

軌道通り変位補正が座屈確率に及ぼす影響

EFFECT OF RAIL LATERAL REALIGNMENT ON TRACK BUCKLING PROBABILITY

阿部 和久¹⁾, 新井 優介²⁾, 紅露 一寛³⁾

Kazuhisa ABE, Yuusuke ARAI and Kazuhiro KORO

1) 新潟大学工学部 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)

2) 新潟大学大学院 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, E-mail:f21e027h@mail.cc.niigata-u.ac.jp)

3) 新潟大学工学部 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

In this paper, effect of the rail lateral realignment in accordance with the 10m-chord versine tolerance is discussed from the viewpoint of track buckling probability. To achieve this, track buckling analysis for a numerical model consisting of tangential continuous welded rails and sleepers is conducted. The initial lateral misalignment is modeled by a stationary random process and generated based on an autocorrelation function. In the numerical analyses, the realignment is defined as an optimal problem with a constraint condition for the allowable 10m-chord versine. The buckling probability is obtained through the Monte Carlo Simulation. Influence of the realignment on the buckling probability is investigated.

Key Words: Buckling Temperature, 10m-Chord Versine Criterion, Monte Carlo Simulation

1. はじめに

鉄道軌道において、継ぎ目を持たないロングレールは列車・軌道系の振動・騒音低減に有効であることなどから、在来線においてもその導入が進められている。しかし、長い区間にわたりまくらぎを介してレールが拘束されることで、夏季の日中など高温時にはレールに著大な圧縮軸力が発生する。特にバラスト軌道では、水平横方向変位(通り変位)に対する拘束力(道床横抵抗力)が比較的小さい場合、レールの温度上昇が座屈を惹き起こす危険性がある。

軌道座屈強度は、レール軸力がゼロとなる時のレール温度(中立温度)や、道床横抵抗力、およびレールの初期不整(初期通り変位)などに大きく依存する⁽¹⁾。そのため、ロングレール軌道においては、これらの適切な管理が重要となる。一般に、軌道横変位と中立温度からの相対温度(レール温度)との関係は Fig.1 に示す様なつり合い経路で与えられる。実際の軌道座屈強度は、Fig.1 の A 点における飛び移り座屈時の温度で与えられる。レール温度が当該値に達すると、力学状態は安定なつり合い解を与える C 点へと遷移し、その結果として瞬時に大きな変位が発生する。この座屈温度は、初期通り変位振幅の増加と共に急激に低下する「初期不整鋭敏性」を有する⁽²⁾。そのため、ランダムな波形で特徴づけられる通常の初期通り変位存在下で、軌道の座屈温度を確定論

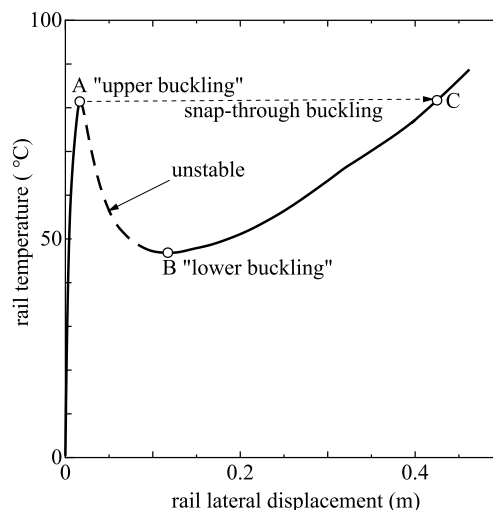


Fig. 1 Relationship between lateral displacement and rail temperature

的に評価することは現実的でない。

このような背景の下、我国における座屈管理は Fig.1 の B 点(最低座屈強さ)に基づき行われてきた⁽³⁾。最低座屈強さは、飛び移り座屈後のつり合い経路が取り得る最低温度を与える。この値は、A 点の飛び移り座屈温度とは異なり、通り変位の影響をほとんど受けない⁽⁴⁾。したがって、実際に発生

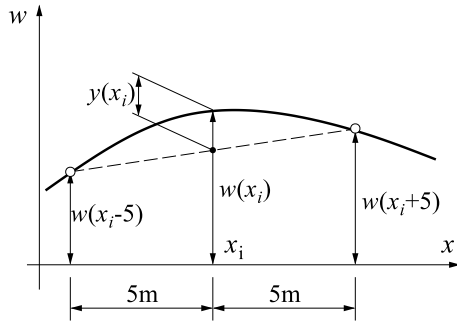


Fig. 2 Schematic diagram of 10m-Chord versine

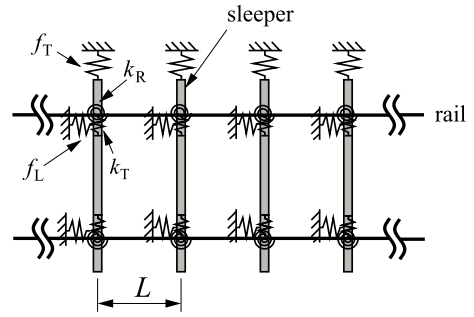


Fig. 3 Modeling of track

するレール温度が当該値を上回らない様に、軌道の座屈強度を確保することで軌道座屈を確実に防ぐことができる。

しかし、日最高気温が上昇傾向にある近年では、最低座屈強さに基づいた軌道管理が困難になりつつある。そのため、最低座屈強さから実際に大きな変位が発生する飛び移り座屈までの温度差（座屈余裕度）を考慮した管理基準の緩和に向けた検討がなされている⁽⁵⁾。また、前述のとおり、飛び移り座屈温度はランダムな初期通り変位に強く依存しているため、軌道座屈温度を確率論的に評価する試みも行われつつある^(2, 4)。なお、文献(2)、(4)では、初期通り変位を所定の距離相関関数に従うランダム波形で与え、多数の波形サンプルに対するモンテカルロシミュレーション(MCS)より座屈強度確率を求めている。

軌道の通り変位の管理は、それ自体の幾何形状(原波形)や振幅ではなく、一般に10m弦正矢と呼ばれる値に基づいてなされる。なお、10m弦正矢は、Fig.2に示す様に、着目点 x_i における通り変位原波形値 $w(x_i)$ と、そこから前後5m離れた2つの地点における通り変位原波形 $w(x_i - 5), w(x_i + 5)$ を結ぶ直線上の midpoint x_i における値との差 $y(x_i)$ で与えられる。軌道保守過程で10m弦正矢に基づき通り変位補正が行われた場合、それが許容値以下に修正されることで、間接的に原波形振幅やその標準偏差などが低減され、その結果、座屈確率も改善されるものと考えられるが、文献(2)、(4)ではその実際の効果は未確認なままである。

そこで本研究では、初期通り変位原波形に10m弦正矢の許容値に基づいた補正を加え、それが軌道座屈確率に及ぼす影響について調べる。なお従来、10m弦正矢の補正法として交差法と呼ばれるものが用いられており、その改良法⁽⁶⁾なども提案されている。当該法では、5m間隔に配置された各点での10m弦正矢の修正量が求められる。しかし本研究では、座屈解析を行う過程で、各有限要素節点における通り変位原波形自体の補正量を直接求める必要がある。そのため、各節点における10m弦正矢値が許容値以下となる様な通り変位原波形の補正量を求めるための一連の過程を最適化問題として定式化し、それに基づく新たな補正法を構成した。

2. 軌道座屈解析の概要

2.1. 軌道のモデル化

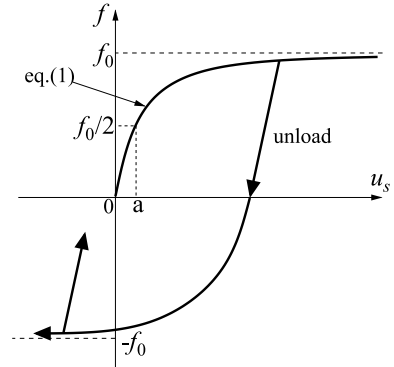


Fig. 4 Hysteresis curve of track resistance

直線軌道を対象に、左右ロングレールとまくらぎから構成される軌きょうを考える(Fig.3)。レールは長手方向の伸縮とそれに直交する水平方向たわみ(通り変位)を考慮した Euler ばり要素により離散化する。まくらぎは、レール長手方向変位と通り変位を考慮した剛な棒により表現し、等間隔 L で配置する。Fig.3に示す様に、レール・まくらぎ間の締結力は、通り変位方向の線形バネ k_T 、およびレール・まくらぎ間の回転バネ k_R によって表す。一方、レール伸縮がまくらぎ締結により完全に拘束される「不動区間」においては、レール方向のレール・まくらぎ間相対変位は発生せず、当該方向の締結バネが軌道座屈に及ぼす影響は無視し得るため、レール長手方向についてはレールとまくらぎを剛接する。また、軌道両端の「可動区間」ではレール軸力が低下するため、当該区間で座屈を生ずることは無く、レールの拘束条件が座屈挙動に影響を及ぼす恐れは無いと考えられることから、不動区間同様にレール・まくらぎ間を剛接した。

道床からまくらぎに作用する、軌道横方向の道床横抵抗力と、軌道長手方向の道床縦抵抗力は、非線形モデルで与える。なお、それらの作用力 f_T, f_L は、次式⁽⁷⁾の骨格曲線と、Fig.4の様な履歴特性に従うものとする。

$$\begin{aligned} f_T &= f_{0T} \frac{u_{ST}}{a_T + |u_{ST}|}, \\ f_L &= f_{0L} \frac{u_{SL}}{a_L + |u_{SL}|} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 f_0 は最終道床抵抗力、 u_s はまくらぎ変位、 a は道床抵抗力の値が $f_0/2$ となる時の変位であり、下付き添え字の T と L は、それぞれ横抵抗力と縦抵抗力に関する値であ

ることを意味している。

解析に当り、レール両端は変位拘束しない。そのため、式(1)の道床縦抵抗力 f_L の作用下で、前述の不動区間を除く軌道両端の120~200m前後の区間において、レール伸縮とそれに伴う軌道長手方向へのまくらぎ移動とが発生する(2)。

2.2. 軌道の座屈解析

レールは有限変位理論に基づき離散化する。その下で、左右レールそれぞれにランダムな初期通り変位を設定し、弧長増分法(8)によりつり合い経路を求める。

初期通り変位原波形は、以下の距離相関関数 $R(x)$ に従うものとして作成した。

$$R(x) = \frac{\sigma^2}{1 + (x/b)^2} \quad (2)$$

ここで、 σ は通り変位原波形の標準偏差、 b は長さの次元を持つ定数(相関長)である。

式(2)に従うランダムな初期通り変位原波形は、次式より生成される(2)。

$$\{\mathbf{W}\} = [\Phi][\mathbf{M}^{1/2}]\{\xi\} \quad (3)$$

ここで、 $\{\mathbf{W}\}$ は有限要素節点における初期通り変位から成るベクトル、 $\{\xi\}$ は期待値ゼロ、標準偏差1の正規乱数を成分とするベクトルである。 $[\Phi]$ と $[\mathbf{M}^{1/2}]$ は次式の固有ベクトル $\{\phi_i\}$ を縦ベクトル成分として並べて得られる行列、および固有値の平方根 $\sqrt{\mu_i}$ を対角成分に持つ対角行列である。

$$[\mathbf{C}]\{\phi_i\} = \mu_i\{\phi_i\} \quad (4)$$

なお、分散・共分散行列 $[\mathbf{C}]$ の成分 c_{ij} は、 i, j 番有限要素節点の軌道長手方向座標 x_i, x_j について、 $c_{ij} = R(|x_i - x_j|)$ で与えられる。

2.3. MCSによる座屈強度確率の評価

式(3)よりランダムな初期通り変位原波形を生成して、それに基づく座屈解析から最低座屈強さと飛び移り座屈強度(温度)を求める。この一連の操作を多数のサンプルに適用してMCSを実施する。得られた座屈温度から、次のカーネル密度推定(9)により確率密度関数 $p(t)$ を求める。

$$p(t) = \frac{1}{Nh\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^N e^{-(t-t_i)^2/(2h^2)}, \quad (5)$$

$$h = \sigma_t \left(\frac{4}{3N} \right)^{1/5}$$

ここで、 t はレール温度、 σ_t は座屈温度データ t_i から求めた標準偏差、 N はMCSのサンプル数である。

式(5)に対応する確率分布関数 $P(t)$ は次式により評価する。

$$P(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau \quad (6)$$

$$= 1 - \frac{1}{N\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^N \text{Erf} \left(\frac{t-t_i}{\sqrt{2}h} \right)$$

ここで、 $\text{Erf}(t)$ は誤差関数であり、本研究では次式により定義する。

$$\text{Erf}(t) = \int_t^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \quad (7)$$

3. 10m 弦正矢許容値に基づく通り変位原波形補正法

3.1. 10m 弦正矢と通り変位原波形との関係式

レールをはり要素で分割する際に、 i 番節点の軌道長手方向座標値を $x_i = i\Delta x$ で与えるものとする。なお、 Δx は x 方向の節点間隔である。 $n = 5/\Delta x$ とおくと、 i 番節点から前後に5m離れた節点の番号は $i \pm n$ で与えられる。するとFig.2に示した10m弦正矢 $y(x_i) = y_i$ は次式で与えられる。

$$y_i = w_i - \frac{1}{2}(w_{i-n} + w_{i+n}) \quad (8)$$

ここで、 w_i は i 番節点における通り変位原波形値である。

式(8)より、 y_i と w_i を成分に持つベクトル $\{\mathbf{Y}\}$ と $\{\mathbf{W}\}$ との関係は、次式の様に表すことができる。

$$\{\mathbf{Y}\} = [\mathbf{H}]\{\mathbf{W}\} \quad (9)$$

ここで、 $\{\mathbf{W}\}$ が w_1, \dots, w_M を成分に持つものとする、 $\{\mathbf{Y}\}$ の成分は y_{n+1}, \dots, y_{M-n} で与えられることとなる。また、 $[\mathbf{H}]$ は、式(8)に基づいて定まる長方形行列である。

3.2. 初期通り変位原波形の補正計算

ここでは、補正前の初期通り変位原波形と、それに対する10m弦正矢の節点値を改めて w_{0i}, y_{0i} で与える。また、そこからの補正量をそれぞれ w_i, y_i で与える。「1. はじめに」で述べたとおり、通り変位は10m弦正矢に基づいて管理がなされる。その過程を再現するために、各節点における10m弦正矢の絶対値 $|y_{0i} + y_i|$ が、その許容値 y_{max} 以下となる様な、初期通り変位原波形節点値の補正 w_i を求めたい。本研究では、この操作を次の目的関数 J の最小化問題として定義する。

$$\text{Minimize}_w J = \frac{1}{2} \sum_i w_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i [(y_{0i} + y_i)^2 - y_{max}^2], \quad (10)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i [(y_{0i} + y_i)^2 - y_{max}^2] = 0$$

ここで、 λ_i は未定乗数ベクトル成分である。

目的関数の主要部分は式(10)の右辺第1項目であり、通り変位原波形の補正量を最小限に抑えるために設けたものである。右辺第2項は、10m弦正矢の許容値に関する制約条件である。その具体的な値は本来恒等的にゼロとなるので、 J の値は右辺第1項目により与えられる。

J の w_i に関する感度は次式で与えられる。

$$\frac{\partial J}{\partial w_i} = w_i + \sum_m \lambda_m (y_{0m} + y_m) h_{mi} \quad (11)$$

ここで、 h_{mi} は式(9)の行列 $[\mathbf{H}]$ の成分である。

w_i の最適解を勾配法により求める。その際の修正量 Δw_i は次式により与えるものとする。

$$\Delta w_i = -\alpha \frac{w_{max}}{J'_{max}} \cdot \frac{\partial J}{\partial w_i} \quad (12)$$

ここで、 α は正の定数、 w_{max} と J'_{max} はそれぞれ w_i 、および $\partial J/\partial w_i$ の絶対最大値である。

Table 1 Track characteristics

lateral stiffness of fastener	k_T (MN/m)	40
torsional stiffness of fastener	k_R (kN·m/rad)	20
limiting lateral resistance	f_{0T} (kN/sleeper)	5.5
displacement at $f_{0T}/2$	a_T (mm)	1.0
limiting longitudinal resistance	f_{0L} (kN/rail)	2.5
displacement at $f_{0L}/2$	a_L (mm)	1.0

次に、未定乗数ベクトル成分 λ_i の導出について述べる。ある節点 i において $|y_{0i} + y_i| > y_{max}$ であるとき、次式を満たす様に y_i の修正量 Δy_i を設定する。

$$(y_{0i} + y_i + \Delta y_i)^2 \approx (y_{0i} + y_i)^2 + 2(y_{0i} + y_i)\Delta y_i = y_{max}^2 \quad (13)$$

式 (13) を Δy_i について解くと次式を得る。

$$\Delta y_i = \frac{y_{max}^2 - (y_{0i} + y_i)^2}{2(y_{0i} + y_i)} \quad (14)$$

式 (9) より、 Δy_i と Δw_i との関係は次式で与えられる。

$$\{\Delta \mathbf{Y}\} = [\mathbf{H}]\{\Delta \mathbf{W}\} \quad (15)$$

一方、式 (11), (12) より、 Δw_i は次式で与えられている。

$$\Delta w_i = -\alpha[w_i + \sum_m \lambda_m (y_{0m} + y_m) h_{mi}] \quad (16)$$

式 (14), (16) を式 (15) に代入すると、 λ_i に関する次の連立方程式を得る。

$$\sum_{j,m} h_{im} h_{jm} (y_{0j} + y_j) \lambda_j = -y_i - \frac{y_{max}^2 - (y_{0i} + y_i)^2}{2\alpha(y_{0i} + y_i)} \quad (17)$$

式 (17) を解くことで未定乗数 λ_i が求められる。

4. 解析結果

4.1. 解析条件

50kgN レールで構成されるロングレール軌道を想定し、水平面内(弱軸回り)曲げ剛性を 663 kN·m²、伸び剛性を 1.32 GN と設定した。また、線膨張係数は 12×10^{-6} (1/°C) とした。まくらぎ間隔は 0.6 m とし、軌道長 720 m (まくらぎ 1200 本) をモデル化して、まくらぎ支持点間のレールを 2 要素で分割して離散化した。通常の軌道条件下では、座屈温度は概ね 2.5m 以上の初期通り変位波長成分の影響を受ける。本解析における要素長はそれに比べ十分に短く、よって当該要素分割数が結果に影響を及ぼす恐れは無い。なお、この条件では $5/\Delta x$ は約 16.7 となり、整数値を与えない。そこで以下の解析では、式 (8) の n を 17 に設定した。この場合、弦長は 10.2m となるが、10m との差は僅かであるため、当該条件での結果を 10m 弦正矢に基づく補正と見なすこととした。

その他、レール・まくらぎ締結バネと道床横・縦抵抗力に関する諸量は Table 1⁽⁵⁾ に示す値に設定した。なお、最終道

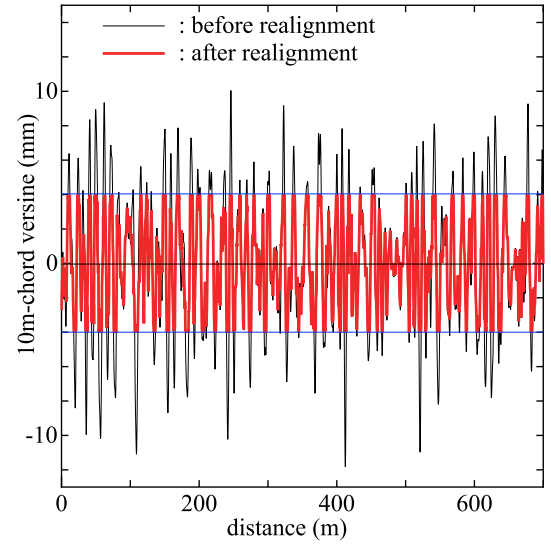


Fig. 5 10m-chord versine data before and after realignment ($y_{max}=4\text{mm}$)

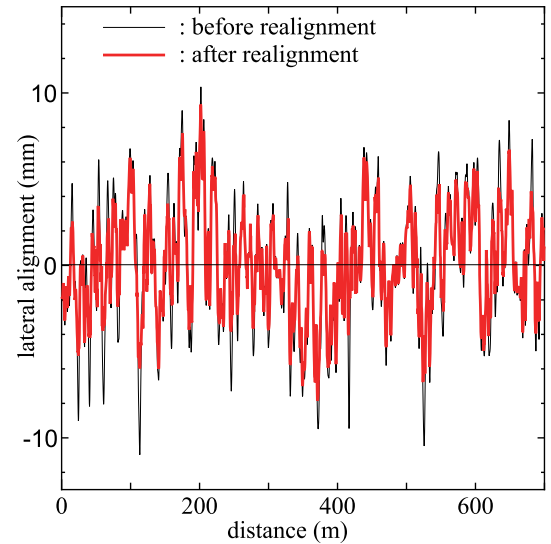


Fig. 6 Lateral alignment data before and after realignment ($y_{max}=4\text{mm}$)

床横抵抗力 f_{0T} はまくらぎ 1 本分、最終道床縦抵抗力 f_{0L} はレール 1 本分 (まくらぎ 1/2 本分) の値である。

ランダムな初期通り変位を作成する際の相関長は、過去の測定データに基づいた推定値 $d=2.84$ m に設定した。また、以下の解析では、MCS のサンプル数を 5000 とした。なお、文献 (2) の MCS では、座屈確率が 0.1% 程度であればサンプル数を 1000 とした場合と 5000 とした場合との差異は比較的小さかった。

4.2. 軌道通り変位原波形補正法の有効性の確認

標準偏差 $\sigma=4\text{mm}$ の下、式 (3) により初期通り変位原波形を生成した。その 10m 弦正矢値に対する許容値 y_{max} を 4mm に設定して、3.2. に述べた手法により通り変位原波形補正を実施した。補正前後における 10m 弦正矢波形の一例を Fig.5 に示す。補正前の 10m 弦正矢には、10mm を超える箇所も存

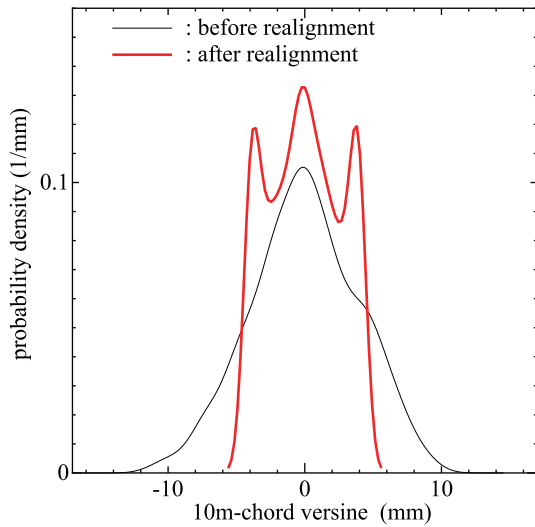


Fig. 7 Probability density functions of 10m-chord versine before and after realignment ($y_{max}=4\text{mm}$)

在している．一方，補正後の 10m 弦正矢は，設定した許容値である $y_{max}=4\text{mm}$ 以下に概ね抑えられており，本補正法の有効性が確認できる．

なお，本解析では式 (12) の α を 0.2 と設定した．また，通り変位原波形補正量 w_i を求める反復過程の収束判定は，次式で与えた．

$$\frac{|\Delta J|}{J_{max}} \leq \varepsilon \quad (18)$$

ここで， ΔJ は目的関数 J の前修正ステップからの増分， J_{max} は現修正ステップまでにおける J の最大値， ε は収束判定値であり，本研究では $\varepsilon=0.01$ とした．なお，この条件下では，収束までに概ね 20 ステップを要した．

Fig.5 の各 10m 弦正矢に対応する通り変位原波形を Fig.6 に示す．10m 弦正矢に基づく補正により，通り変位の振幅が全体に小さくなっている様子が確認できる．ただし，当然のことながら，通り変位原波形自体には，補正後も 4mm を超える比較的大きな振幅が多くの箇所で見られる．

次に，10m 弦正矢の許容値に基づく補正が，10m 弦正矢波形や通り変位原波形の確率特性に及ぼす影響について調べる．まず，有限要素節点における 10m 弦正矢値の確率密度関数について，補正前後を比較した結果を Fig.7 に示す．Fig.7 より，補正前は確率密度関数が広く分布していたものが，補正により概ね許容値以内に収められている様子が窺える．また，補正後は許容値近傍の確率密度関数が増大し，3 箇所ピークが現れている．

続いて，補正前後における通り変位原波形の確率密度関数を Fig.8 に示す．Fig.6 では 10m 弦正矢許容値に基づく波形補正によって原波形の振幅が縮小される様子を確かめたが，Fig.8 の確率密度関数の分布からもそのことが再確認できる．ただし，10m 弦正矢に認められた様な，補正後における確率密度関数形状の著しい変化は認められない．ちなみに， $\sigma=4\text{mm}$ で作成した初期通り変位原波形に対する補正後の標準偏差は 2.9mm であった．

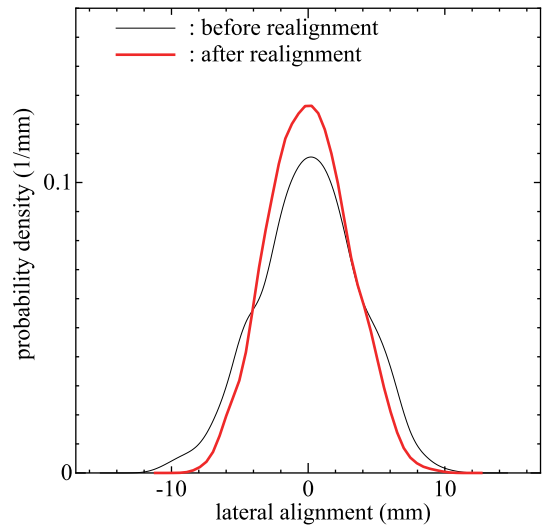


Fig. 8 Probability density functions of lateral alignment before and after realignment ($y_{max}=4\text{mm}$)

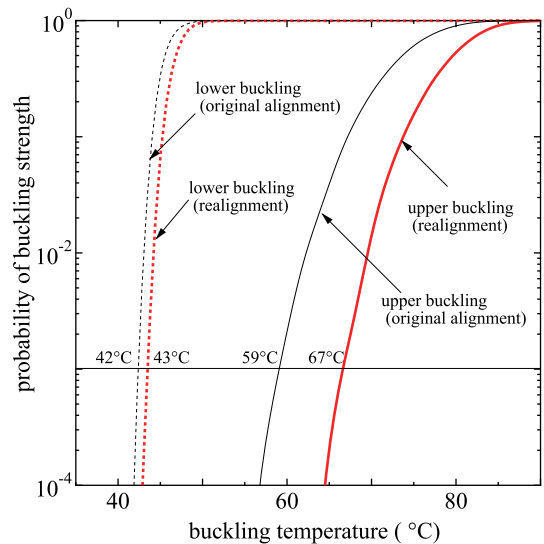


Fig. 9 Probability of buckling strength ($\sigma=4\text{mm}$)

4.3. 通り変位原波形補正が軌道座屈確率に及ぼす影響

初期通り変位原波形の標準偏差 $\sigma=4\text{mm}$ ，10m 弦正矢の許容値 $y_{max}=4\text{mm}$ のケースを対象に，通り変位原波形補正前後における座屈強度 (温度) の確率分布関数を求めた結果を Fig.9 に示す．Fig.9 には飛び移り座屈強度 (実線) と最低座屈強度 (破線) の確率分布関数を示した．なお，当該軌道モデルの場合，軌道両端から 200m を除く中央部の約 300m が不動区間となっており，概ねこの範囲内で座屈が発生する．実際の軌道では，一定距離 (例えば 1km) 当りの座屈確率を基準に管理するのが適切であると考えられるが，異なる区間長での座屈確率は Fig.9 の結果から容易に換算可能⁽²⁾である．

Fig.9 より，通り変位原波形の補正により，飛び移り座屈強度が大幅に向上する様子が確認できる．例えば，座屈強度確率 0.1% で比較すると，通り変位原波形補正により座屈温度は 59°C から 67°C にまで上昇しており，10m 弦正矢の許容

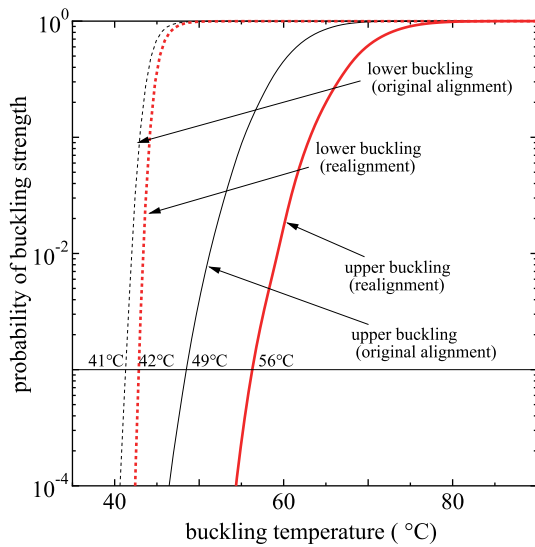


Fig. 10 Probability of buckling strength ($\sigma=6\text{mm}$)

値に基づく波形補正が座屈強度向上に有効に作用することがわかる。一方、最低座屈強さの場合、飛び移り座屈強度とは異なり、通り変位原波形補正の前後において 1°C 程度しか変化していない。その結果、最低座屈強さと飛び移り座屈強度との差で与えられる座屈余裕度は、通り変位原波形補正によって 17°C から 24°C にまで増加しており、最低座屈強さに基づいた管理基準値のより大幅な緩和が期待できる。

次に、初期通り変位原波形の標準偏差 σ が 6mm のケースにおける座屈強度の確率分布関数をFig.10に示す。なお、 10m 弦正矢の許容値 y_{max} は 4mm のままである。Fig.10より、 10m 弦正矢許容値に基づく通り変位原波形補正によって、 $\sigma=4\text{mm}$ の場合と同様に、飛び移り座屈強度が大きく向上することが確認できる。ただし、その向上度は $\sigma=4\text{mm}$ のケースと同程度であるものの、初期通り変位の標準偏差が 2mm 増加したことで確率分布関数自体が低温側に移動しており、座屈余裕度は補正後であっても 14°C と相対的に低めとなっている。このことから、座屈余裕度は補正前の通り変位波形振幅に大きく依存することがわかる。

5. おわりに

ランダムな初期通り変位を有する軌道の座屈強度確率に、 10m 弦正矢許容値に基づく通り変位原波形補正が及ぼす影響について調べた。また、そのために、当該の通り変位補正法を最適化問題として定式化し、具体的手法を構成した。

従来の補正法は 10m 弦正矢を補正対象としているが、本手法では通り変位原波形自体を対象としている。これにより、通り変位原波形の節点値を直接扱う座屈解析に、 10m 弦正矢に基づいた補正過程を組み込むことが可能となった。また解析例を通して、本補正法により 10m 弦正矢の許容値をみたく波形が適切に得られることを確認した。

10m 弦正矢が許容値以下となる様に通り変位原波形を補正することが、必ずしも原波形自体の振幅低減に直結するとは限らないため、その操作がどの程度軌道座屈強度の改善につながり得るのが明らかではなかった。そこで補正前後における軌道座屈強度の確率分布関数をMCSより求めた。その結果、飛び移り座屈強度に関して大幅な向上が認められ、 10m 弦正矢に基づく補正が座屈強度改善に有効であることが確認できた。

謝辞 本研究は科研費(20K04661)の助成を受けたものである。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- (1) U.S. Department of Transportation : Track buckling prevention: theory, safety, concepts, and applications, Chap.4, National Technical Information Service, 2013.
- (2) 阿部和久, 水野雄太, 紅露一寛: 通り変位波形におけるパラッキが軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響, 鉄道工学シンポジウム論文集, No.24, pp.167-174, 2020.
- (3) 鉄道総合技術研究所 編: 鉄道構造物等設計標準・同解説 軌道構造, 11章 ロングレール, 丸善出版, 2012.
- (4) 岩井 翔, 阿部和久, 紅露一寛: 通り変位と道床横抵抗力のパラッキを考慮した軌道座屈余裕度の確率的評価, 鉄道工学シンポジウム論文集, No.25, pp.69-76, 2021.
- (5) 西宮裕騎, 片岡宏夫: 座屈発生点を考慮したロングレールの座屈安定性の評価法に関する一考察, 鉄道工学シンポジウム論文集, No.20, pp.9-15, 2016.
- (6) 江原 学: 正矢を用いた線形修正法(交差法)の評価と実施工での検証, 鉄道工学シンポジウム論文集, No.16, pp.157-164, 2012.
- (7) 宮井 徹: エネルギー法による軌道座屈の数値解析, 鉄道技術研究報告, No.1271, 1984.
- (8) 岩崎英治, 松野純一, 長井正嗣: 弧長法のための一反復解法と弧長自動設定法, 応用力学論文集, Vol.5, pp.207-216, 2002.
- (9) Bowman, A.W. and Azzalini, A. : Applied smoothing techniques for data analysis, The kernel approach with S-plus illustrations, p.31, Oxford Science Publications, 1997.