計算数理工学論文集 Vol. 21 (2021 年 12 月)，論文 No. 03-211218 JASCOME

密度型トポロジー最適化における密度更新パラメータに関する考察

CONSIDERATION ON NUMERICAL PARAMETERS IN DENSITY UPDATE EQUATION USED IN THE DENSITY-BASED TOPOLOGY OPTIMIZATION

岸田 真幸 [1)]，倉橋 貴彦 [2)]

Masayuki KISHIDA and Takahiko KURAHAHSHI

1) 長岡技術科学大学大学院工学研究科 (〒 940-2188 長岡市上富岡町 1603-1, E-mail: s173029@stn.nagaokaut.ac.jp)
2) 長岡技術科学大学大学院工学研究科 (〒 940-2188 長岡市上富岡町 1603-1, E-mail: kurahashi@mech.nagaokaut.ac.jp)

In this paper, the importance of density update in density-based topology optimization is described. In density-based topology optimization, the optimality criteria method is generally employed. However, this method has arbitrary parameters, which are the weighting factor and the move-limit. These parameters are difficult for engineers to understand because they are parameters employed in numerical calculations. Thus, we performed the topology optimization analysis using a modified optimality criteria method where the weighting factor is not required. The need for update parameters, which are the weighting factor and move-limit, is demonstrated through numerical simulation for several example problems.

Key Words: Topology Optimization, Optimality Criteria Method, Weighting Factor

1. はじめに

近年，3D プリンタにより製造の自由度が増し，複雑な構造でも製造することが可能になってきた．それに伴い，モノづくりの分野においても材料コスト削減や性能向上のために，トポロジー最適化 [(1)] が注目されている．本研究で扱う密度法に基づくトポロジー最適化は，構造最適化の中の 1 つであり，特定の設計空間を分割し，分割された要素内に無次元密度（以降，密度と略す.）を設け，密度の値によりその要素に材料が必要か否かを数値解析により求めることで，構造の形態を得る最適化手法である．一方で，未だにトポロジー最適化の技術は実際のモノづくりに適用することに対して，いくつか課題がある．その中の 1 つに最適化解析を行う際のパラメータ設定がある．このパラメータ設定は，材料定数などの物理的な意味を持つパラメータではなく，数値計算をする上で必要なパラメータのことである．このパラメータを任意設定ではなく，数値計算により導出することで，トポロジー最適化を使用する設計者の負担を減らし最適な結果を提供することが重要であると考える．

本研究で扱う密度法に基づくトポロジー最適化においても，いくつか設定すべきパラメータが存在する．本論文では，その中でも更新に関するパラメータであるダンピングパラメータとムーブリミットに関して注目している．ダンピングパラメータは最適性基準法 [(2, 3)](Optimality Criteria method，以降，OC 法と略す．) における更新の速度に関するパラメータであり，ムーブリミットは反復計算ごとで更新される密度の更新範囲を表すパラメータである．従来法の OC 法ではダンピングパラメータを一定とするが，著者らは近年，ダンピングパラメータを反復計算ごとで算出する修正最適性基準法 [(4)](Modified Optimality Criteria method，以降，修正 OC 法と略す．) における密度更新式を提案した．

本論文では，ダンピングパラメータを反復計算ごとで算出する修正 OC 法と，ダンピングパラメータを定数として与える OC 法についてそれぞれ数値実験を行い，修正 OC 法の性能を評価する．また，数値解析例として，定常問題における構造を対象としたひずみエネルギー最小化を対象とする．本論文では，2 節にトポロジー最適化の理論を，3 節にトポロジー最適化の流れを，4 節に数値解析例を示す．

2. トポロジー最適化の理論

本節では，2 次元定常問題における構造を対象とした密度法に基づくトポロジー最適化に関して説明する．また本論文では，平面ひずみ問題を想定している．

2.1. 最適化問題と定式化

本論文では，設計領域 Ω 内の体積が目標体積を満たすように，ひずみエネルギーが最小となる最適な密度分布を求めることを目的としている [(5)]．式 (1) に評価関数であるひずみエネルギーを，式（2）に線形弾性体における離散化され

2021 年 9 月 28 日受付，2021 年 10 月 30 日受理

た支配方程式をそれぞれ示す．加えて，式 (3) に体積制約を，式 (4) に密度制約を示し，制約式として用いる．本論文では，密度法により最適な材料分布を表している．設計変数である密度 ρ_e が 1 の時は材料あり（材料）を表しており，0 の時は材料なし（空洞）を表している．また，その他の値は，グレースケールと呼ばれる中間材料を表している．以上より，最適化問題は次のように定式化される．

$$\text{minimize} \quad J = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{u(\rho_e)\}^T [K(\rho_e)] \{u(\rho_e)\} d\Omega \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad [K(\rho_e)] \{u(\rho_e)\} = \{f\} \tag{2}$$

$$V = \int_{\Omega} \frac{v_e \rho_e}{V_{\text{total}}} d\Omega - \overline{\rho_0} \leq 0 \tag{3}$$

$$0 \leq \rho_e \leq 1 \tag{4}$$

ここで，$[K]$，$\{u\}$，$\{f\}$ は，剛性マトリックス，変位ベクトル，荷重ベクトルをそれぞれ表す．また，v_e，V_{total}，$\overline{\rho_e}$ は，要素 e の面積，設計領域 Ω 内の総面積，設計領域 Ω 内の初期密度の平均をそれぞれ表す．上付き添え字 T は転置である．本論文では，密度法 [6, 7] の中でも一般的な手法である SIMP 法 [8] を用いており，要素に設計変数である密度を与えている．式 (5) に SIMP 法における材料表現の方法を示す．

$$E_e = E_0 {\rho_e}^p \tag{5}$$

ここで，E_0，p はある材料のヤング率，ペナルティパラメータをそれぞれ表す．しかし，式 (5) では数値的不安定性があるため，それを回避するために以下の式を用いる．

$$E_e = (E_0 - E_{\min}) {\rho_e}^p + E_{\min} \tag{6}$$

ここで，$E_{\min}$ は式 (2) に示した支配方程式を解く際に剛性マトリックス $[K]$ のランクが異なることで生じる数値的不安定を回避するためのパラメータであり，E_0 と比べ極めて小さな値である．最小化問題を解くために，ラグランジュ未定乗数法を用いる．評価関数である式 (1) と支配方程式である式 (2) より，ラグランジュ関数 J^* は以下の式で求まる．

$$\begin{aligned} J^* &= J + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\lambda\} ([K]\{u\} - \{f\}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} J_e^* d\Omega \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，$\{\lambda\}$ はラグランジュ未定乗数である．また，J_e^* は要素 e におけるラグランジュ関数を表す．式 7 の第一変分を取ることで，$\{\lambda\} = -\{u\}$ という関係が計算により得られる．この関係のことを自己随伴と呼ぶ．この自己随伴を用い，密度 ρ_e に対するラグランジュ関数 J^* の勾配である感度は次のように求まる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^*}{\partial \rho_e} &= \frac{1}{2} \{\lambda\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho_e} \{u\} \\ &= -\frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho_e} \{u\} \end{aligned} \tag{8}$$

最適化問題は感度により設計変数を更新するが，密度を要素に与えた場合のトポロジー最適化ではチェッカーボードと呼ばれる市松模様の分布を避ける必要がある．そのため，本研究では Borrval が提案した感度にフィルターを課す方法 [9] を用いる．ここで，式 (3) に示す体積制約を考慮するために，拡張ラグランジュ関数を式 (9) に示す．

$$L = \overline{J^*} + \Lambda V \tag{9}$$

ここで，$\overline{J^*}$，Λ はフィルタリングされたラグランジュ関数 J^*，拡張ラグランジュ未定乗数をそれぞれ表す．また，密度 ρ_e に対する拡張ラグランジュ関数 L を式 (10) に示す．

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \overline{J^*}}{\partial \rho_e} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e} \tag{10}$$

式 (10) に示した密度 ρ_e に対する拡張ラグランジュ関数 L の勾配を用いて，設計変数を更新するために，式 (11) に示す OC 法を適用する．

$$\begin{aligned} \rho_e^{(k+1)} &= \rho_e^{(k)} \left(\frac{\frac{\partial \overline{J_e^*}}{\partial \rho_e}^{(k)}}{-\Lambda^{(k)} \frac{\partial V}{\partial \rho_e}^{(k)}} \right)^{\eta} \\ &= \rho_e^{(k)} \left(A^{(k)} \right)^{\eta} \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，η はダンピングパラメータを表す．拡張ラグランジュ未定乗数 Λ は，更新後の密度 $\rho_e^{(k+1)}$ が体積制約を満たすように，二分法を用いて算出される．また，上付き添え字 (k) は反復回数である．式 (11) より，密度 ρ_e に対するフィルタリングされたラグランジュ関数 $\overline{J_e^*}$ の勾配は常に負となり，ラグランジュ未定乗数 Λ および密度 ρ_e に対する体積制約 V の勾配は正になり，括弧内の A は常に正になることが分かる．しかし，式 (11) で示した OC 法により更新を行う場合，評価関数が単調に減少しない可能性がある．それにより，材料分布が最適な分布とはいえない分布結果が得られる可能性がある．そのため，更新に対しても式 (12) に示す制約を設ける．

$$\rho_e^{(k+1)} = \begin{cases} \rho_e^{L(k)} & \left(\rho_e^{(k)} \left(A^{(k)}\right)^{\eta} \leq \rho_e^{L(k)}\right) \\ \rho_e^{U(k)} & \left(\rho_e^{(k)} \left(A^{(k)}\right)^{\eta} \geq \rho_e^{U(k)}\right) \\ \rho_e^{(k)} \left(A^{(k)}\right)^{\eta} & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{12}$$

ρ_e^L および ρ_e^U は式 (13) および (14) で表される．

$$\rho_e^{L(k)} = \max\left\{\rho_e^{(k)} - \varsigma, 0\right\} \tag{13}$$

$$\rho_e^{U(k)} = \min\left\{\rho_e^{(k)} + \varsigma, 1\right\} \tag{14}$$

ここで，ς はムーブリミットである．式 (13) および (14) に示す通り，仮にムーブリミット ς を 1 以上に設定した場合でも，式 (4) に示す制約を満たすような式となっている．

2.2. 修正 OC 法における密度更新の誘導

式 (11) に示した密度更新式は，密度法に基づくトポロジー最適化において一般的に用いられるが，ダンピングパラメータ η のような任意パラメータを設定する必要がある．しかし，ダンピングパラメータ η の設定は論文によりパラメータが異なり，OC 法が提案された論文内にも数値実験によって決定されるパラメータといった記載がされている．そこで，本項では，著者らが提案した適切なダンピングパラメータ η

を反復計算ごとで算出する修正 OC 法について説明する．まず，式 (11) に対して両辺に対数を取ると次式のようになる．

$$\ln \rho_e^{(k+1)} = \ln \rho_e^{(k)} + \eta \ln A^{(k)} \tag{15}$$

上式の右辺第 2 項が 0 になった際に密度 ρ_e が収束したことになるが，η は 0 ではないため最終的に $\ln A$ が 0 に収束することになる．このことから，$\ln A$ に対して Taylor 展開を適用する．

$$\ln A^{(k+1)} = \ln A^{(k)} + \Delta\rho_e \frac{\partial}{\partial \rho_e}\left(\ln A^{(k)}\right) + o\left(\Delta{\rho_e}^2\right) \tag{16}$$

ここで，$\Delta\rho_e$ は式 (17) に示すとおりである．

$$\Delta\rho_e = \ln \rho_e^{(k+1)} - \ln \rho_e^{(k)} \tag{17}$$

式 (16) 中の o は高次の項であり無視すると，次式が得られる．

$$\Delta\rho_e = \left(-\frac{\partial}{\partial \rho_e}\left(\ln A^{(k)}\right)\right)^{-1} \ln A^{(k)} \tag{18}$$

式 (17) に示した更新式に対して上式で求めた $\Delta\rho_e$ を代入する．

$$\begin{aligned} \ln \rho_e^{(k+1)} &= \ln \rho_e^{(k)} + \Delta\rho_e \\ &= \ln \rho_e^{(k)} + \left(-\frac{\partial}{\partial \rho_e}\left(\ln A^{(k)}\right)\right)^{-1} \ln A^{(k)} \end{aligned} \tag{19}$$

式 (19) は，Newton 法の式と似ていることが確認できる．加えて，式 (8) に示した感度と，後述する密度 ρ_e に対する感度の勾配の符号によっては解くことが困難な最適化問題もあることに注意しなければならない．次に，式 (19) を真数に戻すと次のようになる．

$$\rho_e^{(k+1)} = \rho_e^{(k)} \left(A^{(k)}\right)^{\left(-\frac{\partial}{\partial \rho_e}\left(\ln A^{(k)}\right)\right)^{-1}} \tag{20}$$

ここで，式 (20) の指数が，式 (11) に示した OC 法のダンピングパラメータ η に相当することが分かる．式 (3) に示した体積制約を用いる場合，式 (20) の指数は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\partial}{\partial \rho_e}(\ln A)\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{-\frac{\partial^2 J_e^*}{\partial {\rho_e}^2}\Lambda\frac{\partial V}{\partial \rho_e} + \frac{\partial J_e^*}{\partial \rho_e}\frac{\partial}{\partial \rho_e}\left(-\Lambda\frac{\partial V}{\partial \rho_e}\right)}{\left(-\Lambda\frac{\partial V}{\partial \rho_e}\right)^2}\left(\frac{\frac{\partial J_e^*}{\partial \rho_e}}{-\Lambda\frac{\partial V}{\partial \rho_e}}\right)^{-1}\right)^{-1} \\ &= -\left(\frac{\partial^2 \overline{J_e^*}}{\partial {\rho_e}^2}\right)^{-1}\frac{\partial \overline{J_e^*}}{\partial \rho_e} \end{aligned} \tag{21}$$

ただし，式 (21) はすべて k ステップ目を表している．式 (5) に示した SIMP 法より，2 階微分は以下のように簡単に表すことができる．ここに，変位ベクトル $\{u\}$ は密度 ρ_e の関数とし，定式化する．

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{J_e^*}}{\partial {\rho_e}^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho_e}\left(-\frac{1}{2}\{\overline{u}\}^T\boxed{K}\{\overline{u}\}\right) \\ &= -\frac{\partial\{\overline{u}\}^T}{\partial \rho_e}\frac{\partial \boxed{K}}{\partial \rho_e}\{\overline{u}\} - \frac{1}{2}\{u\}^T\frac{\partial^2 \boxed{K}}{\partial {\rho_e}^2}\{\overline{u}\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \rho_e}\left(\{\overline{f}\}^T\boxed{K}^{-1}\right)\frac{\partial \boxed{K}}{\partial \rho_e}\{\overline{u}\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\{\overline{u}\}^T\frac{\partial^2 \boxed{K}}{\partial {\rho_e}^2}\{\overline{u}\} \\ &= -\{\overline{f}\}^T\frac{\partial \boxed{K}^{-1}}{\partial \rho_e}\frac{\partial \boxed{K}}{\partial \rho_e}\{\overline{u}\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\{\overline{u}\}^T\frac{\partial^2 \boxed{K}}{\partial {\rho_e}^2}\{\overline{u}\} \\ &= -\frac{\partial \overline{E_e}^{-1}}{\partial \rho_e}\frac{\partial \overline{E_e}}{\partial \rho_e}\{\overline{f}\}^T\boxed{K_s}^{-1}\boxed{K_s}\{\overline{u}\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{E_e}}{\partial {\rho_e}^2}\{\overline{u}\}^T\boxed{K_s}\{\overline{u}\} \\ &= p^2{\rho_e}^{-2}\{\overline{f}\}^T\{\overline{u}\} \\ &\quad -\frac{1}{2}p(p-1){\rho_e}^{-2}\{\overline{u}\}^T\boxed{K}\{\overline{u}\} \\ &= 2p^2{\rho_e}^{-2}\overline{J_e} - p(p-1){\rho_e}^{-2}\overline{J_e} \\ &= (p+1)p{\rho_e}^{-2}\overline{J_e} \end{aligned} \tag{22}$$

ここで，$\boxed{K_s}$ はヤング率を除いた剛性マトリックスである．この考え方を用いることで 1 階微分も同様に簡単に表すことができ，ダンピングパラメータに相当する式 (21) は次式のようになる．

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial}{\partial \rho_e}\left(\ln A^{(k)}\right)\right)^{-1} &= -\frac{-p{\rho_e^{(k)}}^{-1}\overline{J_e}^{(k)}}{(p+1)p{\rho_e^{(k)}}^{-2}\overline{J_e}^{(k)}} \\ &= \frac{\rho_e^{(k)}}{p+1} \end{aligned} \tag{23}$$

以上より，式 (23) を代入することで，式 (20) で示した修正 OC 法を次式のように表せる．

$$\rho_e^{(k+1)} = \rho_e^{(k)}\left(A^{(k)}\right)^{\frac{\rho_e^{(k)}}{p+1}} \tag{24}$$

3. トポロジー最適化の流れ

本節では，密度法に基づくトポロジー最適化の計算の流れについて説明する．

Step 1: 解析モデルや解析条件の入力を行う．

Step 2: 式 (2) に示した線形弾性体における支配方程式を解き，変位ベクトル $\{u\}$ を算出する．

Step 3: Step 2 で求めた変位ベクトル $\{u\}$ を用いて，式 (1) に示したひずみエネルギーである評価関数を計算する．

Step 4: $k > 0$ の時，収束判定式 $\left|J^{(k+1)} - J^{(k)}\right| / J^{(0)} < \varepsilon$ を満たした場合，計算を終了し，満たさない場合は次のステップへ進む．

Step 5: 式 (8) に示された感度を計算する．

Step 6: Step 5 で求めた感度に対して，フィルタリングを施す．

Step 7: 更新式を用いて密度を更新し，Step 2 に戻る．

本解析では，OC 法と修正 OC 法を比べるため，上記のの Step 7 の更新式を変更する．また，解析条件によっては収束しない問題もあることから，最大反復回数 k_{max} を設けており，反復回数を上限を超えた場合には計算を終了する．

4. 数値解析例

本節では，次の 2 つについて数値解析結果を含め述べていく．1 つ目に，従来法である OC 法の結果を基に，前述した修正 OC 法を用いた場合でも正しく解が求まるかの確認を行う．2 つ目に，ムーブリミットを大きく設定し，更新に対して制約がない条件でのダンピングパラメータ η の設定の重要性について述べる．解析例題として，一般的なモデルである片持ちはりモデルと単純支持はりの対称モデルを解析モデルとする．

4.1. 解析条件

本項では，トポロジー最適化解析を行う対象モデルとパラメータ設定について説明する．解析モデルとなる片持ちはりモデルおよび単純支持はりの対称モデルを Figs. 1 および 2 に示す．また，解析条件は Table 1 に示される．一様に与えられる初期密度の平均値は，Fig. 1 に示す片持ちはりモデルでは 0.5 と設定し，Fig. 2 に示す単純支持はりの対象モデルでは 0.3 と設定している．Fig. 1 に示す片持ちはりモデルの荷重は Y 軸座標 18 [mm] から 24 [mm] の範囲に 90 [N] を与えている．一方，Fig. 2 に示す単純支持はりの対象モデルの荷重は座標 (0,40) の位置に 10 [N] を与えている．どちらのモデルもメッシュは 1 辺が 1 [mm] の正方形メッシュとしている．更新手法，ダンピングパラメータ η，ムーブリミット ς に関しては，表 2 に示すように解析によって変更しているため，各項ごとで詳しく説明する．

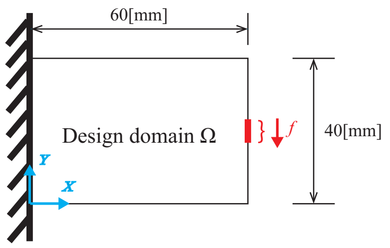


Fig. 1: Cantilever beam model.

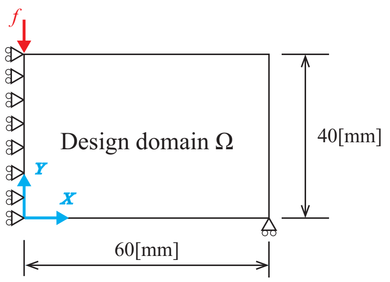


Fig. 2: Symmetrical model of simple supported beam.

Table 1: Calculation conditions for topology optimziation based on the density method.

Number of elements	2400
Number of nodes	2501
Initial density average, $\overline{\rho_0}$	$0.5, 0.3$
Penalization parameter, p	3.0
Filter radius for sensitivity filter	1.5
Convergence criterion, ε	1.0×10^{-4}
Maximum number of iterations, k_{max}	200
Young's modulus, E_0 [Pa]	1.0×10^{6}
Poisson ratio, ν	0.3

Table 2: Conditions for numerical example.

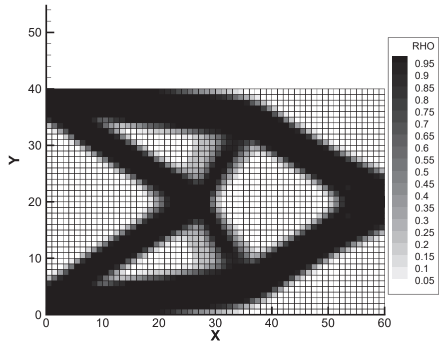
Case No.	Update method	η	ς
Case 1	OC method	0.75	0.005
Case 2	Modified OC method	–	0.005
Case 3	OC method	0.75	1.00
Case 4	Modified OC method	–	1.00
Case 5	OC method	0.25	1.00
Case 6	OC method	0.125	1.00

4.2. OC 法および修正 OC 法の適用

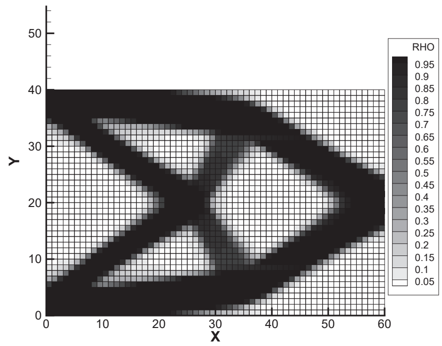
本項では，OC 法と修正 OC 法の結果を比較し，結果に違いがあるかを確認する．すなわち，Table 2 に示す Case 1 と Case 2 の結果を比較する．まず，解析に用いるパラメータ設定について説明する．修正 OC 法にはダンピングパラメータ η の設定は必要ないが，OC 法には設定する必要がある．そのため，文献 [10] を参考にダンピングパラメータ η は 0.75 と設定し，ムーブリミット ς は解の探索が正しく行えるように 0.005 とする．まず，Fig. 1 に示す片持ちはりモデルのトポロジー最適化の結果について述べていく．Fig. 3a に OC 法を用いた場合である Case 1 の収束時の密度分布を，Fig. 3b に修正 OC 法を用いた場合である Case 2 の収束時の密度分布をそれぞれ示す．また，Fig. 4 に Case 1 および Case 2 の評価関数の履歴を示す．Fig. 3a と Fig. 3b を比べても，大きな違いは見られない密度分布となっており，Fig. 4 に示す通り，評価関数のグラフの軌跡も大きな違いが見られない．

次に，Fig. 2 に示す単純支持はりモデルのトポロジー最適化の結果について述べていく．Fig. 5a に OC 法を用いた場合である Case 1 の収束時の密度分布を，Fig. 5b に修正 OC 法を用いた場合である Case 2 の収束時の密度分布をそ

れぞれ示す．また，Fig. 6 に Case 1 および Case 2 の評価関数の履歴を示す．片持ちはりモデルの評価関数の結果と同様に，Fig. 6 に示した単純支持はりモデルの場合の評価関数も軌跡に大きな違いが見られなかった．一方で，Fig. 5a に示した Case 1 での収束時の密度分布と Fig. 5b に示した Case 2 での収束時の密度分布を比べると，異なる材料分布になっている．以上のことから，手法もしくはパラメータ設定により得られる収束時の密度分布が異なることが確認できる．次項では，更新制約を除いた場合の最適化問題について述べていく．



(a) Case 1.



(b) Case 2.

Fig. 3: Density distribution at convergence for cantilever beam model (when movelimit $\varsigma = 0.005$).

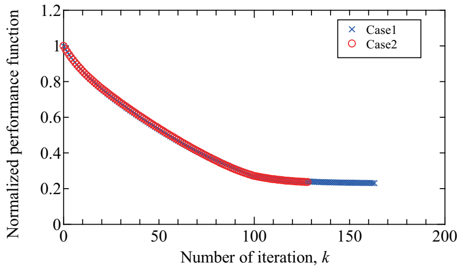
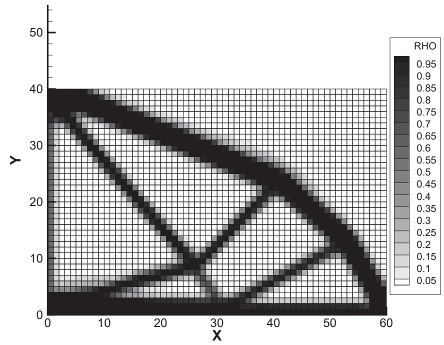
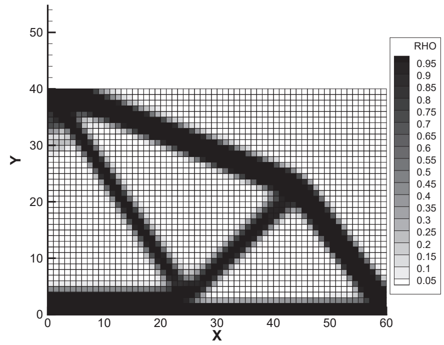


Fig. 4: History of normalized performance functions for cantilever beam model in Cases 1 and 2.



(a) Case 1.



(b) Case 2.

Fig. 5: Density distribution at convergence for symmetrical model of simple supported beam (when movelimit $\varsigma = 0.005$).

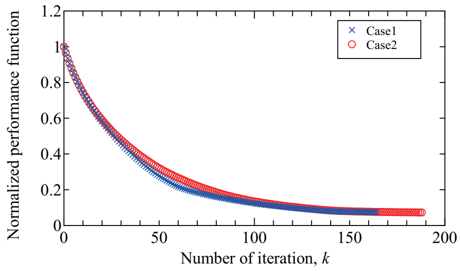


Fig. 6: History of normalized performance functions for symmetrical model of simple supported beam in Cases 1 and 2.

4.3. ムーブリミット ς による更新制約を除いたトポロジー最適化

次に，式 (12) に示したムーブリミット ς による更新制約を除いた場合のトポロジー最適化解析について，Fig. 1 に示した片持ちはりモデルと Fig. 2 に示した単純支持はりモデルの両方を用いて検討を行う．本論文では，ムーブリミット ς を 1 以上に設定することで，式 (12) に示した更新制約を設けない問題と同じになる．そのため，ムーブリミット ς を 1.00 とする．また，OC 法のパラメータであるダンピングパラメータ η は，前項と同様に 0.75（Case 3），式 (23) より

密度 ρ_e が 1.0 の時の値である 0.25（Case 5），式 (23) より密度 ρ_e が 0.5 の時の値である 0.125（Case 6）の 3 つの条件を解析する．加えて，ムーブリミット ς を 1.00 とした際の修正 OC 法を用いた条件（Case 4）も解析する．始めに，Fig. 1 に示した片持ちはりモデルのトポロジー最適化の結果について述べていく．Figs. 9a〜9d に Cases 3〜6 における収束時の密度分布をそれぞれ示し，Fig. 7 に Case3 における評価関数の履歴を，Fig. 8 に Cases 4〜6 における評価関数の履歴をそれぞれ示す．まず，Case 3 の解析結果について述べる．Case 3 は従来のトポロジー最適化において悪い条件設定であることから，Fig. 9a に示す密度分布は荷重点と固定端が明確に繋がっておらず最適な分布でないことが分かる．また，Fig. 7 に示す評価関数の履歴も同様に発散傾向にあることが分かる．一方，修正 OC 法を用いた際の収束時の密度分布である Fig. 9b は，前項で述べた Figs. 3a および 3b と似た密度分布が得られていることが確認できる．修正 OC 法における更新速度を表すパラメータである式 (23) は，ペナルティパラメータ p が 3 と設定していることから，0〜0.25 の範囲となる．そのため，ダンピングパラメータ η が 0.75 と設定している Fig. 9a や Fig. 7 に示すように評価関数が発散するような密度分布は得られなかった．そこで，ダンピングパラメータ η を通常より小さく設定した Case 5 と Case 6 の密度分布を確認する．Fig. 9c に Case 5 における収束時の密度分布を，Fig. 9d に Case 6 における収束時の密度分布をそれぞれ示す．Fig. 9c と Fig. 9d の密度分布は似た分布となっているが，前項で述べた Fig. 3a や Fig. 3b とは若干異なる密度分布となった．Cases 1，2，4 では中央から 4 方向に密度が分布しているが，Cases 5，6 では中央から 6 方向に密度が分布している．評価関数は，Fig. 7 に示した Case 3 を除き，Fig. 4 と Fig. 8 に示したどの条件においても，極小値に収束していることが確認できる．次に，Fig. 2 に示した単純支持はりモデルのトポロジー最適化の結果について述べていく．Figs. 10a〜10d に Cases 3〜6 における収束時の密度分布をそれぞれ示し，Fig. 11 に Case3 における評価関数の履歴を，Fig. 12 に Cases 4〜6 における評価関数の履歴をそれぞれ示す．まず，Case 3 の結果について述べる．Case 3 における収束時の密度分布である Fig. 10a は，前項で述べた Cases 1 および 2 の結果である Figs. 5a および 5b と比べ，トラス構造が少なく，はりの上部に 2 つの空洞が確認できる．また，Fig. 11 より，評価関数は単調な減少傾向ではなく，最初の方の反復回数にて評価関数が振動していることが確認できる．次に Cases 4〜6 の結果について述べていく．Fig. 10b〜10d より，Cases 4〜6 における収束時の密度分布はほぼ同じような結果が得られた．加えて，Fig. 12 に示した評価関数の履歴も極小値に収束していることが確認できる．しかし，Fig. 10b よりも，Figs. 10c および 10d の方がはり上部の空洞が若干大きく見える．また，OC 法を適用した際に得られた Figs. 5a，10a，10c および 10d は，異なる密度分布が得られていることが分かり，パラメータ設定により得られる密度分布が変わってしまうことが今回の数値実験で証明された．一方で，修正 OC 法を適用した際に得られた Figs. 5b および 10b は，OC 法を適用した際の結果と比べ大きな違いは見られなかった．

以上のことから，修正 OC 法はダンピングパラメータ η やムーブリミット ς といった密度更新に関するパラメータを必要とせず，ある程度同じ密度分布が得られることが確認できた．また，密度更新に関する制約を除いた場合において，OC 法を使用したとしても，ある程度適切なパラメータを設定することで得られる密度分布は異なるが，1 つの解となる結果が得られることが確認できた．また，異なる結果でもある程度同じひずみエネルギーになっていることから，ひずみエネルギーを最小化とするトポロジー最適化解析により最適解が得られているのではないかと推測できる．一方で，異なる結果を得られていることから，いくつかの局所的最適解が得られたことを意味する．1 節でも述べたように設計者の立場を考えると，数値計算に必要なパラメータによって結果が異なることはなるべく避けるべきであると考える．結果より，安易にダンピングパラメータ η やムーブリミット ς を小さく設定してよいとは言えないことが本結果から分かる．そのため，本研究で誘導した修正 OC 法による密度更新式は設計者に依存しない適切な更新式であると言える．

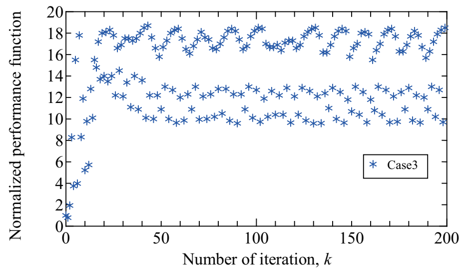


Fig. 7: History of normalized performance function for cantilever beam model in Case 3.

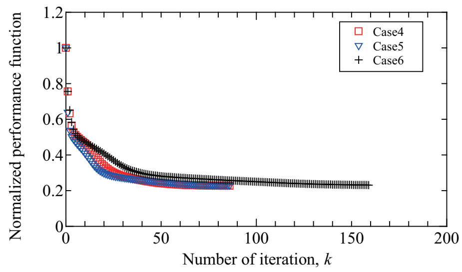
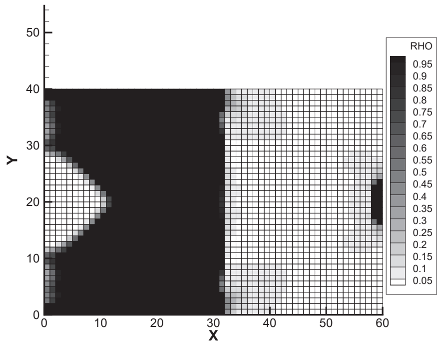
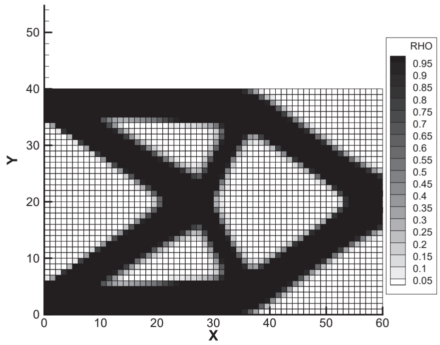


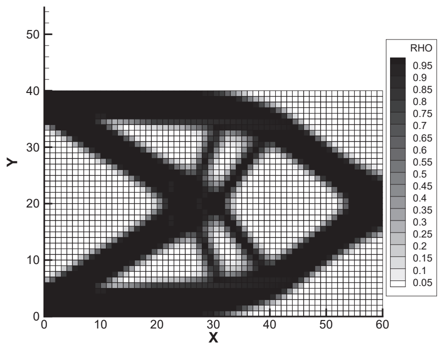
Fig. 8: History of normalized performance functions for cantilever beam model in Cases 4 to 6.



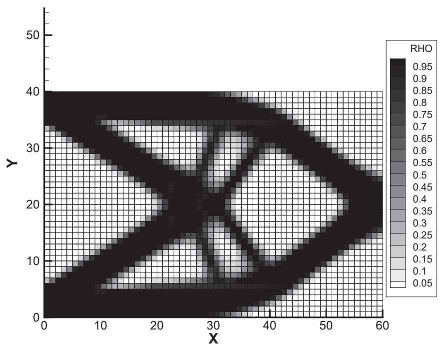
(a) Case 3.



(b) Case 4.

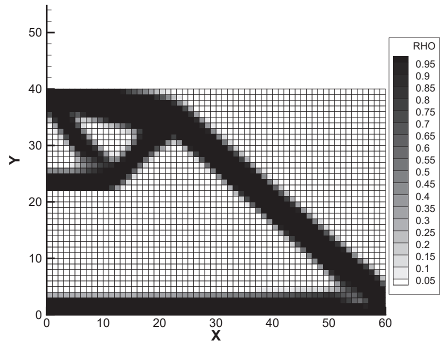


(c) Case 5.

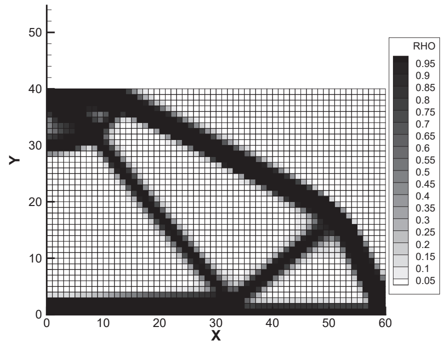


(d) Case 6.

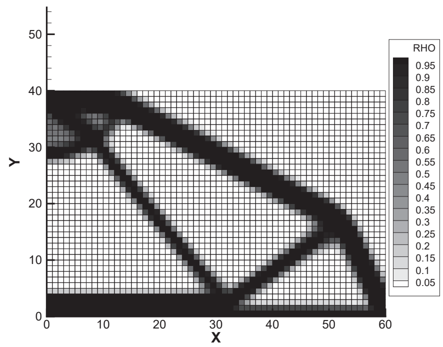
Fig. 9: Density distribution at convergence for cantilever beam model (when movelimit $\varsigma = 1.00$).



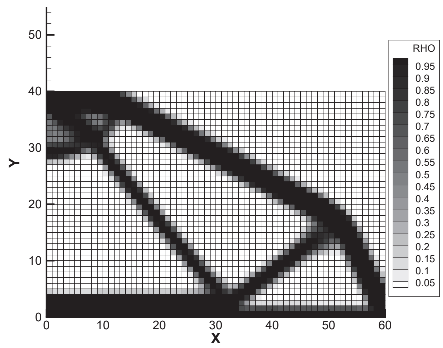
(a) Case 3.



(b) Case 4.



(c) Case 5.



(d) Case 6.

Fig. 10: Density distribution at convergence for symmetrical model of simple supported beam (when movelimit $\varsigma = 1.00$).

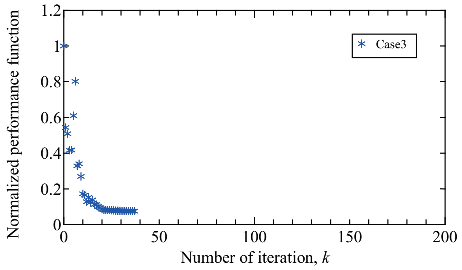


Fig. 11: History of normalized performance function for symmetrical model of simple supported beam in Case 3.

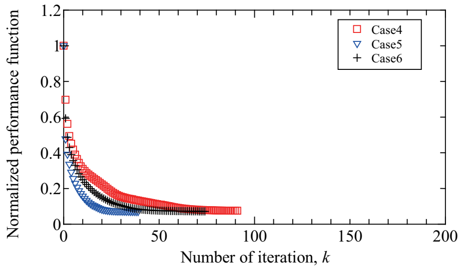


Fig. 12: History of normalized performance functions for symmetrical model of simple supported beam in Cases 4 to 6.

5. まとめ

本論文では，2 次元弾性体を対象に密度法に基づくトポロジー最適化における密度更新式の更新パラメータに関して考察を行った．モデルは一般的な片持ちはりモデルと単純支持はりの対称モデルの 2 つとした．評価関数にはひずみエネルギーを用いており，ひずみエネルギーが最小化となる密度分布を求めた．フィルタリング手法には感度にフィルターを課す方法を用いており，密度の更新式には従来法である OC 法と修正 OC 法をそれぞれ用いた．OC 法では更新パラメータであるダンピングパラメータ η を解析ごとに設定する必要があるが，修正 OC 法ではそれを設定する必要がない．まず始めの例題で，ムーブリミット ς と呼ばれる更新制約に関するパラメータを小さく設定した場合で，どちらの手法も正しく探索できることを確認した．片持ちはりの場合は同じよう暗密度分布が得られたが，単純支持はりの場合は異なる密度分布が得られた．次の例題では，ムーブリミット ς を大きくし，更新に関する制約を無くした場合のトポロジー最適化を行った．前の例題で用いたダンピングパラメータ η（Case 3）に加え，小さくしたダンピングパラメータ η（Cases 5，6）と，修正 OC 法を用いた場合（Case 4）の 4 つを対象とした．結果として，どちらのモデルも Cases 4〜6 は評価関数がほぼ同じ値に収束した．しかし，OC 法ではダンピングパラメータ η やムーブリミット ς の値によって収束時の密度分布が異なることが確認できた．一方で，修正 OC 法では明確な違いが見られず，ダンピングパラメータ η やムーブリミット ς の値の設定が必要ないことが確認できた．設計者の立場を考えると，トポロジー最適化における任意パラメータの設定が不要で，同じ結果が出る修正 OC 法の方がよいと言える．本論文では，定常問題におけるひずみエネルギー最小化を最適化問題を対象としたが，本論文中で用いた修正 OC 法の適用が困難な問題もある．そのため，別問題への検討と修正 OC 法の改良が今後の課題である．

なお，本研究を行うにあたり，科学研究費補助金（基盤 (C)）18K03897 の援助およびオイレス工業株式会社の助成金を受けた．また，本論文中に示した数値計算を行うにあたり，九州大学情報基盤研究開発センターのスーパーコンピュータシステム ITO を利用させて頂いた．ここに謝意を表す．

付録 A

式 (5) に示した SIMP 法における材料表現の方法の式中に含まれるペナルティパラメータ p は，Hashin-Shtrikman の境界条件 [11] より p の設定範囲が決められる．式 (25) は，2 次元の場合の Hashin-Shtrikman の境界条件より得られる条件式である．

$$p \geq \max\left\{\frac{2}{1-\nu}, \frac{4}{1+\nu}\right\} \tag{25}$$

しかし，式 (25) はペナルティパラメータ p の範囲であり，実在する材料との対応を厳密に評価しているわけではない．また，一般的にペナルティパラメータ p を低く設定した場合にはグレースケールと呼ばれる中間材料を表す分布が存在し，密度分布が不明瞭になる問題が知られている．式 (24) に示すように，本論文中で説明した修正 OC 法の式中にも更新パラメータとして含まれている．ここでは，グレースケールに関して注目するため，ペナルティパラメータ p を低く設定する場合のトポロジー最適化結果について述べていく．

解析条件として，4 節で述べた条件である Case 1，Case 4，Case 5 に加え，Case 7（ダンピングパラメータ $\eta = 0.75$，ムーブリミット $\varsigma = 0.15$）の 4 つを用いる．また，ペナルティパラメータ p は 2.0 とする．Figs. 15 および 16 に，片持ちはりモデルおよび単純支持はりモデルを対象とした 4 つの条件下でのトポロジー最適化解析を行った際の収束時の密度分布をそれぞれ示し，Figs. 13 および 14 に付録で検討したトポロジー最適化解析の評価関数の履歴を示す．ただし，Figs. 15 および 16 はグレースケールが見えやすいようにメッシュの線を非表示にしている．まず，片持ちはりモデルの結果から述べていく．Figs. 15a〜15d に示した収束時の密度分布より，Cases 5 および 7 にグレースケールがあることが確認できる．Cases 5 および 7 の結果である Figs. 15c および 15d は，4 節で述べた Figs. 9c および 9d に似た結果であり，Figs. 9c および 9d よりもグレースケールが見られる．これは，付録の冒頭で述べたグレースケールの増加傾向と同じであることが確認できた．一方で，Fig. 15b に示した修正 OC 法を用いた場合の Case 4 の結果は，ペナルティパラメータ p を変更した場合においても，4 節で述べた Fig. 9b と同じ結果に

なった．評価関数は，Fig. 13 より，すべての条件で極小値に収束していることが確認できる．次に，単純支持はりモデルの結果について述べていく．Figs. 16a および 16d に示した収束時の密度分布より，どの条件でも多少のグレースケールが見られたが，特に Case 1 ではグレースケールが多く見られる．加えて，Case 1 である Fig. 16a は 4 節で述べた収束時の密度分布の結果である Fig. 5a と同じとなった．また，Cases 4，5，7 である Figs. 16b，16c，16d とは異なる密度分布が得られていることが分かる．評価関数は，Fig. 14 より，片持ちはりモデルの結果と同様に，すべての条件で極小値に収束していることが確認できる．以上のことから，従来の OC 法を用いた場合（Cases 1，5，7）では，パラメータ設定によってグレースケールを抑制できる可能性があることを確認できたが，モデルによって傾向が変わってしまうことが結果より言える．一方で，修正 OC 法を用いた場合（Case 4）では，ペナルティパラメータ p を変えた場合でも，OC 法よりグレースケールが抑制できることが確認できた．しかし，完全に抑制できるわけではないので，ある程度適切なペナルティパラメータ p を設定する必要があると言える．

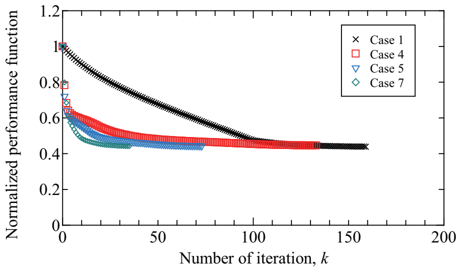


Fig. 13: History of normalized performance functions for cantilever beam model in Cases 1, 4, 5, and 7 (when penalization parameter $p = 2.0$).

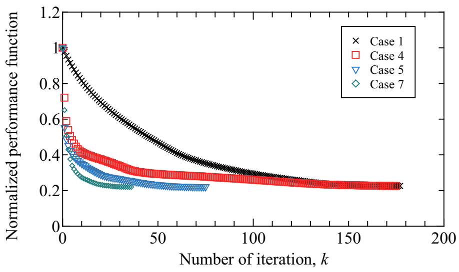
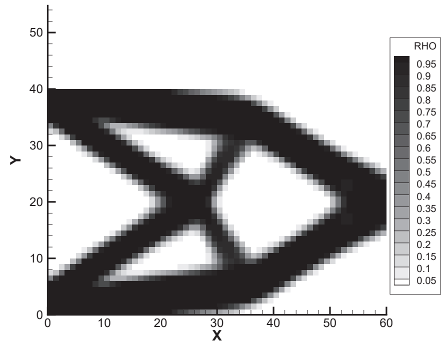
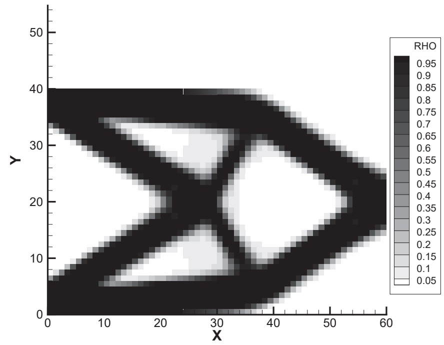


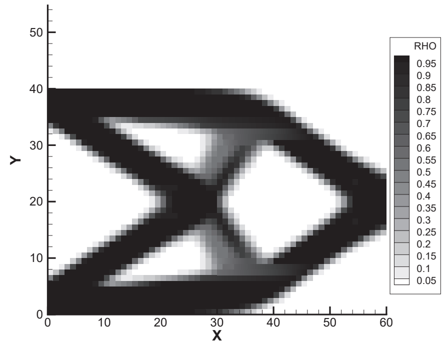
Fig. 14: History of normalized performance functions for symmetrical model of simple supported beam in Cases 1, 4, 5, and 7 (when penalization parameter $p = 2.0$).



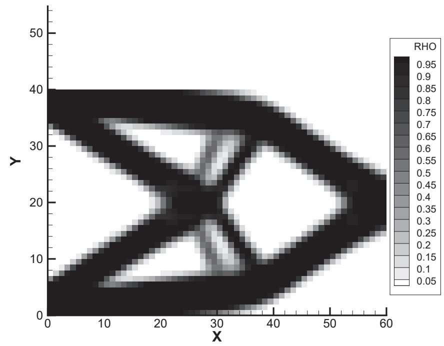
(a) Case 1.



(b) Case 4.

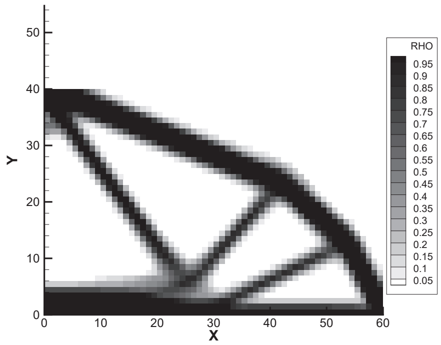


(c) Case 5.

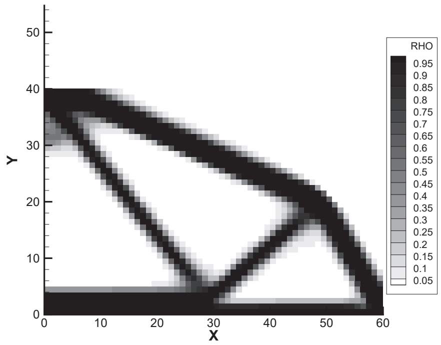


(d) Case 7.

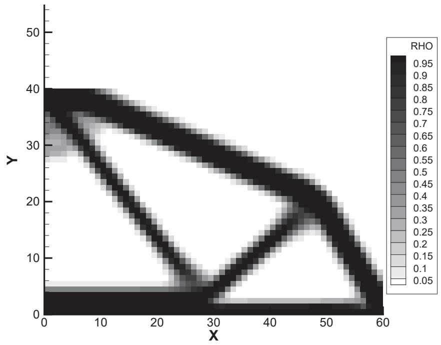
Fig. 15: Density distribution at convergence for cantilever beam model (when penalization parameter $p = 2.0$).



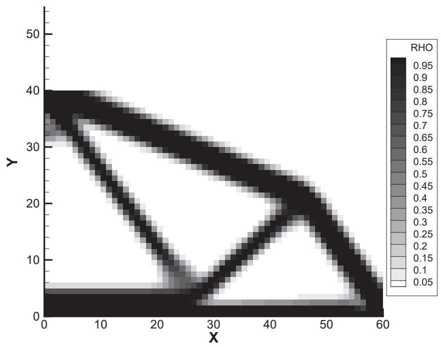
(a) Case 1.



(b) Case 4.



(c) Case 5.



(d) Case 7.

Fig. 16: Density distribution at convergence for symmetrical model of simple supported beam (when penalization parameter $p = 2.0$).

参考文献

(1) M.P.Bendsøe, O.Sigmund：Topology Optimization Theory, Methods and Applications, (2003), Springer.

(2) M.P.Bendsøe, N.Kikuchi：Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **71**(1988), pp. 891–909.

(3) K.Suzuki, N.Kikuchi：A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **93(3)**(1991), pp. 291–318.

(4) M.Kishida, T.Kurahashi：Proposal of Optimality Criteria Method Considering the Newton's Method in Topology Optimization Problems Based on the Density Method, Computational Science and AI in Industry, CT07-Innovations in AI and Computational Sciences, Industrial application cases, June 9th 2021.

(5) O.Sigmund, K.Maute： Topology optimization approaches, Structural and Multidisciplinary Optimization, **48**(2013), pp. 1031–1055.

(6) R.Yang, C.Chuang： Optimal topology design using linear programming, Computers & Structures, **52(2)**(1994), pp. 265–275.

(7) H.Mlejmek, R.Schirrmacher：An engineer's approach to optimal material distribution and shape finding, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **106(1)**(1993), pp. 1–26.

(8) M.P.Bendsøe, O.Sigmund： Material interpolation schemes in topology optimization, Achive of Applied Mechanics, **69(9)**(1999), pp. 635–654.

(9) T.Borrvall：Topology optimization of elastic continua using restriction, Achives of Computational Methods in Engineering, **8(4)**(2001), pp. 351–385.

(10) 西脇眞二，泉井一浩，菊池昇：計算力学レクチャーコース　トポロジー最適化，(2013)，丸善出版.

(11) Z.Hashin, S.Shtrikman： A variational approach to the theory of elastic behaviour of multiphase materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **11**(1963), pp. 127–140.