の数値解析例を示すことで，解析手法の妥当性等について確認する．

## 2. 解くべき問題と異方性弾性波動問題の基礎式

以下では，直交直線座標系に関する座標成分を $x_i(i = 1, 2, 3)$ で表し，アルファベットの右下添え字は総和規約に従うとする．また，変位や表面力といった他の物理量に対しても同様の表記を用いることとする．

さて，Fig.1 のような 3 次元で均質な無限異方性弾性体領域における入射波による散乱問題について考える．入射波 $u_i^{\rm in}$ が空洞 $D$ の表面 $S$ に到達するまで，境界上の変位は静止過去の条件を満足するものとする．

3 次元異方性弾性波動問題において，変位 $u_i$ および応力 $\sigma_{ij}$ は，簡単のため，物体力を無視すれば，それぞれ次の運動方程式，応力-変位の関係式を満足する．

$$C_{ijkl}u_{l,kj} = \rho\ddot{u}_i \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} \tag{2}$$

ここで，$(\ )_{,j}$ および $\dot{(\ )}$ はそれぞれ空間 $x_j$ および時間 $t$ に関する微分を表す．また，$\rho$ は異方性弾性体の密度であり，$C_{ijkl}$ は弾性定数を表す．なお，異方性弾性波動問題の場合は，弾性定数 $C_{ijkl}$ を直接用いるのではなく，Voigt 記号による弾性定数 $C_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, \ldots, 6)$ を使った表記法がよく用いられる．$C_{ijkl}$ と $C_{\alpha\beta}$ の変換関係は次の式で表される [19]．

$$\alpha = \begin{cases} i & :(i = j) \\ 9-(i+j) & :(i \neq j) \end{cases} \tag{3}$$

$$\beta = \begin{cases} k & :(k = l) \\ 9-(k+l) & :(k \neq l) \end{cases} \tag{4}$$

本論文においては，総和規約等を適用する CQBEM の定式化中では $C_{ijkl}$，その他の箇所では $C_{\alpha\beta}$ と弾性定数の表記を使い分けることとする．

## 3. 解くべき問題に対する演算子積分時間領域境界要素法

### 3.1. 時間領域境界積分方程式

2 節で簡単に説明した空洞による散乱問題を時間領域境界要素法で解くことを考える．境界 $S$ 上および 3 次元無限異方性弾性体中の変位 $u_i$ は，空洞における表面力フリーの境界条件を考慮すれば，次の時間領域境界積分方程式を解くことで求まる．

$$\bar{C}_{ij}u_j(\boldsymbol{x}, t) = u_i^{\rm in}(\boldsymbol{x}, t) - \int_S T_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) * u_j(\boldsymbol{y}, t)dS_y \tag{5}$$

ここで，$*$ は時間に関する畳込み積分，$\bar{C}_{ij}$ は境界形状に依存するいわゆる自由項を表す．また，$T_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ は 3 次元異方性弾性波動問題における二重層核を表す．二重層核の計算に必要な 3 次元異方性弾性波動問題における時間領域基本解は，Wang と Achenbach により単位球面上の積分を含んだ形で最初に提案され [13]，他の論文において，その数値的な取扱いについて議論がなされている [16]．しかしながら，後に説明するように，CQBEM では時間領域の解を求めるにも関わらず，直接に時間領域基本解を用いないため，ここでは時間領域基本解の詳細については省略する．通常，式 (5) の時間領域境界積分方程式は，時間と空間に関して適切な離散化を施し，逐次的に第一ステップから解を求めていくことが行われるが，以下では，式 (5) の畳込み積分の評価に，次節で述べる Lubich により提案された CQM を用いる．

### 3.2. CQM を用いた離散化

ここでは，CQM を用いて式 (5) を離散化する．詳細は文献 [11][12] に譲り，定式化のポイントについて簡単にまとめておく．Lubich の CQM は，次の畳込み積分

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \tag{6}$$

を，関数 $f$ のラプラス変換を用いて離散化近似する方法である．すなわち，時間 $t$ を時間増分 $\Delta t$ を用いて $N$ ステップに分割することを考えれば，畳込み積分は CQM により次のように近似することができる．

$$f * g(n\triangle t) \simeq \sum_{j=0}^{n} \omega_{n-j}(\triangle t)g(j\triangle t), \quad (n = 0, 1, \ldots, N) \tag{7}$$

ただし，$\omega_j(\triangle t)$ は重み関数であり，$f$ のラプラス変換 $\hat{f}$ により次のように表される．

$$\omega_n(\triangle t) \simeq \frac{\mathcal{R}^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\hat{f}\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\triangle t}\right)\mathrm{e}^{\frac{-2\pi i n l}{L}} \tag{8}$$

ここで，$\mathcal{R}, L, \delta$ は CQM のパラメータ [1][2] である．ただし，$\mathcal{R}$ は目標とする精度 $\epsilon$ によって決定されるパラメータであり，

$$\mathcal{R} = \epsilon^{\frac{1}{2L}} \tag{9}$$

により決定される．また，$\delta$ は，BDF1 や BDF2 といった差分法により計算される [1][2].

今，式 (5) を区分一定要素で離散化することを考える．すなわち，境界 $S$ を $M$ 個の境界要素で離散化し，選点をそれぞれの境界要素中央に取り，式 (5) の畳込み積分に式 (7) の CQM を用いれば，$\boldsymbol{x} \in S$ における第 $n$ ステップに関して，次の離散化された時間領域境界積分方程式を得ることができる．

$$\frac{1}{2}u_i(\boldsymbol{x}, n\Delta t) = u_i^{\text{in}}(\boldsymbol{x}, n\Delta t) - \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{k=1}^{n} B_{ij}^{n-k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{\alpha})u_j^{\alpha}(k\Delta t) \tag{10}$$

ここで，右上添字 $\alpha$ は，選点 $\boldsymbol{y}$ に関する指標を表す．また，$B_{ij}^m$ は二重層核に関する影響関数であり，次のように表される．

$$B_{ij}^m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_S \hat{T}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s_l)dS_y\right]e^{-\frac{2\pi iml}{L}} \tag{11}$$

ただし，$s_l$ は $s_l = \delta(\zeta_l)/\Delta t$ で定義される．また，$\hat{T}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s)$ は，ラプラス変換域における 3 次元異方性弾性波動問題における二重層核である．式 (11) における影響関数の積分核は，式 (7)，(8) の CQM を用いたことにより，時間領域ではなくラプラス変換域の積分核であることに注意する．式 (10) を第 $n$ ステップにて, 境界未知量を左辺に, 境界既知量を右辺に移行すれば, 次の式を得る.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}u_i(\boldsymbol{x}, n\triangle t) + \sum_{\alpha=1}^{M} B_{ij}^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{\alpha})u_j^{\alpha}(n\triangle t)\\ =&u_i^{\text{in}}(\boldsymbol{x}, n\triangle t) - \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{k=1}^{n-1} B_{ij}^{n-k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{\alpha})u_j^{\alpha}(k\triangle t)\end{aligned} \tag{12}$$

式 (12) に着目すると，右辺は第 $n$ ステップ以前の境界既知量のみで構成されることから，初期条件により，第一ステップから順番に，最終の第 $N$ ステップまで逐次的に解を求めることが可能である．以上より，CQM を用いた場合の時間領域境界積分方程式の離散化は示された．

## 4. 数値計算に対するいくつかの補足

本節では，3 節で示した CQBEM の数値計算に対するいくつかの補足事項についてまとめておく．

### 4.1. 単位球面に関する積分

式 (11) における二重層核 $\hat{T}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s)$ は，対応する基本解 $\hat{U}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s)$ により計算される．文献 [13][16] 等で示されているように，時間領域や周波数領域における 3 次元異方性弾性波動問題に対する基本解は，一般に単位球面に関する積分を含む．本研究では CQBEM で解析するため，ラプラス変換領域に関する基本解を用いるが，この傾向は同様である．ラプラス変換領域における 3 次元異方性弾性波動問題の基本解 $\hat{U}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s)$ は次の式で与えられる．

$$\hat{U}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) = \hat{U}_{ij}^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \hat{U}_{ij}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) \tag{13}$$

ただし，$\hat{U}_{ij}^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は基本解の静的部分，$\hat{U}_{ij}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s)$ は動的部分であり，

$$\hat{U}_{ij}^S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{8\pi^2 r}\int_{|\boldsymbol{n}|=1}\Gamma_{ij}^{-1}(\boldsymbol{n})dS(\boldsymbol{n}) \tag{14}$$

$$\hat{U}_{ij}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{|\boldsymbol{n}|=1}\sum_{m=1}^{3}\frac{sE_{im}E_{jm}}{\rho c_m^2}e^{-s|\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|}dS(\boldsymbol{n}),\quad \text{ただし}, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x} > 0 \tag{15}$$

で与えられる．ここで $r$ は $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, $\boldsymbol{n}$ は単位球面を表す単位ベクトル，$c_m$ は 3 次元異方性弾性体中を伝搬する弾性波動の位相速度，$\Gamma_{ij}$ は弾性定数 $C_{ijkl}$ から成る Christoffel テンソル，$E_{im}$，$\lambda_m$ は，それぞれ Christoffel 方程式から決定される固有値と固有ベクトルを表している [19]．単位球面に関する積分は基本的に数値的に評価する必要がある．本研究では，単位球面に関する被積分関数 $f$ を次のように数値積分で評価した．

$$\begin{aligned}\int_{|\boldsymbol{n}|=1} f(\boldsymbol{n})dS(\boldsymbol{n}) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \phi)\sin\theta d\theta d\phi\\ &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} f(\cos^{-1}(x), \phi)dxd\phi\\ &= \sum_{I=0}^{2p}\sum_{J=1}^{p+1}\eta_I^p f(\phi_I^p, \lambda_J^p)\omega_J^p\end{aligned} \tag{16}$$

ただし, $\theta, \phi$ はそれぞれ単位球面上のベクトル $\boldsymbol{n}$ の球座標系における天頂角と方位角である．また，$\omega_J^p$ は $p+1$ 点のガウスの数値積分における $J$ 番目の積分点の重み，$\lambda_J^p$ は $J$ 番目の積分点の座標成分に関する逆余弦，$\phi_I = 2\pi I/(2p+1)$, $\eta_I^p$ は $\eta_I^p = 2\pi/(2p+1)$ である．すなわち，被積分関数 $f(\boldsymbol{n})$ の単位球面上の積分は，$\theta$ 方向に対してはガウスの数値積分を，$\phi$ 方向に対しては台形公式を用いて評価した．

### 4.2. 並列化

異方性弾性波動問題では，4.1 節で示したような単位球面に関する数値積分を実行した後，通常の境界要素法と同様の空間に関する積分を実行する必要がある．さらに，式 (11) で示すように，これら 2 つの積分の外には，CQM のパラメータ $L$ に関する総和を含む．そのため，計算負荷はかなり大きなものとなる．そこで，MPI と OpenMP を用いたハイブリッド並列化を施すことで計算負荷を軽減させる．Fig.2 は，本研究で用いた MPI-OpenMP ハイブリッド並列化の概略図を示している．Fig.2 左側は各 $m$ に対する式 (11) の影響関数による行列を，右側は入射波ベクトルを示している．要素数 $M$ を使用する MPI プロセス数 $N_p$ で割り，各 MPI プロセスが担当する境界要素行列の計算担当数を決める．この担当数を $k = M/N_p$ とする．ただし，各要素同士で計算される小行列は $3\times 3$ の成分を持つため，実質，各プロセスの担当行列のサイズは，各 $m$ 当たり，$3k\times 3M$ となることに注意する．また，通常 MPI では，プロセス番号をゼロから数える

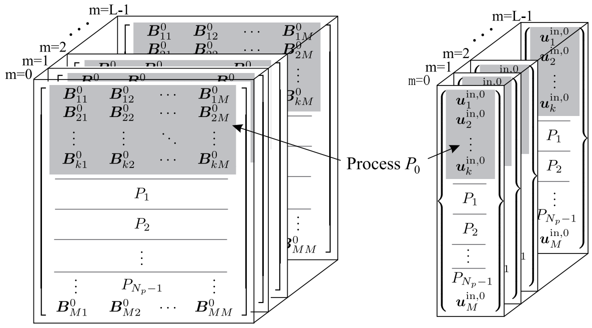



Fig. 2　A schematic of parallelization used in this study.

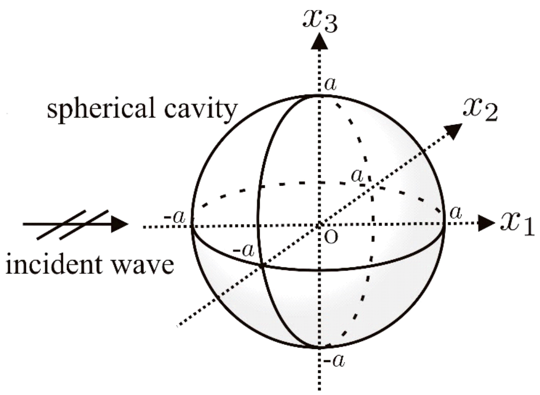



Fig. 3　Elastic wave scattering by a cavity with radius $a$ in an anisotropic medium.

ため，各プロセスを表わす記号 $P$ は $P = 0, \ldots, P_{N_P-1}$ としている．すなわち，Fig.2 に示すように，行割りにより，各 $m$ に対する境界要素行列は，各プロセスにより等分割される．入射波ベクトルに対しても同様である．実際の計算では，式 (11) におけるカッコ内 [ ] の計算をした後，FFT を用いて $m = 0, \ldots, L-1$ に対する境界要素行列の成分を一度に求めることができる [18]．すなわち，Fig.2 左側の奥行方向の計算に対応する．なお，このカッコ内 [ ] の計算に対しては，OpneMP を用いて計算を低減させた．

## 5. 数値解析例

以下，数値解析例を示す．解析対象として，Fig.3 のような半径 $a$ の球状の空洞による入射平面波の散乱問題を考える．なお，解析には京都大学学術情報メディアセンターにおける Camphor2(System A) の CRAY XC40[20] を用いた．1 ノードあたりのプロセッサは Intel Xeon Phi KNL(Xeon Phi CPU 7250) であり，プロセッサ数 (コア数) は 68，メモリーは 96GB である．計算では 1 つの MPI プロセスを，1 ノードに割り当てることとする．解析には 4.2 節で示したハイブリッド並列化を用いた．用いた MPI プロセス数は $N_p = 8$ であり，1 つのプロセス当たり OpenMP による 68 並列を施した．空間の離散化には三角形一定要素を用い，要素数 $M = 800$ とした．CQM のパラメータである $L$ は，全ての計算において $L = N$ とし，総時間ステップ数 $N$ と等しくとることで，式 (11) の計算に FFT を施し，計算を高速化している．一方，式 (9) における

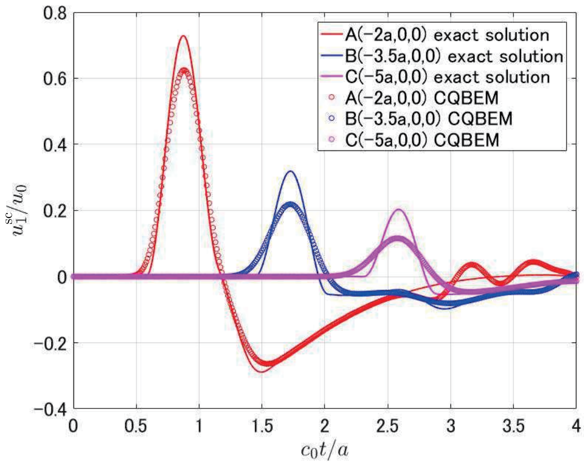



Fig. 4　Time variations of $u_1/u_0$ at A, B and C obtained by CQBEM with BDF1.

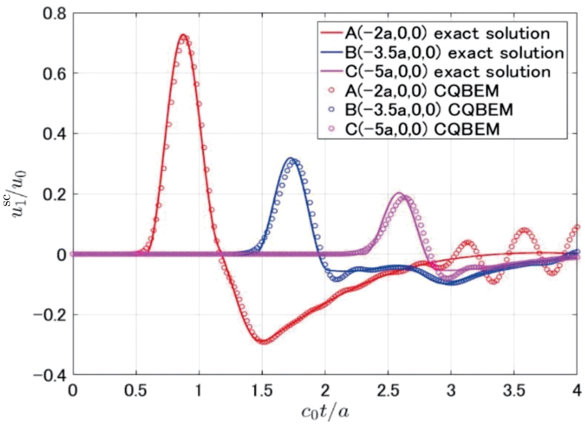



Fig. 5　Time variations of $u_1/u_0$ at A, B and C obtained by CQBEM with BDF2.

精度パラメータ $\epsilon$ は $\epsilon = 1.0 \times 10^{-10}$ とした．式 (16) の計算では，試験的に $p = 150$ とした．ただし，実用的には計算時間の観点から，異方性の度合いに応じて $p$ の値は変化させる必要があると考えられる．また，解析には，$x_1$ 方向に伝搬する次の平面波を用いた．

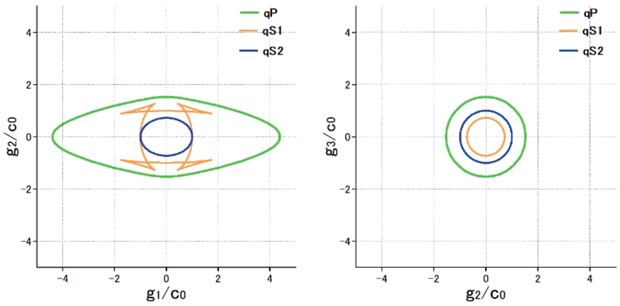
$$u_i^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t) = u_0 \delta_{i1}(1 - \cos\alpha) \tag{17}$$

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{T}\left(t - \dfrac{x_1 + a}{c_{\mathrm{qP}}}\right) & \text{for } (0 \le \alpha \le 1) \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases} \tag{18}$$

ただし，$c_{\mathrm{qP}}$ は入射波の $x_1$ 方向の波速，$u_0$ は振幅，$T$ は入射波の周期を表す．

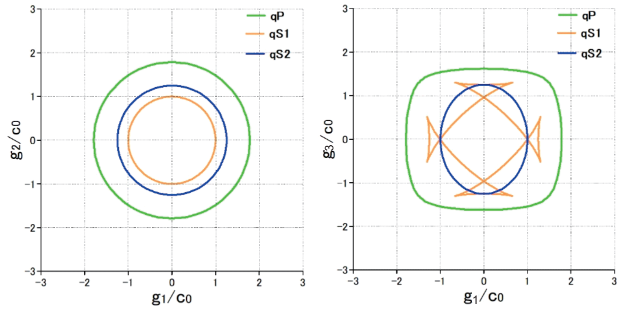
### 5.1. 精度の確認

一般の 3 次元異方性弾性波動問題は，計算負荷が極めて大きい．そのため，実際の変位場を計算する前に，いくつかの数値実験により解析に用いるおよそのパラメータについて決定しておく．ここでは，式 (13) の基本解の計算に含まれる弾性定数 $C_{ijkl}$ に等方性材料に対するパラメータを与え，Fig.3 に対する散乱問題を解くことで，$x_1$ 軸上の A 点 $(x_1/a = -2.0)$, B 点 $(x_1/a = -3.5)$, C 点 $(x_1/a = -5.0)$ における散乱波 $u_1^{\mathrm{sc}}$




(a) (b)

Fig. 6　Group velocity curves of a uni-directional CFRP in (a)$x_1$-$x_2$ plane (b)$x_2$-$x_3$plane.




(a) (b)

Fig.7　Group velocity curves of an austenite steel in (a)$x_1$-$x_2$ plane (b)$x_2$-$x_3$plane.

を計算する．等方性材料に対するフォークト表記された弾性定数は，次式で与えた．

$$\frac{C_{\alpha\beta}}{C_{66}} = \begin{bmatrix} 3.0 & 1.0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3.0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3.0 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sym.} & & 1.0 & 0 & 0 \\ & & & & 1.0 & 0 \\ & & & & & 1.0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

ただし，式 (19) は，$C_{66}$ で無次元化されていることに注意されたい．Fig.4, Fig.5 は，式 (8) における CQM パラメータの $\delta$ の計算に，それぞれ BDF1, BDF2 を用いた場合の A, B, C 点における散乱波 $u_1^{\mathrm{sc}}/u_0$ の時間変化を示している．いずれも総時間ステップ数 $N = L = 512$ とした．また，入射波を P 波とし，式 (17) で $c_{\mathrm{qP}} = \sqrt{3}c_0$($c_0$ は S 波速度) とし，時間増分は，S 波速度 $c_0$ より，$c_0\Delta t/a = 0.01$, 入射波の周期 $c_0T/a = 1.0$ としている．比較のため，Pao と Mow[21] による周波数領域での解析解を逆フーリエ変換することで求めた解を実線で示してある．

Fig.4 より，BDF1 を用いた場合は，A, B, C 各点における最大変位振幅が Pao と Mow の解による数値解と一致していないことがわかる．また，各点における波形の立ち上がり時刻も，やや異なることがわかる．一方，Fig.5 の BDF2 の場合に着目すると，A, B, C 各点における最大振幅や波形の立ち上がり時刻は比較的良く一致していることがわかる．なお，Fig.5 の A 点における CQBEM の数値解は，時刻 $3.0 \leq c_0t/a \leq 4.0$ 程度において，やや振動している．これは BDF2 を用いて球を一定要素で離散化した場合に生じる現象である．この振動は，時間増分を小さく設定したとしても生じ，発散はしない[22]．BDF2 ではなく，RK(ルンゲクッタ) 法を用いることでその精度は改善されると考えらるが，計算負荷は増大する[23]．以下では，計算負荷を優先し，BDF2 を用いて計算を行うこととする．

### 5.2. 異方性弾性体中の空洞による入射波の散乱解析

次に，具体的に異方性弾性体中の空洞による入射波の散乱解析を行う．計算は BDF2 を用い，総時間ステップ数 $N = L = 256$, 時間増分 $c_0\Delta t/a = 0.02$ とした．また，異方性弾性体の場合は 5.1 節で示したような参照となる数値解を求めることは困難であるため，結果のおよその妥当性を群速度曲線[19] と比較，並びに波面の到達位置で評価する．解析対象とする一方向 CFRP，オステナイト系鋼材の群速度曲線は，それぞれ Fig.6, Fig.7 に示すとおりである．なお，後に示す解析結果の比較のために，等方弾性体の場合の空洞による入射波の散乱解析結果も Fig.8 に示しておく．Fig.8 は，5.1 節の BDF2 を用いた場合の条件下で得られた空洞周辺の変位場 $|\boldsymbol{u}|/u_0$ の一例である．ただし，Fig.8(a),(c) は時間ステップ数 $n$ が $n = 80$ の，Fig.8(b),(d) は $n = 144$ の場合の結果である．

#### 5.2.1　一方向 CFRP の場合

まず，一方向 CFRP 中の空洞による入射波の散乱解析結果を示す．一方向 CFRP の弾性定数 $C_{\alpha\beta}$ は次のように与えた．

$$\frac{C_{\alpha\beta}}{C_{66}} \simeq \begin{bmatrix} 19.3 & 8.0 & 8.0 & 0 & 0 & 0 \\ & 15.1 & 8.3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 15.1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sym.} & & 0.52 & 0 & 0 \\ & & & & 1.0 & 0 \\ & & & & & 1.0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Fig.9 は一方向 CFRP 中の空洞による散乱解析結果を示しており，Fig.9(a),(b) は $x_1 - x_2$ 平面，Fig.9(c),(d) は $x_2 - x_3$ 平面での結果を示している．なお，Fig.9(a),(c) および Fig.9(b),(d) は，それぞれ時間ステップ数 $n$ が $n = 32, 64$ の場合の結果である．この場合，入射波の周期は $c_{\mathrm{qP}}T/a \simeq 2.53$ で与えた．Fig.9(a),(b) の $x_1 - x_2$ 平面における結果に着目すると，発生する散乱波は，$x_1$ 方向に速く伝搬していることがわかる．入射波が空洞の後方に位置する Fig.9(b) の場合では，qS 波 (擬似横波) が発生している様子も見て取れる．Fig.6 で示した群速度曲線によると，Fig.6(a) で示すように，$x_1 - x_2$ 面内では，$x_1$ 方向に qP 波が速く伝搬し，遅れて qS 波が発生する．すなわち，Fig.9 で示した結果は Fig.6 で示した群速度曲線にしたがって，およそ波動が伝搬していることがわかる．また，Fig.6(a) より，$x_1$ 方向の群速度 $g_1/c_0$ はおよそ $g_1/c_0 \simeq 4.39$

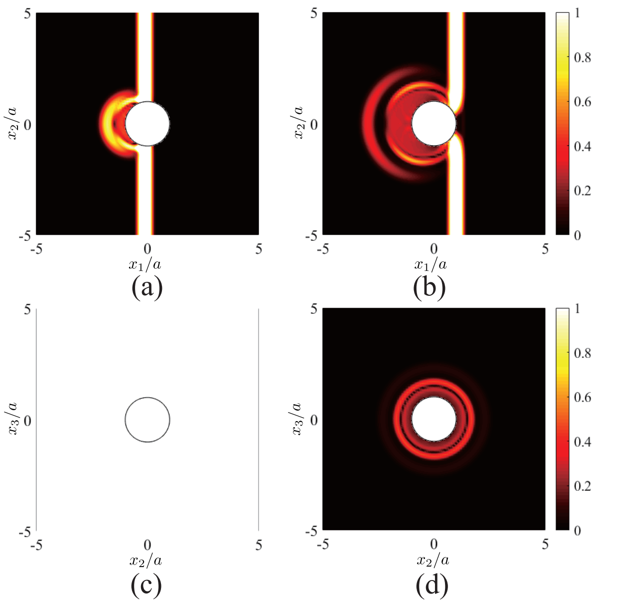


Fig. 8　Elastic wave scattering by a cavity in an isotropic solid in (a),(b) $x_1$-$x_2$ plane and (c),(d) $x_2$-$x_3$plane.

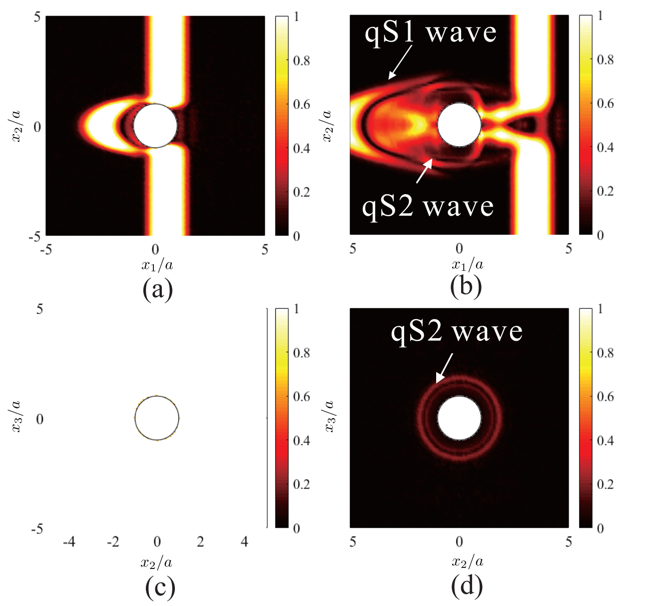



Fig. 9　Elastic wave scattering by a cavity in a uni-directional CFRP in (a) $x_1$-$x_2$ plane and (b) $x_2$-$x_3$plane.

程度である．時間増分は $c_0t/a=0.02$ であるから，$n=32$ ステップまでに qP 波はおよそ $4.39\times0.02\times32\simeq2.81$ 程度，伝搬することになる．実際，Fig.9(a) より，qP 波の波面は，空洞左端から同程度伝搬していることがわかる．

一方，Fig.9(c) に着目すると，Fig.9(a) の結果から考察すれば，入射波がおよそ $x_2-x_3$ 面に到達しているため，変位場 $|\boldsymbol{u}|/u_0$ がおよそ，その最大振幅値を示し，入射変位による支配的な結果となっていることがわかる．その後，Fig.9(d) より，発生した散乱波は等方性の場合の Fig.8(d) と同様に，等方に伝搬している様子を見て取れる．実際，Fig.6(b) の $x_2-x_3$ 面における群速度曲線を見ても，波動は等方に伝搬すると考えられる．すなわち，Fig.6 の群速度曲線の結果より，数値解析結果のおよその妥当性を示すことができたと考えられる．

### 5.2.2　オステナイト系鋼材の場合

次に，オステナイト系鋼材中の空洞による入射波の散乱解析結果を示す．なお，オステナイト系鋼材の弾性定数 $C_{\alpha\beta}$ は次のように与えた．

$$\frac{C_{\alpha\beta}}{C_{66}}\simeq\begin{bmatrix}3.16&1.19&1.76&0&0&0\\&3.16&1.76&0&0&0\\&&2.63&0&0&0\\&\text{Sym.}&&1.57&0&0\\&&&&1.57&0\\&&&&&1.0\end{bmatrix}\tag{21}$$

ただし，式 (19) 同様，式 (21) は $C_{66}$ で無次元化されていることに注意されたい．Fig.10 はオステナイト系鋼材中の空洞による散乱解析結果を示しており，Fig.10(a),(b) は $x_1-x_2$ 平面，Fig.10(c),(d) は $x_1-x_3$ 面での結果を示している．ただし，式 (21) の弾性定数 $C_{66}$ の値からわかるように，一方向 CFRP の場合とは異なり，$x_1-x_2$ 面を等方性とし，$x_1-x_3$ 面が異方性を示すように弾性定数を与えていることに注意されたい．このようにした理由は，3 次元解析における $x_1-x_2$, $x_2-x_3$, $x_1-x_3$ の全ての面に対し，前節と合わせて異方性の影響を正しく表すことができているかを確認するためである．なお，Fig.10(a),(c) および Fig.10(b),(d) は，それぞれ時間ステップ $n$ が $n=80,144$ の場合の結果である．この場合，入射波の周期は $c_{\mathrm{qP}}T/a\simeq1.03$ で与えた．Fig.10(a), (b) より，$x_1-x_2$ 面における解析結果に着目すると，$x_1-x_2$ 面において，散乱波は Fig.8(a), (b) と同様に，等方に伝搬している様子を確認できる．この結果は，$x_1-x_2$ 面におけるオステナイト系鋼材中の群速度曲線の結果である Fig.7(a) と一致している．すなわち，$x_1-x_2$ 面では，群速度曲線による考察通り，弾性波動は等方性としての性質を示すことがわかる．

一方，Fig.10 の $x_1-x_3$ 面の結果に着目すると，入射波が空洞に当たった後，散乱波が発生していることがわかる．Fig.7(b) のオステナイト系鋼材に対する群速度曲線によれば，qP 波はおよそ矩形の波面を持って伝搬し，qS1 波は $x_1,x_3$ 方向で波面がクロスしていることがわかる．実際，Fig.10(c) では，入射波が空洞に到達後に発生する散乱 qP 波が矩形に，Fig.10(d) では，波面がクロスした qS1 波が発生していることがわかる．また，Fig.7(a) より，$x_1$ 方向の群速度 $g_1/c_0$ はおよそ $g_1/c_0\simeq1.79$ 程度である．時間増分は $c_0t/a=0.02$ であるから，$n=80$ ステップまでに qP 波はおよそ $1.79\times0.02\times80\simeq2.86$ 程度，伝搬することになる．実際，Fig.10(c) より，qP 波の波面は，空洞左端から同程度伝搬していることがわかる．すなわち，Fig.10 より，$x_1-x_2, x_1-x_3$ 面のいずれに対しても，およそ正しく群速度曲線にしたがって異方性の影響を考慮出来ていることがわかる．

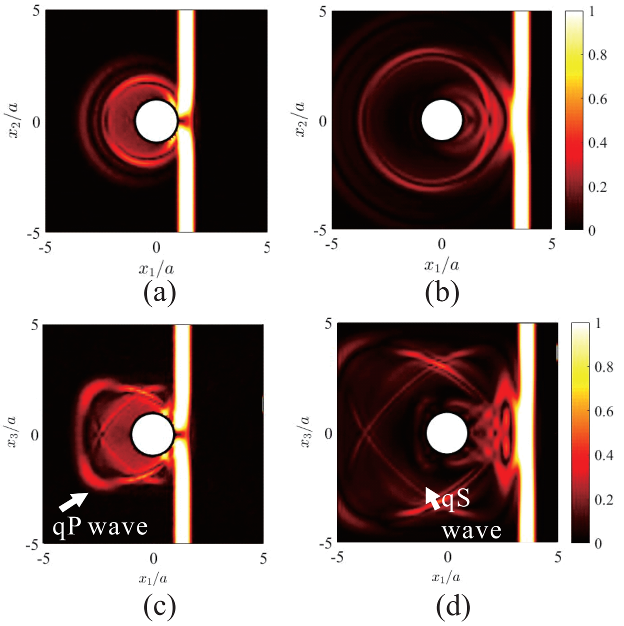



Fig. 10　Elastic wave scattering by a cavity in an austenite steel in (a) $x_1$-$x_2$ plane and (b) $x_3$-$x_1$plane.

なお，空洞境界上の変位をハイブリッド並列化を用いて求めるのに要した時間は，およそ 25 時間程度であった．

**6. 結論および今後の展望**

本論文では, Lubich の CQM を適用した CQBEM により，異方性弾性体中の空洞による散乱解析を具体的に実行した．計算負荷が大きいことから，京都大学のスーパーコンピューターによるハイブリッド並列化を用いて計算時間を低減させた．具体的に 3 次元で異方性材料の弾性定数を与えた場合でも，得られた散乱波動場はおよそ群速度曲線に従うことが確かめられた．

実際に数値解析を行うことで，解析のおよその妥当性は確かめられたものの，依然として解析に多大な計算時間が必要となる．そのため，今後は実用を見据えて，式 (16) における $p$ の選択方法の検討や，影響関数の計算に機械学習の導入を検討する等，何らかの方法を用いて必要計算時間を低減させる工夫を検討していきたい．

**謝辞**

本研究は，R2 年度学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (拠点研究機関：京都大学，Project ID:jh200052-NAH) および R3 年度学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (拠点研究機関：京都大学，北海道大学，Project ID:jh210033-NAH)，ならびに科学研究費補助金基盤研究 (C)(21K0423100) の支援の下で実施された．

## 参考文献

(1) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I *Numer. Math.*, **52**, (1988), pp. 129-145.

(2) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus II, *Numer. Math.*, **52**, (1988), pp. 413-425.

(3) Schanz, M. : Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: A Boundary Element Approach, Springer, (2001).

(4) 福井卓雄，岡山美央，石田貴之：2 次元波動伝播問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用，計算数理工学論文集，**6**, (2006), pp.153-158.

(5) Saitoh, T., Hirose, S. and Fukui,T. : Convolution quadrature boundary element method and acceleration by fast multipole method in 2-D viscoelastic wave propagation, *Theor. and Appl. Mech. Japan*, **57**, (2009), pp. 385-393.

(6) Rokhlin, V: Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60**, (1985), pp. 187-207.

(7) Greengard, L. and Rokhlin, V. : A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.*,**73**, (1987), pp. 325-348.

(8) Abreu, A. I., Carrer, J. A. M. and Mansur, W. J. : Scalar wave propagation in 2D: a BEM formulation based on the operational quadrature method, *Eng. anal. Bound. Elem.*, **27**, (2003), pp. 101-105.

(9) Zhang, Ch.: Transient elastodynamic antiplane crack analysis of anisotropic solids, *Int. J. Solids and Struc.*, **37**, (2000), pp. 6107-6130.

(10) 古川陽，田中遊雲，斎藤隆泰，廣瀬壮一：2 次元異方性弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法，応用力学論文集 A2(応用力学), **68**, (2012), pp. 269-278.

(11) 斎藤隆泰，田中遊雲，廣瀬壮一：3 次元異方性弾性波動問題における Lubich の方法を用いた時間領域境界要素法，計算数理工学論文集, **10**, (2010), pp.111-116.

(12) Furukawa, A, Saitoh, T. and Hirose, S.: Convolution quadrature time-domain boundary element method for 2-D and 3-D elastodynamic analyses in general anisotropic elastic solids, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **39**, (2014), pp.64-74.

(13) Wang, C.-Y. and Achenbach, J. D. :Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids, *Geophys, J. Int.*, **118**, (1994), pp.384-392.

(14) 廣瀬壮一，桂健太郎：異方性材料中の様々な欠陥による散乱特性，応用力学論文集，**2**, (1999), pp.119-125.

(15) Tan, A., Hirose, S., Zhang, Ch., and Wang, C.-Y.: A 2D time-domain BEM for transient wave scattering analysis by a crack in anisotropic solids, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **28**, (2005), pp. 610-623.

(16) Tan, A., and Hirose, S.: 3D time domain boundary element formulation for anisotropic elastic solid, *J. JASCOME*, **7**, (2008), pp. 285-290.

(17) 志戸岡永，大谷佳広，西村直志：3 次元時間域異方性動弾性問題における高速多重極境界積分方程式法について，応用力学論文集，**11**, (2008), pp.109-116.

(18) 斎藤隆泰，瀬川尚揮，石田貴之，廣瀬壮一：並列化された演算子積分時間領域高速多重極境界要素法による大規模多重散乱解析，計算数理工学論文集, **11**, (2011), pp. 95-100.

(19) Auld, B. A.: Acoustic fields and waves in solids, vol. 1,2, (1990), R. E. Krieger.

(20) http://www.iimc.kyoto-u.ac.jp/ja/services/comp/supercomputer/

(21) Pao, Y.-H. and Mow, C. C.: Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations, Crane and Russak, New York, (1973).

(22) 丸山泰蔵，斎藤隆泰，廣瀬壮一：陰的 Runge-Kutta 法を用いた演算子積分時間領域境界要素法および 3 次元スカラー波動問題への応用, 計算数理工学論文集，**12**, (2012), pp.91-96.

(23) Maruyama, T., Saitoh, T., Bui, T.Q. and Hirose, S.: Transient elastic wave analysis of 3-D large-scale cavities by fast multipole BEM using implicit Runge-Kutta convolution quadrature, *Comput. Method Appl. M.*, **303**, (2016), pp.231-259.