計算数理工学論文集 Vol. 21 (2021 年 12 月)，論文 No. 05-211218 JASCOME

部分観測による X 線計算機断層撮影法の数値的実現

NUMERICAL COMPUTATION OF X-RAY COMPUTERIZED TOMOGRAPHY FROM PARTIAL MEASUREMENT

藤原　宏志 [1)]，大石　直也 [2)], SADIQ, Kamran[3)], TAMASAN, Alexandru[4)]

Hiroshi FUJIWARA, Naoya OISHI, Kamran SADIQ, and Alexandru TAMASAN

1) 京都大学大学院情報学研究科	(〒 606-8501	京都市左京区吉田本町,	E-mail: fujiwara@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
2) 京都大学大学院医学研究科	(〒 606-8507	京都市左京区聖護院川原町,	E-mail: noishi@kuhp.kyoto-u.ac.jp)
3)Johann Radon Institute (RICAM)	(〒 4040	Linz, Austria,	E-mail: kamran.sadiq@ricam.oeaw.ac.at)
4)University of Central Florida	(〒 32816	Orlando, Florida, USA,	E-mail: tamasan@math.ucf.edu)

The present paper proposes a novel numerical scheme to X-ray Computerized Tomography from partial measurement data. In order to reduce radiation exposure, it is desirable to irradiate X-ray only around region of interest, while the conventional reconstruction methods such as filtered back projection could not work due to its intrinsic limitation of dependency on whole measurement data. The proposed method gives a direct numerical reconstruction employing a Cauchy type boundary integration in A-analytic theory and a singular integral equation which maps boundary measurement to interior data. Numerical examples using experimental data are also exhibited to show validity of the proposed numerical procedure.

Key Words: Inverse Problems, X-ray Computerized Tomography, Partial Measurement, Direct Reconstruction, Boundary Integration, Singular Integral Equations

1. 緒言

本論文では，部分観測からの X 線計算機断層撮影法 (Computerized Tomography; CT) において，近年提案された Radon 逆変換とは独立な直接再構成手法に対する数値計算スキームを提案する．また実測データをもちいた再構成により，その妥当性を示す．

一般的な X 線 CT では，物体の断層面を通過する全ての直線に沿って X 線の投影データ (すなわち，外部から入射され，物体で減衰を受けて出射される X 線の強度) を測定し，断層面全体の X 線の減衰率を得る．その数理的再構成手法としては逆 Radon 変換 (13) に基く Filtered Back Projection (FBP) や Algebraic Reconstruction Techniques (ART) が確立されており (10)，医用および産業用の CT 実機に実装されて，広く利用されている．

一方，X 線の被曝量の低減と検査時間の短縮のため，物体中の関心領域 (Region of Interest; ROI) の近傍を通過する X 線のみの照射が望ましい．この部分的な観測からの再構成として，逆 Radon 変換に基く直接解法や，圧縮センシング理論に基く反復解法が提案されている (12)．

本論文では，部分観測での X 線 CT に対し，A-analytic 理論に基く直接解法の数値計算アルゴリズムを提案する．本手法は，X 線 CT の減衰係数の再構成を，著者らが輸送方程式を対象として近年提案した，境界の一部での観測から非斉次項を再構成する逆問題 (inverse source problem) (7) に帰着させる．この逆問題解法は，逆 Radon 変換とは独立であり，A-analytic 函数 (2) の境界値の特徴付け (14) および Cauchy の積分公式に相当する境界積分 (2, 3) が中心的な役割を果たす．数値計算の視点からは，この境界積分が領域の内部にメッシュを必要とせず，減衰率が各点で独立に計算できるため並列計算に適するという特徴をもつ (9)．さらにこの手法は，回転角度が限定された撮影から断層面を再構成するトモシンセシス (15) と呼ばれる近年登場した X 線撮影技術にも適用可能と考えられる．提案手法では，結果の精度と安定性を同時に制御するパラメータが現れ，その選択が重要となる．しかし対象の構造，観測誤差，もちいる離散スキームや離散化数にも依存し，事前に解析的に最適値を決定することは困難と考えられるため，数値計算等を利用する事後 (a posteriori) 解析による選択基準を提案する．

次節で，部分観測からの X 線 CT を輸送方程式に帰着さ

2021 年 9 月 30 日受付，2021 年 11 月 1 日受理

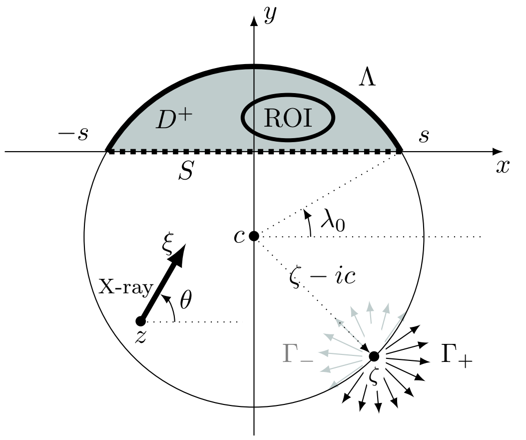

Fig. 1: Introduced coordinate system of $\mathbb{R}^2$ for describing the proposed reconstruction procedure. Region of interest (ROI) is surrounded by arc Λ and chord S. The measurement is performed only on the arc Λ. Note that the length of $\xi \in S^1$ is depicted at reduced scales for clarity.

せて A-analytic 理論を適用する数学解析的手法を述べ，3 節でその数値計算手法を述べる．4 節では実測データをもちいた数値計算例によって提案手法の妥当性を示し，5 節で精度と安定性を制御するパラメータの選択を論じる．

2. 再構成公式

本節では著者らの先行研究 [7] の inverse source problem に基き，X 線 CT の減衰係数の再構成の数学解析的な手順を示す.

対象物体の断層画像を取得する領域 (ROI) を含む断面を D とする．対象物体の外部では X 線の吸収は生じないとし，適当なスケーリングによって D は半径 1 の円の内部として一般性を失わない．提案手法では ∂D の空でない連結部分集合 (弧) Λ からのみ出射される X 線強度を観測し，Λ およびその端点を結ぶ線分 S で囲まれる領域 D^+ における X 線の減衰率 μ を再構成する．ここで $\mu \in C_0^{1,\alpha}(D)$, $\alpha > 1/2$ とし，ROI が D^+ に含まれるように Λ をとる．

線分 S の中点を原点とし，S に沿って x 軸をとる．また，Λ が $\mathbb{R}^2$ の上半平面に位置するように y 軸をとる．線分 S の長さを $2s$ として，D の中心 $(0, c)$ を原点とする極座標における S の端点 $(s, 0)$ の偏角を λ_0 とする．以下では $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位として $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ と $z = x + iy \in \mathbb{C}$ を同一視し，ζ は主として D の境界 ∂D もしくはその一部 Λ の点を表すものとする．また X 線の進む方向 $\xi \in S^1$ を極座標 $\xi = (\cos\theta, \sin\theta)$ によって $\theta \in [0, 2\pi)$ と同一視する (Fig. 1).

入射する強度を一定値 $I_0 > 0$ とし，位置 $z \in \overline{D}$ において $\xi \in S^1$ 方向に進む X 線の強度を $I(z, \xi)$ とするとき，I を入力値 I_0 で正規化した

$$u(z,\xi) = -\log \frac{I(z,\xi)}{I_0}, \quad (z,\xi) \in \overline{D} \times S^1 \tag{1}$$

は次の輸送方程式を満たすことが知られている．

$$\xi \cdot \nabla_z u(z,\xi) = \mu(z), \quad (z,\xi) \in D \times S^1, \tag{2}$$

$$u(\zeta,\xi) = 0, \qquad (\zeta,\xi) \in \Gamma_-. \tag{3}$$

ただし $\nabla_z = (\partial_x, \partial_y)$, $\Gamma_\pm = \{(\zeta,\xi) \in \partial D \times S^1 \,;\, \pm(\zeta - ic)\cdot\xi > 0\}$ である．ここで $D \times S^1$ の集合としての境界は，$\Gamma_0 = \{(\zeta,\xi) \in \partial D \times S^1 \,;\, (\zeta - ic)\cdot\xi = 0\}$ として $\partial D \times S^1 = \Gamma_- \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_0$ (disjoint union) であることに注意する．ただし Γ_0 に沿う X 線の軌跡は D と共通部分をもたない．また Γ_-, Γ_+ はそれぞれ X 線の入射と出射に対応する．Γ_- での境界条件 (3) は入射に対応しており，u は I_0 で正規化しているため 0 となる．一方，X 線 CT における代表的な平行ビーム投影において，観測値 (投影データ) では，D の中心 ic から距離 s で ξ 方向に直進する X 線を考え，I_0 の入射に対する物体からの出射強度を，方向ベクトル $\omega = \xi^\perp \in S^1$ の投影面への正射影として観測した値を Radon 変換 $R\mu(\omega, s)$ として与える．この投影データは出射強度の観測であるため Γ_+ で与えることになり，

$$u(\zeta,\xi) = R\mu(\xi^\perp, (\zeta - ic)\cdot\xi^\perp), \quad (\zeta,\xi) \in \Gamma_+ \tag{4}$$

が成立する．

順問題の設定では，D で μ を既知として，境界値問題 (2),(3) の適切性を論じる．また一般的な X 線 CT は，D を通る全ての直線に沿う投影データを観測するため，∂D 全体での出射，すなわち Γ_+ 全体で (4) の $R\mu$ を与えて (2), (3), (4) を満たす μ を D で求める逆問題となる [2, 3, 9]．一方，本論文では，観測値が Γ_+ 全体ではなく，$\Lambda \subset \partial D$ でのみ与えられる部分観測からの μ の再構成を考える．すなわち μ は D で未知であり，(4) の $R\mu$ は $\zeta \in \Lambda$, $(\zeta - ic)\cdot\xi^\perp > 0$ でのみ既知とし，(2), (3), (4) を満たす μ を (D^+ 上で) 再構成する逆問題を考える．

さて $\partial = (\partial_x - i\partial_y)/2$, $\overline{\partial} = (\partial_x + i\partial_y)/2$ とすると $\xi \cdot \nabla_z = e^{-i\theta}\overline{\partial} + e^{i\theta}\partial$ であり，L^2 で $u\big(z, \xi(\theta)\big) = \sum_m u_m(z) e^{im\theta}$ とすると，(2) は $\{e^{im\theta}\,;\, m \in \mathbb{Z}\}$ の直交性と μ の等方性より

$$\overline{\partial} u_1 + \partial u_{-1} = \mu, \tag{5}$$

$$\overline{\partial} u_{-m} + \partial u_{-m-2} = 0, \quad -m = 0, -1, -2, \ldots \tag{6}$$

となる．ここで区分的に滑らかな閉曲線 $\gamma \subset \overline{D}$ に対し，γ の内部に含まれる点 z に対して，$u_{-1}(z)$ は γ 上での複素積分

$$u_{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u_{-1}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}\right)\left\{\sum_{j=1}^{\infty} u_{-1-2j}(\zeta)\left(\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z}\right)^j\right\} \tag{7}$$

で与えられる[2, 3]．全周 ∂D で観測する場合，(7) で $\gamma=\partial D$ とすると，右辺に現れる $u_{-m}|_{\partial D}$ は (3) および Γ_+ での観測値 (4) から求まり，(5) より D 上での μ が求まる．

しかし本論文で扱う部分観測の場合，$u_{-m}(\zeta)$ は ∂D の一部 Λ 上でしか与えられず，(7) を直接利用することはできない．そこで S が実軸に含まれることから，(6) を満たす $u_{-m}|_S$ が特異積分方程式

$$(I-iH_s)u_{-m}(x)=2p_{-m}(x), \quad |x|<s$$

を満たすことに着目する[7, 14]．ただし p.v. を Cauchy の主値積分として

$$H_s u_{-m}(x)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-s}^{s}\frac{u_{-m}(t)}{x-t}dt, \quad |x|<s$$

および

$$p_{-m}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_\Lambda \frac{u_{-m}(\zeta)}{\zeta-x}d\zeta + \frac{1}{\pi i}\int_\Lambda\left(\frac{d\zeta}{\zeta-x}-\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-x}\right)\left\{\sum_{j=1}^{\infty}u_{-m-2j}(\zeta)\left(\frac{\overline{\zeta}-x}{\zeta-x}\right)^j\right\}$$

である．

ここで作用素 iH_s の $L^2(S)$ 上でのスペクトルは $-1\le\xi\le 1$ であるが[11]，端点での $I-iH_s$ は単射であり[7]，$(I-iH_s)^{-1}$ は自然な定義域で一意に存在することに注意する．そこでこの解 $u_{-m}|_S$ をもちい，$\gamma=\Lambda\cup S$ として (7) をもちいることで $u_{-1}|_{D^+}$ が求まる．さらに u は実数値ゆえ $u_1=\overline{u_{-1}}$ であり，(5) より $z\in D^+$ において

$$\mu=\overline{\partial u_{-1}}+\partial u_{-1}=\mathrm{Re}\{\partial_x u_{-1}\}+\mathrm{Im}\{\partial_y u_{-1}\}$$

によって減衰率 μ が求まる．

3. 提案手法の数値的実現

応用の視点からは，前節で述べた数学解析的な再構成手法の数値的手法が重要となる．そこで本節では，前節の再構成手法を数値的に実現するため，現れる線積分を (複合) 中点則で近似するアルゴリズムを提案する．

離散化にあたり，K, L, N, M をそれぞれ正整数とする．そこで Λ を K 等分して

$$\Delta\lambda=\frac{\pi-2\lambda_0}{K},$$
$$\lambda_k=\lambda_0+\left(k-\frac{1}{2}\right)\Delta\lambda, \quad 1\le k\le K,$$
$$\zeta_k=e^{i\lambda_k}+ic\in\Lambda$$

とする．また S を L 等分して

$$\Delta x=\frac{2s}{L}, \quad x_\ell=-s+\left(\ell-\frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad 1\le\ell\le L$$

とする．X 線の進行方向は

$$\Delta\theta=\frac{2\pi}{N}, \quad \theta_n=n\Delta\theta, \quad \xi_n=(\cos\theta_n,\sin\theta_n)\in S^1$$

で離散化し，各 $\zeta_k\in\Lambda$ で $(\zeta_k-ic)\cdot\xi_n^\perp>0$ の範囲の方向 ξ_n で $R\mu$ が与えられているとする．さらに M をひとつ選んで固定し，m は $-M\le -m\le 0$ を満たす全ての整数，また $-m-2j\ge -M$ を満たす最小の整数 j を $J=J(m)$ で表す．

数値計算の手順としては，まず

$$u(\zeta,\xi)=\begin{cases}0, & (\zeta-ic)\cdot\xi^\perp\le 0;\\ R\mu(\xi^\perp,(\zeta-ic)\cdot\xi^\perp), & (\zeta-ic)\cdot\xi^\perp>0\end{cases}$$

から $\zeta_k\in\Lambda$ における Fourier 係数 $u_{-m}(\zeta_k)$ を次で近似する．

$$U_k^{(-m)}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u(\zeta_k,\xi_n)e^{im\theta_n}, \quad 1\le k\le K.$$

次に，$\Lambda=\{\zeta(\lambda)=e^{i\lambda}+ic\,;\,\lambda_0<\lambda<\pi-\lambda_0\}$ と表すと，p_{-m} の第 2 項の複素積分は

$$\begin{aligned}&\int_\Lambda\left(\frac{d\zeta}{\zeta-x}-\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-x}\right)F(\zeta)\\ &=\int_{\lambda_0}^{\pi-\lambda_0}\left(\frac{ie^{i\lambda}d\lambda}{\zeta(\lambda)-x}-\frac{-ie^{-i\lambda}d\lambda}{\overline{\zeta(\lambda)}-x}\right)F\big(\zeta(\lambda)\big)\\ &=2i\int_{\lambda_0}^{\pi-\lambda_0}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\lambda}}{\zeta(\lambda)-x}\right)F\big(\zeta(\lambda)\big)\,d\lambda\end{aligned}$$

であることに注意して，

$$P_{-m}(z)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{K}\frac{U_k^{(-m)}}{\zeta_k-z}e^{i\lambda_k}\Delta\lambda + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\lambda_k}}{\zeta_k-z}\right)\left\{\sum_{j=1}^{J(-m)}U_k^{(-m-2j)}\left(\frac{\overline{\zeta_k}-\overline{z}}{\zeta_k-z}\right)^j\right\}\Delta\lambda$$

とし，積分方程式を選点法で離散化して，連立一次方程式

$$V_\ell^{(-m)}-\frac{i}{\pi}\sum_{\substack{1\le j<L\\ j\ne\ell}}\frac{\Delta x}{x_\ell-x_j}V_j^{(-m)}=2P_{-m}(x_\ell), \quad 1\le\ell\le L \tag{8}$$

を得る．ここで $V_\ell^{(-m)}$ は S 上での $u_{-m}(x_\ell)$ 相当値であり，数値解析学の立場からは，計算が停止せず数値解が唯一つ求まるために，次が重要である[8]．

定理 1. 任意の正整数 L に対して，連立一次方程式 (8) に現れる係数行列は *(狭義)* 正定値である．特に $\{V_\ell^{(-m)};1\le\ell\le L\}$ は唯一つ存在する．

以上で得られる $\{U_k^{(-m)}\}$ と $\{V_\ell^{(-m)}\}$, $-M\le -m\le 0$ をもちいると

$$U^{(-1)}(z)=P_{-1}(z)+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{V_\ell^{(-1)}}{x_\ell-z}\Delta x + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\ell=1}^{L}\left(\frac{\Delta x}{x_\ell-z}-\frac{\Delta x}{x_\ell-\overline{z}}\right)\left\{\sum_{j=1}^{J(-1)}V_\ell^{(-1-2j)}\left(\frac{x_\ell-\overline{z}}{x_\ell-z}\right)^j\right\}$$

が $z\in D^+$ で求まる．そこで，充分小さい正数 h_1, h_2 を定めて，中心差分近似により

$$\mu(z)\approx\mathrm{Re}\,\frac{U^{(-1)}(z+h_1)-U^{(-1)}(z-h_1)}{2h_1} + \mathrm{Im}\,\frac{U^{(-1)}(z+ih_2)-U^{(-1)}(z-ih_2)}{2h_2}$$

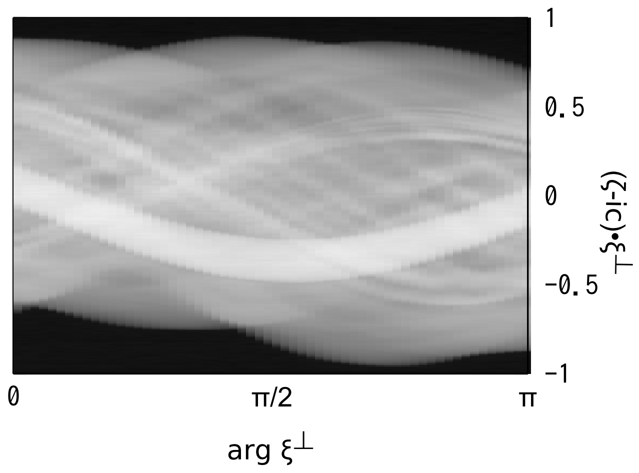

Fig. 2: Measurement data (sinogram) by whole measurement on Γ_+

を得る．

4. 実測値からの再構成例

提案手法の妥当性を示すため，Finnish Inverse Problems Society が公開している実測値のひとつ [1, 4] をもちいた再構成例を示す.

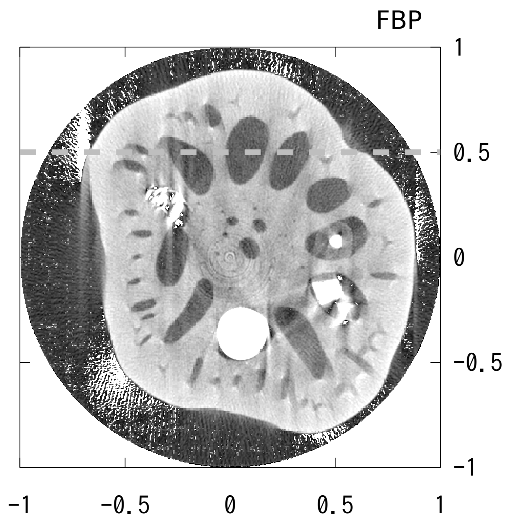

Fig. 3: Reconstructed image by conventional FBP from whole measurement in Fig. 2. The sub domain $y > 0.5$ (above the dotted line) corresponds to ROI in following numerical experiments.

Fig. 2 に，公開されている投影データ (Radon 変換像) の実測値の一部を示す．これは部分観測ではなく全周観測のもので，公開されているデータから物体近傍のみを取り出したものである．横軸は X 線の照射 (進行) 方向に垂直な $\xi^\perp$ の偏角であり，このデータは，方向の区間 $[0, \pi)$ を 180 等分方向して提供されている．また縦軸は，平行に照射した X 線の，D の中心 ic を通過する X 線との距離を表しており，この図の範囲では $[-1, 1]$ 区間を 1887 分割している．

FBP [10, 13] で得られる再構成を Fig. 3 に示す．FBP で典型的な streak アーチファクトを含むものの，D の画像が得られている．

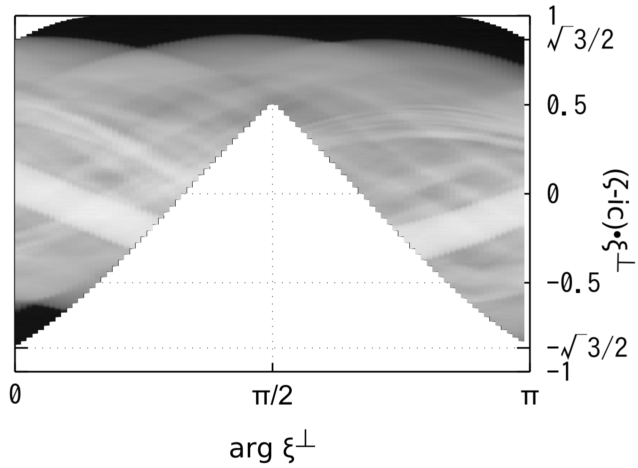

Fig. 4: Sinogram corresponding to partial measurement data on arc $\Lambda = \{\pi/6 < \arg(\zeta - ic) < 5\pi/6\}$.

本節では部分観測をおこなう Λ として $\pi/6 < \arg(\zeta - ic) < 5\pi/6$ の部分を考える．このとき，Fig. 1 のとおり座標軸を設定すると，$c = -0.5$, $\lambda_0 = \pi/6$, $s = \sqrt{3}/2$ となる．部分観測に対応する観測値を Fig. 4 に示す．図示していない部分は，投影データを取得する必要のない部分を示しており，Fig. 2 と比較して，観測回数が有意に減少していることがわかる．例えば $\xi = 0$ (x 軸に平行に X 線を照射) の場合，Fig. 5 の左図に示すとおり，D^+ を通過するのは ic との距離 s が $0.5 < s < 1$ の範囲である．また $\xi = \pi/2$ (y 軸に平行に X 線を照射) の場合，Fig. 5 の右図に示すとおり，D^+ を通過するのは $|s| < \sqrt{3}/2$ の範囲のみとなる．

FBP は，$P_\omega(s) = R\mu(\omega, s)$, $s = (\zeta - ic) \cdot \xi^\perp$ と $|r|$ の逆

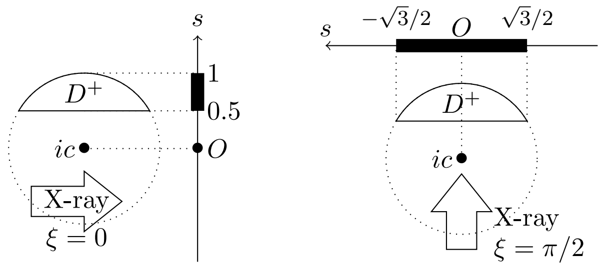

Fig. 5: Parallel beam projection in partial measurement. The axis s is the distance between X-ray and ic. (left) X-ray's direction is $\xi = 0$; (right) X-ray's direction is $\xi = \pi/2$

Fourier 変換の適当な近似 h の合成積によって

$$\mu(z) \approx \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_\omega * h(z\cdot\omega)\, d(\arg\omega)$$

で表されるが，本論文で考える部分観測では $P_\omega(s)$ が s について局所的にのみ与えられるため，任意の $z \in D^+$ で合成積 $P_\omega * h$ が計算されず，μ が求まらない．

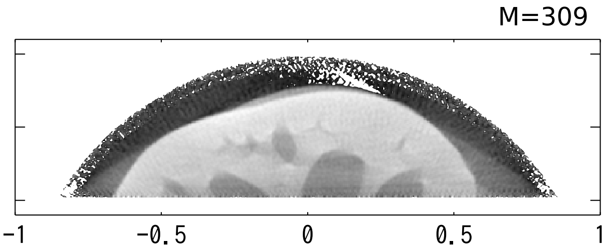

Fig. 6: Reconstructed image in D^+ from partial measurement in Fig. 4 on Λ with $M = 309$.

一方，提案する手法による再構成の結果を Fig. 6 に示す．FBP の再構成 Fig. 3 の $y > 0.5$ の部分と同様の再構成結果が得られており，提案手法の妥当性を示している．ここで Fig. 4 の観測は，Λ を $K = 1977$ 等分することに相当し，$(\Delta\lambda = (2\pi/3)/1977 \approx 2/1887)$，$L$ 上の分点数は $\Delta x \approx \Delta\lambda$ となるよう，$L = 1634$ とした．また $h_1 = h_2 = 1/200$ として，格子点 $D_h^+ = \{z_j = (j_1h_1, j_2h_2) \in D^+ \,;\, j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2\}$ 上で $\mu(z_j)$ を求めた．$M = 309$ とするとき，再構成に要した計算時間は，Xeon E5-2650 v4 (2.2GHz) での計算で約 970 秒であり，本研究の実装で主として計算時間を要したのは $\{P_{-m}(x_\ell)\,;\, -M \le -m \le 0, 1 \le \ell \le L\}$ の計算に約 688 秒，$\{U^{(-1)}(z_j)\,;\, z_j \in D_h^+\}$ の計算に約 271 秒であった．また $\{P_{-m}(x_\ell)\}$, $\{U^{(-1)}(z_j)\}$ は x_ℓ, z_j の点ごとに求める自明な並列化が可能であり，この場合， OpenMP による 24 スレッドでの並列計算では約 157 秒であった．そのうち $\{P_{-m}(x_\ell)\}$, $\{U^{(-1)}(z_j)\}$ の時間はそれぞれ約 62 秒，約 92 秒であり，提案手法は並列計算に適することがわかる．

5. 打ち切りパラメータ M の選択への注意

提案する数値計算手法では，u_{-1} および p_{-m} に現れる級数を打ち切るために，現れる Fourier モード (周波数) を制限する整数 M を導入した．全周観測の場合には，この M は正則化パラメータに相当する [5]．本節ではその選択について，幾つかの注意を与える．

本論文では，u の Fourier 係数のひとつである u_0 に注目する．この u_0 は提案する再構成手法では現れないが，X 線の強度が正値であることから (1) で定めた u は実数値であり，したがって

$$u_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\bigl(z, \xi(\theta)\bigr)\, d\theta$$

も実数値であることに注意する．さらに式 (7) と同様に

$$u_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda\cup S}\frac{u_0(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda\cup S}\left(\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}}\right)\left\{\sum_{j=1}^{\infty} u_{-2j}(\zeta)\left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z}\right)^j\right\}$$

が成立し，前節の離散化アルゴリズムに対応する近似値として

$$U^{(0)}(z) = P_0(z) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{V_\ell^{(0)}}{x_\ell - z}\Delta x$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\ell=1}^{L}\left(\frac{\Delta x}{x_\ell - z} - \frac{\Delta x}{x_\ell - \bar{z}}\right)\left\{\sum_{j=1}^{M/2} V_\ell^{(-2j)}\left(\frac{x_\ell - \bar{z}}{x_\ell - z}\right)^j\right\}$$

が考えられる．

上述のとおり $u_0 \in \mathbb{R}$ であるが，この近似値 $U^{(0)}$ は実数値とは限らない．そこで，虚部 $\mathrm{Im}\, U^{(0)}$ が誤差に対応すると考え，$\mathrm{Im}\, U^{(0)}$ を最小とする M が打ち切りパラメータの候補と考える [6]．

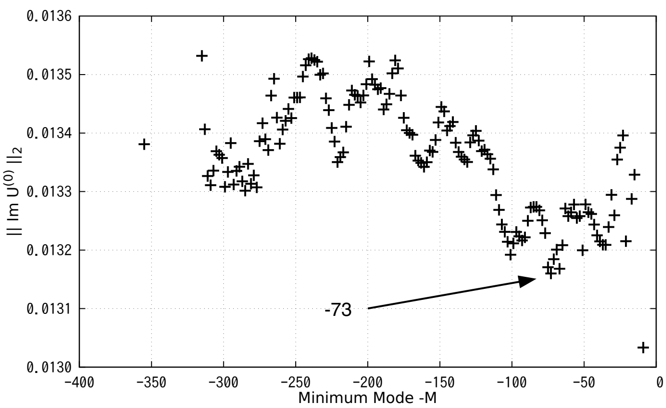

Fig. 7: L^2 norm of the imaginary part of u_0

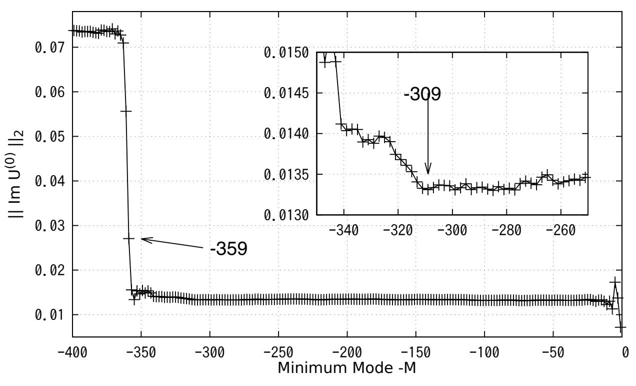

Fig. 8: L^2 norm of the imaginary part of u_0 in wider ranges

Fig. 7 および 8 に M と $\left\|\mathrm{Im}\, U^{(0)}\right\|_2$ の値を示す．Fig. 7 より，M がある程度大きな範囲 (例えば $M > 10$) で $\left\|\mathrm{Im}\, U^{(0)}\right\|_2$ が最小となるのは $M = 73$ であった．一方で Fig. 7 の縦軸

に示す $\left\|\operatorname{Im} U^{(0)}\right\|_2$ の範囲の幅は 6×10^{-4} であり，数値計算で用いたパラメータに比して極めて小さいことに注意する．実際，縦軸の範囲を変えると Fig. 8 を得るが，この場合，$M = 73$ や $M = 309$ 付近での $\operatorname{Im} U^{(0)}$ の変化に比して $M = 359$ 付近で $\left\|\operatorname{Im} U^{(0)}\right\|_2$ が有意に増大していることがわかる．多くの Fourier モードを利用するほど細部の構造が再現されることを期待すると，極小値を与える $M = 309$ および急激な増大前の $M = 357$ も，再構成にもちいるパラメータの候補である．

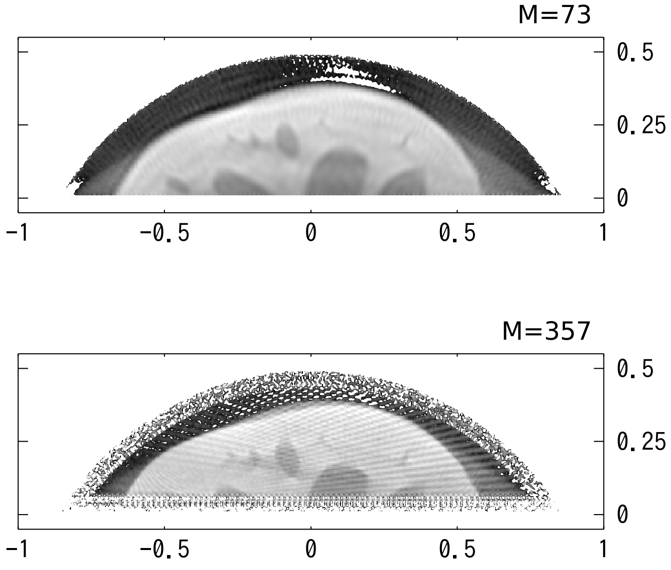

Fig. 9: Image reconstruction by proposed method from partial measurement in Fig. 4 (top) $M = 73$ achieving the minimum; (bottom) $M = 357$ including artifacts

これら $M = 73$, 357 による再構成結果を Fig. 9 に示す．$M = 309$ とした Fig. 6 と同様，$M = 73$ では良好な再構成が得られる．一方，$\left\|\operatorname{Im} U^{(0)}\right\|_2$ の増大の直前の $M = 357$ では画像全体にアーチファクトが現れており，この観測データおよび分割数においては，より小さな M を選択すべきであることを示唆している．すなわち，$\left\|\operatorname{Im} U^{(0)}\right\|_2$ の微小な変化も重要であることがわかる．

再構成の差を定量的に調べるため，$M = 73$, 309, 357 における再構成と，FBP による再構成の差の相対値を，

$$\operatorname{Diff}^{(M)}(z_{ij}) = \left| \frac{\mu^{(M)}(z_{ij}) - \mu^{(\mathrm{FBP})}(z_{ij})}{\mu^{(\mathrm{FBP})}(z_{ij})} \right|, \quad z_{ij} \in D_h^+ \qquad (9)$$

で定義する．ただし $\mu^{(M)}(z_{ij})$, $\mu^{(\mathrm{FBP})}(z_{ij})$ はそれぞれ打ち切りパラメータ M の提案手法と (全周観測の) FBP で得られる z_{ij} での再構成値とする．前節の再構成例において，$\operatorname{Diff}^{(M)}(z_{ij})$ を横軸に，その値をとった格子点数を縦軸にとったものを Fig. 10 に示す．この結果より，FBP の結果を基準としたときの提案手法の誤差は，$M = 73$, 309 の場合で同様の傾向であり，多くの点で 20% 以下となっている．また D_h^+ に含まれる格子点の個数は 24725 個であり，(9) の値が 100 を越えた格子点数は，$M = 73, 309, 357$ の場合にそれぞれ 7326 個 (30%)，7956 個 (32%)，11090 個 (45%) であった．このことから $M = 357$ での再構成は FBP との差が大きいことが定量的にもわかる．さらに $M = 309$ の場合に (9) の値が 100 以上となった点を Fig. 11 に示す．これより，(9) の差が大きくなるのは対象の「外部」($\mu = 0$) に相当していることもわかり，物体「内部」における断層画像は FBP と提案手法で充分に一致していることも定量的にわかる．

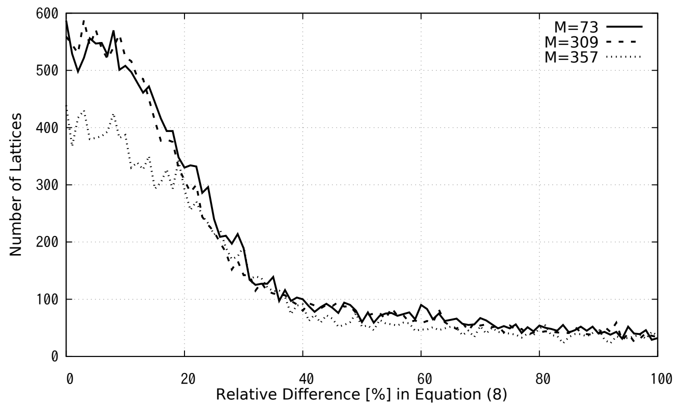

Fig. 10: Number of lattices taking relative differences defined in (9). The number of total lattices is 24725 in D_h^+, and numbers of lattices taking relative differences over 100 are 7326, 2956, and 11090 for $M = 73$, $M = 309$, and $M = 357$ respectively.

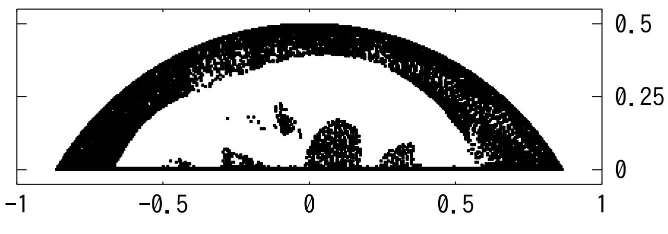

Fig. 11: Region where relative differences (9) is greater than 100 for $M = 309$.

なお Fig. 7 および Fig. 8 で示した $\left\|\operatorname{Im} U^{(0)}\right\|_2$ の挙動や，それをもとに論じた M の具体的な値は，一般に，再構成する領域によって異なることに注意する．

6. 結言

本論文では，X 線計算機断層撮影において，A-analytic 理論にもとづく境界積分の手法により，部分観測から再構成画像を取得する数値計算アルゴリズムを提案した．また実測値からの部分的な再構成をおこない，その妥当性を示した．提案手法には正則化パラメータの役割を果たすパラメータ M も現れるが，結果の精度と安定性を両立させるための選択についての基準を論じた．提案する再構成手法は各点ごとの再構成を与えることから，本論文で論じた「領域 D^+ において単一の最適な M」という条件での選択基準は目安に留め，実用化においては，例えば ∂D^+ の近傍では Cauchy 核の数値積分による精度の劣化も考慮し，部分領域ごとに局所的に M を選択するなど，多様な検討が必要と考えられる．

謝辞　本研究の一部は JSPS 科研費 JP20H01821, 21K07593, Austrian Science Fund (FWF) P31053-N32, および NSF grant DMS-1907097 の助成を受けたものです.

参考文献

(1) T. A. Bubba, et al.: *Tomographic X-ray Data of a Lotus Root Filled with Attenuation Objects*, arXiv:1609.07299v2 [physics.data-an] (2016)

(2) A. L. Bukhgeim : *Inversion Formulas in Inverse Problems*, Linear Operators and Ill-Posed Problems by M. M. Lavrentiev and L. Ya. Savalev, (1995), Plenum, New York, pp. 323–378.

(3) D. V. Finch : *The Attenuated X-ray Transform: Recent Developments*, in Inside Out: Inverse Problems and Applications, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **47** (2003), Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 47–66.

(4) Finnish Inverse Problems Society : *Open X-ray Tomographic Datasets*, `https://www.fips.fi/dataset.php` または DOI : 10.5281/zenodo.1254204

(5) 藤原宏志，大石直也：境界積分による X 線計算機断層撮影法の正則化， 計算数理工学論文集， **20**(2020) pp. 75–79.

(6) H. Fujiwara, K. Sadiq, and A. Tamasan : *Numerical Reconstruction of Radiative Sources in an Absorbing and Non-diffusing Scattering Medium in Two Dimensions*, SIAM J. Imagin Sci., **13** (2020), pp.535–555.

(7) H. Fujiwara, K. Sadiq, and A. Tamasan : *Partial Inversion of the 2D Attenuated X-ray Transform with Data on an Arc*, Inverse Probl. Imaging, (2021), DOI : 10.3934/ipi.2021047

(8) H. Fujiwara, K. Sadiq, and A. Tamasan : *Numerical Source Reconstruction from Partial Measurement in an Absorbing and Planar Scattering Medium*, (in preparation).

(9) 藤原宏志，A. Tamasan： Cauchy 型積分によるメッシュレス X 線計算機断層撮影法, 計算数理工学論文集, **19**(2019) pp. 1–6.

(10) A. C. Kak and M. Slaney : *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, (1988), IEEE Press, New York.

(11) W. Koppelman and J. D. Pincus : *Spectral Representation for Finite Hilbert Transforms*, Math. Z., **71** (1959), pp. 399-407.

(12) 工藤博幸: インテリア CT における画像再構成, Med. Imag. Tech., **34** (2016), pp. 186–197.

(13) J. Radon : *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Kl., **69** (1917), pp. 262–277.
(English translation : *On the Determination of Functions from Their Integral Values Along Certain Manifolds*, in IEEE Trans. Med. Imaging, **MI-5**(1986), pp. 170–176.)

(14) K. Sadiq and A. Tamasan : *On the Range of the Attenuated Radon Transform in Strictly Convex Sets*, Trans. Amer. Math. Soc., **367** (2015), pp. 5375–5398.

(15) 塩見剛：トモシンセシスの原理と応用, 医用画像情報学会雑誌, **24** (2007), pp. 22–27.