計算数理工学論文集 Vol. 21 (2021 年 12 月), 論文 No. 02-211218 JASCOME

2次元純面外異方性・粘弾性波動問題における演算子積分時間領域境界要素法

Convolution quadrature time-domain boundary element method for 2-D pure antiplane anisotropic viscoelastodynamics

竹田　晴彦 [1)]，斎藤　隆泰 [2)], 古川　陽 [3)]，廣瀬　壮一 [4)]

Haruhiko TAKEDA, Takahiro SAITOH, Akira FURUKAWA and Sohichi HIROSE

1) 群馬大学大学院理工学府環境創生部門　修士課程 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail:t160c056@gunma-u.ac.jp)
1) 群馬大学大学院理工学府環境創生部門　准教授 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail:t-saitoh@gunma-u.ac.jp)
2) 北海道大学工学研究院土木工学部門　准教授 (〒 060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目, E-mail:afurukawa@eng.hokudai.ac.jp)
3) 東京工業大学環境・社会理工学院土木工学系　教授 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:shirose@cv.titech.ac.jp)

This paper presents a convolution quadrature time-domain boundary element method (CQBEM) for 2-D pure antiplane anisotropic viscoelastodynamics. The standard linear viscoelastic model and the fundamental solution obtained by Wang and Achenbach are considered for the expression of viscoelastic and anisotropic properties, respectively. A brief description of the proposed CQBEM formulation is discussed. Elastic wave scattering by a cavity in anisotropic viscoelastic solids is demonstrated using the proposed CQBEM. The anisotropic and viscoelastic effects are confirmed from the numerical results to validate the proposed CQBEM.

Key Words: Time-domain BEM, General anisotropic elastodynamics, viscoelastodynamics, Convolution quadrature method (CQM), 2-D pure antiplane wave.

1. はじめに

境界要素法は，これまで工学の様々な波動問題に適用されてきた [(1)]．しかしながら，境界要素法の時間領域解法は，数値解の安定性にやや問題があることから，周波数領域に比べ比較的その応用がなされずに来たことで知られる [(2)]．そのような中，演算子積分時間領域境界要素法 (CQBEM: Convolution Quadrature Boundary Element Method)[(3)(4)] が提案された．CQBEM は，Lubich の演算子積分法 (CQM: Convolution Quadrature Method)[(5)] を時間領域境界要素法における畳込み積分の離散化に用いた手法であり，従来の時間領域境界要素法に比べ，数値解を安定に求めることができる利点を持つ．また，波動が分散性を有する問題にも有効である．そのため，例えば粘弾性波動問題や，飽和多孔質弾性波動問題等のような分散性波動問題 [(6)(7)(8)] に適用されてきた．分散性波動問題では，波速は周波数に依存する．そのため，時間領域では，波速を閉じた形で表現できない．波速と同様に，時間領域基本解も閉じた形で求めることができないが，CQBEM では，時間領域基本解を必要とせず，ラプラス変換領域基本解を用いる．ラプラス変換領域では，周波数領域と同様に，分散性波動問題に対して閉じた基本解を求めることができるため，CQBEM の使用がそのような波動問題に有効となる．また，時間領域基本解が複雑で，ラプラス変換領域基本解の方が扱いやすい問題に対しても CQBEM は適用されている．例えば，異方性弾性波動問題がそれに当たる．異方性の性質に依存しない，すなわち特定の弾性定数に対してではなく，等方性を含めて様々な弾性定数に対して適用可能な一般の異方性弾性波動問題では，周波数領域，時間領域いずれにおいても閉じた形の基本解を求めることはできない．しかしながら，CQBEM を用いれば，解の安定性を向上させるだけでなく，数値解の導出も比較的容易となる．そのため，異方性弾性波動問題に対する CQBEM も，2 次元純面外波動問題 [(9)] や純面内，3 次元問題に対して適用例 [(10)(11)] がある．しかしながら，異方性かつ粘弾性体の性質を示す波動問題に対する CQBEM の適用例は，著者らの知る限り例はない．近年では，オステナイト系鋼材や炭素繊維強化プラスチック (CFRP: Carbon Fiber Reinforced Plastic) のように，異方性かつ粘弾性の性質を有する材料の産業界への応用も進んでいる．よって，異方性･粘弾性波動問題に対する CQBEM を開発することは，意義があると考えられる．

そこで，本論文では，異方性・粘弾性波動問題に対する

2021 年 9 月 23 日受付，2021 年 11 月 15 日受理

CQBEM を開発する．ただし，本論文では，異方性・粘弾性を考慮する最初の試みであることを考え，異方性の性質を一般の純面外波動問題に限定する．以下では，解くべき問題や異方性・粘弾性波動問題に対する CQBEM の定式化を説明した後，簡単な数値解析例を示すことで，本手法の有効性等について検討する．

2. 解くべき問題

以下では，x_1–x_2 面内を伝搬する純面外波動について考える．特に断りのない限り，ローマ字で表示される添え字は 1 および 2 をとり，総和規約を適用する．この時, 解くべき問題は，Fig. 1 に示すような観測点 $\boldsymbol{x}$，時間 t に対する異方性・粘弾性体中の空洞 D による入射波 $u_3^{\rm in}(\boldsymbol{x},t)$ の散乱問題である．

さて, 物体力を無視し, 面外方向の変位を $u_3(\boldsymbol{x},t)$ と表記し，簡単のため, 異方性と粘弾性を独立に考慮する. すなわち, 粘弾性における粘性の性質は, 等方に与えると仮定すれば，解くべき問題は, それぞれ次の運動方程式および構成式で与えられる．

$$\sigma_{3j,j}(\boldsymbol{x},t)=\rho\ddot{u}_3(\boldsymbol{x},t) \qquad \text{(運動方程式)} \qquad (1)$$

$$\sigma_{3j}(\boldsymbol{x},t)=C_{3j3l}(t)*\dot{u}_{3,l}(\boldsymbol{x},t) \qquad \text{(構成式)} \qquad (2)$$

ここで $\sigma_{3j}(\boldsymbol{x},t)$ は応力, $\dot{(\ )}$, $(\ )_{,i}$ は, それぞれ時間および空間に関する微分 $\partial/\partial t_i, \partial/\partial x_i$ を表す. $C_{3j3l}(t)$ は異方性・粘弾性波動問題における時間領域の緩和弾性定数であり, $*$ は時間に関する畳込み積分を表す. この畳込み積分が，粘性の性質を表わすことに対応することとなる．また, 以降の定式化においては, 面外方向変位 $u_3(\boldsymbol{x},t)$ を, 単に $u(\boldsymbol{x},t)$ と表記することに注意されたい.

論文冒頭でも述べたように，本問題は分散性を考慮しなければならない問題である. そのため，対象とする問題の時間領域基本解を閉じた形で求めることはできない．しかしながら，もし当該の 2 次元時間領域純面外問題における異方性・粘弾性波動問題の基本解を求めることができるならば，この問題の時間領域境界積分方程式は次のように与えられる．

$$\alpha u(\boldsymbol{x},t)=u^{\rm in}(\boldsymbol{x},t)-\int_S W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*u(\boldsymbol{y},t)dS(\boldsymbol{y}) \qquad (3)$$

ここで，α は境界に依存する自由項 [1]，$W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ は二重層核である．なお，境界条件として，空洞の境界 S において表面力フリーを仮定していることに注意する．以下では，CQBEM を用いて式 (3) を解くことについて考える．

3. 純面外波動問題における異方性・粘弾性 CQBEM

3.1. CQM

まず，CQM について後の説明で必要となる程度に簡単にまとめておく．CQM の詳細や CQBEM の定式化の詳細については，文献 [5][10] 等を参照されたい．

一般的に，畳込み積分は次のように表される．

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad t\geq 0 \qquad (4)$$

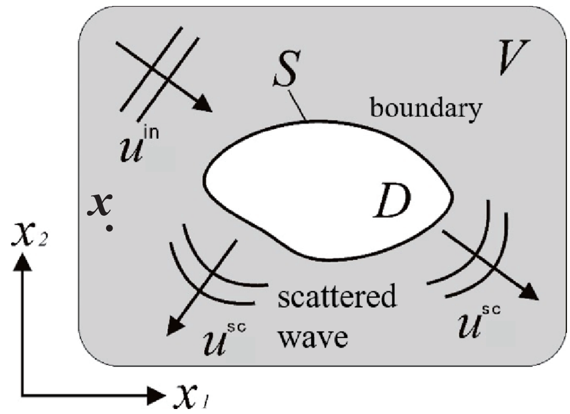

Fig. 1 Elastic wave scattering by a traction free cavity in an anisotropic viscoelastic solid.

CQM を用いれば，式 (4) は，時間増分 Δt を用いて N_t ステップに分割することで，次のように近似できる．

$$f(n\Delta t)*g(n\Delta t)\simeq\sum_{j=0}^{n}\omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t),\ (n=0,1,\dots,N_t) \qquad (5)$$

ただし, $\omega_j(\Delta t)$ は CQM における重み関数であり，積分核 $f(t)$ のラプラス変換 $\hat{f}(s)$ により次のように表される．

$$\omega_n(\triangle t)\simeq\frac{\mathcal{R}^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\hat{f}\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right){\rm e}^{\frac{-2\pi{\rm i}nl}{L}} \qquad (6)$$

ここで i は虚数単位，s はラプラスパラメータ，$\delta(\zeta_l)$ は線形マルチステップ法（差分法）における生成多項式の商 [5]，引数 ζ_l や $\mathcal{R}$，L は CQM のパラメータである．なお $\mathcal{R}$ は目標とする精度 ϵ によって決定されるパラメータであり，

$$\mathcal{R}=\epsilon^{1/(2L)} \qquad (7)$$

により決定する．以下では式 (4)-(6) を式 (3) に用いた CQBEM により，数値解を構成する方法について述べる．

3.2. CQM を用いた離散化

式 (3) において $\boldsymbol{x}\in S$ とし，時間に関しては CQM を，空間に関しては選点法を用いた離散化を施す．空間に関する形状関数を区分一定の関数で与えると，第 n ステップにおける離散化された時間領域境界積分方程式は，次式で表現できる．

$$\frac{1}{2}u_M^{(n)}=u_M^{{\rm in}(n)}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{N=1}^{N_e}\left[B_{MN}^{(n-k)}u_N^{(k)}\right],$$
$$(M=1,2,\cdots,N_e,\ n=1,2,\cdots,N_t) \qquad (8)$$

ただし，N_e は境界要素数，$u_M^{(n)}$，$u_M^{{\rm in}(n)}$ は，それぞれ M 番目の選点における第 n ステップでの面外方向変位および入射波変位を表わす．また，$B_{MN}^{(m)}$ は影響関数を表し，次式で与えられる．

$$B_{MN}^{(m)}=\frac{\mathcal{R}^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{S^N}\hat{W}(\boldsymbol{x}^M,\boldsymbol{y},s_l)dS(\boldsymbol{y})\right]{\rm e}^{\frac{-2\pi{\rm i}ml}{L}} \qquad (9)$$

ただし，$s_l=\delta(z_l)/\Delta t$，z_l は $z_l=\mathcal{R}{\rm e}^{2\pi{\rm i}l/L}$ である．なお，式 (9) の右辺はフーリエ変換の形をしていることに注意する．そ

のため，この計算は高速フーリエ変換を用いて計算を高速化することもできる．その場合，式 (9) において，同一の M, N に対し，様々な m に対する影響関数 $B_{MN}^{(m)}$ を一度に得ることができる [12]．また，$\hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)$ は，2 次元純面外異方性・粘弾性波動問題のラプラス変換領域における二重層核であり，次式で与えられる．

$$\hat{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s) = -C^*_{3j3l}(s) n_j(\boldsymbol{y}) \hat{U}_{,l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s) \tag{10}$$

ここで，$n_j(\boldsymbol{y})$ は点 $\boldsymbol{y}$ における外向き単位法線方向ベクトル，$C^*_{3j3l}(s)$ はラプラス変換域における緩和弾性定数を表す．また，$\hat{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)$ は，2 次元純面外異方性・粘弾性波動問題のラプラス変換領域における基本解であり，Wang と Achenbach[13] により提案された 2 次元異方性弾性波動問題に対する基本解を拡張することで得られる．具体的には，純面外波の伝搬に関係する箇所のみを考慮し，緩和弾性定数を導入して粘性を考慮できるように書き下せば，本問題における基本解 $\hat{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)$ は次のように与えられる．

$$\hat{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{|\boldsymbol{p}|=1} \frac{\Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},s)}{\Gamma_{33}(\boldsymbol{p})} dL(\boldsymbol{p}) \tag{11}$$

ただし，$\Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},s)$ は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},s) =& \mathrm{e}^{s\frac{|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}|}{c^*(\boldsymbol{p})}} E_1\left(s\frac{|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}|}{c^*(\boldsymbol{p})}\right) \\ &+ \mathrm{e}^{-s\frac{|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}|}{c^*(\boldsymbol{p})}} \left\{E_1\left(-s\frac{|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}|}{c^*(\boldsymbol{p})}\right) + \mathrm{i}\pi\right\}\end{aligned} \tag{12}$$

ここに，$\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ であり，$E_1(z)$ は指数積分 [14] を表す．また，$c^*(\boldsymbol{p})$ は単位円周を示すベクトル $\boldsymbol{p}$ の方向に対する複素位相速度である．一方，$\Gamma_{33}(\boldsymbol{p})$ は，通常の異方性弾性波動問題に対する Christoffel テンソルの一部に相当し，次式で与えられる．

$$\Gamma_{33}(\boldsymbol{p}) = C^*_{3j3l}(s) p_j p_l \tag{13}$$

式 (11) で示すように，一般的な異方性を考慮する場合，2 次元問題の基本解は単位円周を示すベクトル $\boldsymbol{p}$ における平面波の重ね合わせの形式で求めることができる．この基本解は，一部の横等方性材料の場合等を除き，閉じた形で求めることはできない．そのため，影響関数 (9) の計算は，単位円周と境界要素，すなわち空間に対する 2 重積分となり，全体の計算に対してボトルネックとなる．この点は，OpenMP を用いた並列化で対応する．

以上より，2 次元純面外異方性・粘弾性波動問題に対するラプラス変換領域基本解を用いて，式 (8) を解くことができる．式 (8) の第 n ステップにおいて，境界未知量を左辺に，境界既知量を右辺に適宜移行し，得られた代数方程式を解くことで，$n=1$ から始めて逐次的に，面外変位 $u(\boldsymbol{x}, n\Delta t)$ を求めることができる．この点は，本論文に限らず，全ての CQBEM について共通であるため，その詳細は省略する．

4. 異方性および粘弾性の考慮と数値解の妥当性の検証に必要な事項

さて，一般に異方性および粘弾性の両者を考慮した波動問題における解析解を求めることは困難である．そのため，ここでは本研究における具体的な異方性および粘弾性の考慮方法とともに，後に示す数値解析結果の妥当性を検証するために必要な事項について簡単にまとめておく．

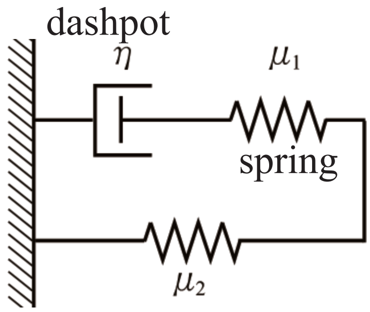

Fig. 2　Standard linear solid model for viscoelasticity.

4.1. 群速度曲線

2 節で述べたように，粘性の影響は簡単のため等方としている．以下では，ラプラス変換域における緩和弾性定数 $C^*_{3j3l}(s)$ に対して，粘弾性力学における初期弾性定数 [15] に相当する弾性定数を C^0_{3j3l} と表すこととする．このとき，本研究では，粘性の性質は等方であると仮定しているため，異方性の影響は，式 (13) の Christoffel テンソルを参考にすれば，初期弾性定数 C^0_{3j3l} を用いた次の方程式を解くことで確認できる [16]．

$$\Gamma^0_{33}(\boldsymbol{p}) - \rho c_0^2(\boldsymbol{p}) = 0,\ \Gamma^0_{33}(\boldsymbol{p}) = C^0_{3j3l} p_j p_l \tag{14}$$

ただし，$\Gamma^0_{33}(\boldsymbol{p})$ は 2 次元純面外異方性・粘弾性波動問題における初期弾性定数に対する Christoffel テンソル，ρ は異方性・粘弾性体の密度を表す．また，$c_0(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{p}$ 方向に伝搬する純面外波 (qS2 波)[17] の初期位相速度を表す．式 (14) より，qS2 波の初期位相速度 $c_0(\boldsymbol{p})$ は，波動の伝搬方向 p_i によって決定されることがわかる．すなわち，位相速度は伝搬方向 $\boldsymbol{p}$ によって異なることがわかる．よって，解くべき問題の密度 ρ や初期弾性定数 C^0_{3j3l} 等が与えられれば，様々な方向における位相速度や群速度が求まるため，後に示す数値解析結果の妥当性の検証に役立つ．

4.2. 標準線形固体モデルの拡張とその適用

Fukui ら [18] によれば，粘弾性波動のモデル化方法として，主に Maxwell 物体, Voigt 物体，標準線形固体の 3 種類を挙げることができる．本論文では，Fig. 2 に示すような標準線形固体を用いて粘弾性波動をモデル化する．一般的に標準線形固体は，Fig. 2 で示すように，瞬間的に力に比例した変形を生じると仮定する 2 つの線形ばね (ばね定数 μ_1, μ_2) と，任意の瞬間において，力に比例した速度を生じるダッシュポット η の組合わせをモデル化したものである．その場合の力-変位関係等の詳細は文献 [15] に譲り，ここでは本解析に必要な要点のみについて述べる．

今，応力緩和時間を τ_σ，ひずみ緩和時間を τ_ϵ，$t \to \infty$ における緩和弾性定数を C^R_{3j3l} とすれば，後の数値解析例で用いる入射波の計算に必要な，周波数領域における複素弾性定

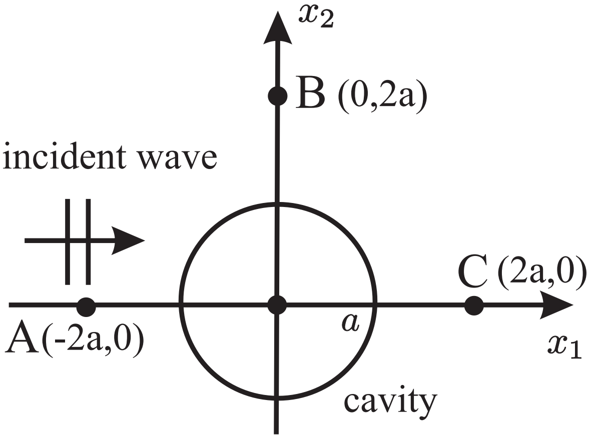

Fig. 3　Elastic wave scattering by a cavity with radius a in an anisotropic viscoelastic solid.

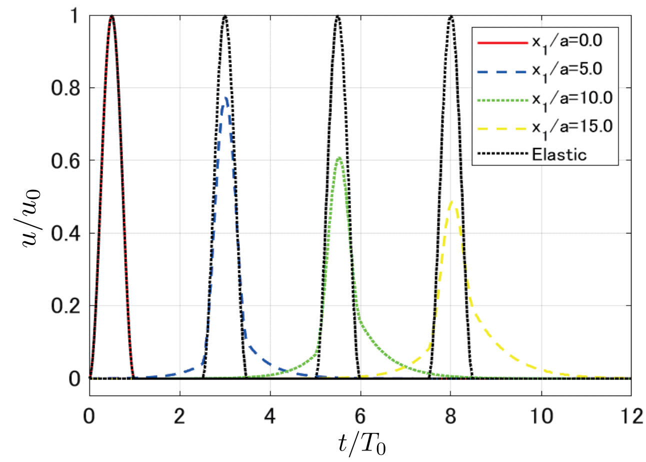

Fig. 4　Time variation of the incident plane wave at x_1/a = 0.0, 5.0, 10.0, 15.0.

数 $\tilde{C}^*_{3j3l}(\omega)$ は，Fukui ら [18] の結果を拡張すれば，形式的に次のように与えられる．

$$|\tilde{C}^*_{3j3l}(\omega)| = \frac{\sqrt{1+\omega^2\tau_\sigma^2}}{\sqrt{1+\omega^2\tau_\epsilon^2}} C^R_{3j3l} \tag{15}$$

ここで，ω は角周波数であり，$\boldsymbol{p}$ 方向の対応する複素波数 $k(\omega)$ は次のように計算できる．

$$k(\omega, \boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{2}} \frac{\omega}{\sqrt{|C^*_{3j3l}(\omega) p_j p_l|/\rho}} \tag{16}$$

ただし，δ は次のように与えられる．

$$\tan\delta = \frac{\omega(\tau_\sigma - \tau_\epsilon)}{1+\omega^2\tau_\sigma\tau_\epsilon} \tag{17}$$

また，緩和弾性定数 C^R_{3j3l} と，$t\to 0$ における初期弾性定数 C^0_{3j3l} の比を，全ての弾性定数で一定とすれば，

$$C^0_{3j3l} = C^R_{3j3l}\frac{\tau_\sigma}{\tau_\epsilon} \tag{18}$$

と表せる．一方，CQBEM における式 (9) の影響関数の計算は，式 (10) に対して，ラプラス変換領域での緩和弾性定数 $C^*_{3j3l}(s)$ 用いる. そのため, 次の式

$$C^*_{3j3l}(s) = \frac{1+s\tau_\sigma}{1+s\tau_\epsilon} C^R_{3j3l} \tag{19}$$

を用いてラプラス変換域における緩和弾性定数 $C^*_{3j3l}(s)$ を計算すればよい．なお，本設の定式化は粘性の性質や程度に影響を与えるが，初期弾性定数や緩和弾性定数を変化させることにより，弾性定数の各成分に異なる粘性を考慮することは問題ないと考えられる．以上で時間領域境界積分方程式 (3) を解く準備は整った．

5. 数値解析例

以下，数値解析例を示す．解析モデルとして Fig. 3 のような異方性・粘弾性体中の半径 a の円形空洞による入射波の散乱問題を考える．空洞は要素数 $N_e = 72$ 個の区分一定要素で離散化した．時間増分は $c_0\Delta t/a = 0.08$, 総時間ステップ数 N_t は $N_t = 128$ としている．また，解析には，初期弾性波速度 c_0 の波動が空洞を通過する時間 T_0 を $T_0 = 2a/c_0 = 2.0$ で定義し, 基準時間の 1 つとして用いる．なお，応力緩和時間 τ_σ は $\tau_\sigma = 0.425T_0$, ひずみ緩和時間 τ_ϵ は $\tau_\epsilon = 0.5T_0$ で与え，緩和弾性定数 C^R_{3j3l} と初期弾性定数 C^0_{3j3l} の比 C^R_{3j3l}/C^0_{3j3l} は $C^R_{3j3l}/C^0_{3j3l} = 0.85$ で与えた．ここで与えた応力緩和時間 τ_σ やひずみ緩和時間 τ_ϵ を用いれば，式 (10) における複素弾性定数 C^*_{3j3l} は決定できる．一方，CQM における式 (7) で示した精度パラメータ ϵ は，$\epsilon = 1.0\times10^{-13}$ で与え，式 (9) における影響関数の計算では $L = N_t$ とし，高速フーリエ変換を用いて計算を効率的に行った．解析には，京都大学のスーパーコンピューターのシステム A(Camphor 2) を 1 ノード (ノード当たり 68 cores) 占有し，OpenMP による 68 スレッド並列を施した．具体的には，式 (8) の入射波 $u^{\mathrm{in}(n)}_M (M = 1,\dots,N_e)$ および影響関数行列 $B^{(n-k)}_{MN} (M = 1,\dots,N_e)$ の各行の計算に OpenMP を用いている．この場合，1 つのスレッド当たり，$N_e/68$ 行の計算をそれぞれ担当することとなるが，本論文では並列化効率を最大化することが主眼ではないため，スレッド間のロードバランスについては，特に考慮せず並列化した．

5.1. 入射波の計算

CQBEM の計算に先立ち，式 (3) における入射波 $u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)$ を求めておく．一般的に，粘弾性の性質を持つ波動は分散性を持つため，基本解同様，波動速度を閉じた形で求めることはできない．そこで，前論文 [7] 同様，時間領域における入射波を周波数領域の入射波の逆フーリエ変換で求めることとする．ここでは，入射波として，x_1 方向に伝搬する次の平面波を用いた．

$$u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t) = u_0\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\omega_0^2(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega T_0})}{2\mathrm{i}\omega(\omega^2-\omega_0^2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{\tilde{c}^*}x_1}\right] \tag{20}$$

ここで, ω は角周波数, u_0 は入射波の振幅, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ である．また，$\mathcal{F}^{-1}$ は逆フーリエ変換を意味している．入射波の計算に用いた初期弾性定数の成分比 C^0_{3131}/C^0_{3232} は $C^0_{3131}/C^0_{3232} \simeq 0.64$ とした．なお，周波数域での x_1 方向に伝搬する入射波の位相速度 $\tilde{c}^*$ は，式 (14) の Christoffel 方程式で伝搬方向ベ

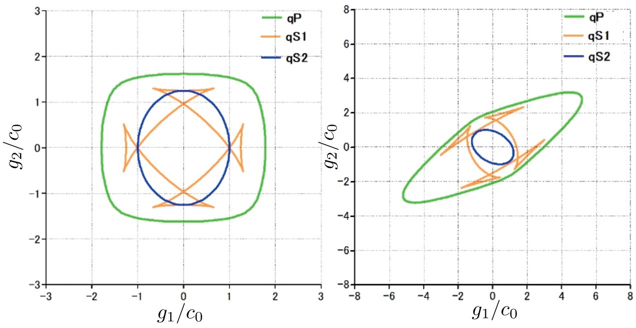

Fig. 5　Group velocity curves for (a) austenite steel (b) graphite-epoxy with 30° inclined anisotropic principle axis.

クトル p_j を与えることで容易に求めることができる．

まず，入射波の計算のおよその妥当性を確認するために，入射波の変位の時刻歴応答解析を実施する．その結果を Fig. 4 に示す．Fig. 4 中の波形は, 式 (20) を用いて計算された平面波であり, $x_1/a = 0.0, 5.0, 10.0, 15.0$ における入射波変位 u/u_0 の時刻歴波形を示している．比較のため，粘性効果のない場合の入射波の時刻歴波形を，黒点線で示してある．Fig.4 より，粘性効果がない場合は，入射平面波が伝搬しても，振幅や波形を一定に保ちながら伝搬していることがわかる．一方，粘性効果がある場合は，振幅は入射波が進行するにつれ減衰し，かつその波形も変化していることがわかる．以上より，以後の解析で用いる入射波に正しく粘性効果を与えられていることを確認できた．

5.2. オステナイト系鋼材とグラファイトエポキシに対する群速度曲線

続いて，以下の解析で解析対象とするオステナイト系鋼材と，グラファイトエポキシの群速度曲線を示しておく．なお，オステナイト系鋼材およびグラファイトエポキシのフォークト表記された初期弾性定数 $C^0_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, \ldots, 6)$ は，それぞれ以下のように与えた．

$$\frac{C^0_{\alpha\beta}}{C^0_{66}} = \begin{bmatrix} 3.16 & 1.19 & 1.76 & 0 & 0 & 0 \\ & 3.16 & 1.76 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2.63 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sym.} & & 1.57 & 0 & 0 \\ & & & & 1.57 & 0 \\ & & & & & 1.0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\frac{C^0_{\alpha\beta}}{C^0_{66}} = \begin{bmatrix} 19.3 & 8.0 & 8.0 & 0 & 0 & 0 \\ & 15.1 & 8.3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 15.1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sym.} & & 0.52 & 0 & 0 \\ & & & & 1.0 & 0 \\ & & & & & 1.0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

ただし，式 (21), (22) に示したこれら初期弾性定数は，それぞれの材料における C^0_{66} で無次元化されていることに注意されたい．異方性を扱う場合，このようにフォークト表記 [17] された弾性定数を用いると便利な場合が多々ある．なお，フォークト表記された弾性定数 $C^0_{\alpha\beta}$ と，4 階のテンソル表記された弾性定数 C^0_{ijkl} には次の関係がある．

$$\alpha = \begin{cases} i & : (i = j) \\ 9 - (i + j) & : (i \neq j) \end{cases} \tag{23}$$

$$\beta = \begin{cases} k & : (k = l) \\ 9 - (k + l) & : (k \neq l) \end{cases} \tag{24}$$

Fig. 5(a), (b) は，それぞれオステナイト系鋼材およびグラファイトエポキシに対する群速度曲線を示している．ただし，Fig. 5(b) に対するグラファイトエポキシに対する群速度曲線は，後の解析に対応するように，式 (22) に対して異方性主軸を座標変換 [19] により 30° 傾けた結果であることに注意されたい．なお，本論文で示す解析対象は，Fig. 5 中の青色線で示す qS2 波 (純面外波) であり，参考のため，qP 波や qS1 波も示してある．Fig. 5(a), (b) より，いずれの場合も qS2 波は比較的異方性の影響が弱いことがわかる．そのため，数値安定性の観点からも，qS2 波を対象とした解析は，比較的容易である．また Fig. 5(a) より，オステナイト系鋼材の qS2 波に対する群速度曲線は縦長の楕円形状を示していることがわかる．一方，Fig. 5(b) のグラファイトエポキシの qS2 波に対する群速度曲線も楕円形状を示しているが，異方性主軸を座標変換により 30° 傾けているため，群速度曲線も同様に斜めに傾いていることに注意されたい．

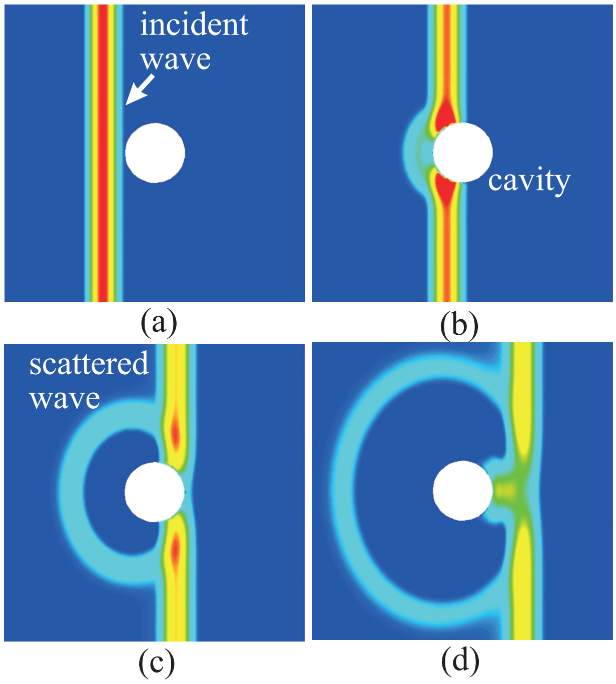

Fig. 6　Total wave fields $|u|/u_0$ around a cavity in the austenite steel with the initial elastic constant $C^0_{\alpha\beta}/C^0_{66}$ given in Eq.(21).

5.3. オステナイト系鋼材中の空洞による入射 qS2 波の散乱解析

次に，オステナイト系鋼材中の空洞による入射 qS2 波の散乱解析結果を示す．入射 qS2 波は式 (20) で与えた平面波を時

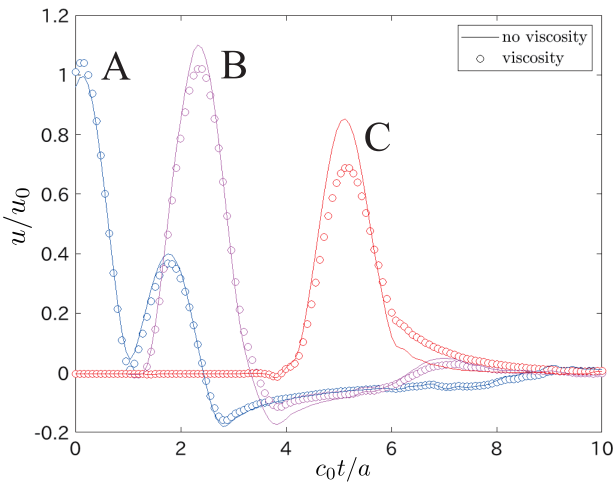

Fig. 7　Total displacement A, B, and C in the austenite steel with the initial elastic constant $C^0_{\alpha\beta}/C^0_{66}$ given in Eq.(21).

刻 $c_0t/a = 0.0$ に，丁度，空洞左端に到達するように与えた．弾性定数は式 (21) における qS2 波の解析に必要な部分のみを用いている．Fig. 6(a)-(d) は，それぞれ時間ステップ数 n が $n = 0, 40, 80, 120$ における，Fig. 3 で示した空洞周辺の正方領域 (ただし $-5.0 \leq x_1 \leq 5.0$) における全変位場 $|u|/u_0$ を示している．一般的に，散乱波の波動伝搬は 4.1 節で説明した群速度曲線に従うため，解析結果の波面の形状を Fig. 5(a) の群速度曲線と比べれば，物理的な妥当性を確認できることとなる．Fig. 6(a) で，入射波は空洞に到達し，Fig.6(b) で散乱波が発生し始める．その後，Fig.6(c), (d) と時間が進む毎に，散乱波は楕円形状の波面を持って伝搬していることがわかる．この楕円形状は縦長であり，Fig. 5(a) で示したオステナイト系鋼材中の qS2 波に対する群速度曲線の形状と一致していることがわかる．すなわち，異方性の影響を正しく計算できていることがわかる．一方，与えた入射平面波に着目すると，Fig. 6 より，入射平面波の振幅は，時間ステップの増加に伴い徐々に減衰していることがわかる．よって，入射平面波に対する粘弾性の影響も正しく考慮されていることがわかる．

ただし，Fig. 6 の結果からだけでは，散乱波における粘弾性の影響の有無は判然としない．そこで，Fig. 7 に，Fig. 3 中の A, B, C 点における変位 u/u_0 をプロットした結果を示す．参考のため，粘性効果がない，通常の異方性弾性体の場合の結果も実線で示してある．Fig. 7 より，A, B, C いずれの点における結果を見ても，粘性効果がある場合は，通常の異方性弾性体の場合に比べ，変位 u/u_0 が減衰していることがわかる．また，C 点に着目すると，粘弾性効果がある場合は，ゆっくりと変位 u/u_0 が減衰していることがわかる．この傾向は，Fig. 4 で示した粘性を考慮した場合の入射波の伝搬傾向と同様である．よって，定性的ではあるが，異方性および粘弾性の両者の影響を同時に考慮した解析を正しく行えていることがわかる．

5.4. 異方性主軸が 30° 傾いた場合のグラファイトエポキシ中の空洞による入射 qS2 波の散乱解析

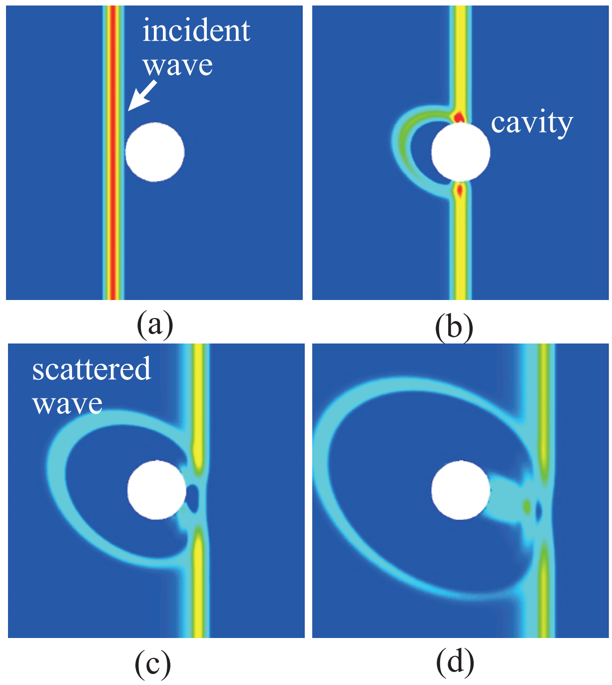

Fig. 8　Total wave fields $|u|/u_0$ around a cavity in the graphite-epoxy with the initial elastic constant $C^0_{\alpha\beta}/C^0_{66}$ given in Eq.(22).

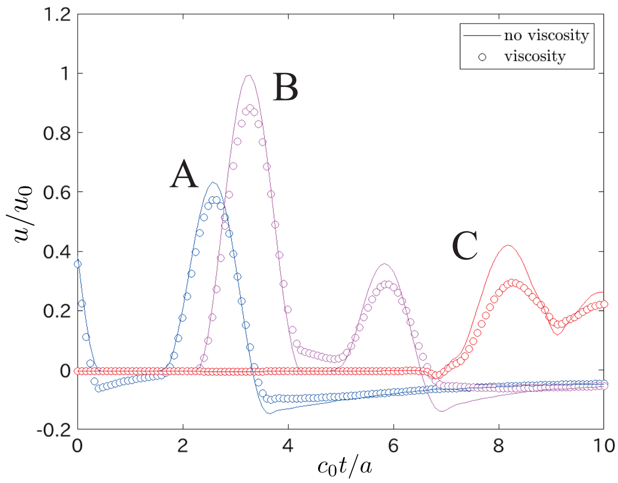

Fig. 9　Total displacement A, B, and C in graphite-epoxy with the initial elastic constant $C^0_{\alpha\beta}/C^0_{66}$ given in Eq.(22).

最後に，異方性主軸が 30° 傾いた場合のグラファイトエポキシ中の空洞による入射 qS2 波の散乱解析結果を示す．5.3 節と同様，入射 qS2 波には式 (20) で示した平面波を用い，時刻 $c_0t/a = 0.0$ で，丁度空洞の左端に到達するように設定した．ただし，先に説明したように，弾性定数は式 (22) に対して異方性主軸に対する 30° の座標変換を施していることに注意されたい．Fig. 8(a)-(d) に，Fig.6 と同様，それぞれ時間ステップ数 n が $n = 0, 40, 80, 120$ における，Fig. 3 で示した空洞周辺の正方領域における全変位場 $|u|/u_0$ を示す．Fig. 8(a) で入射波が空洞に到達する．その後，Fig. 8(b) で散乱波が発生している様子を確認できる．その後，Fig. 8(c), (d) と時間の経過とともに，空洞による散乱波をはっきりと確認するこ

とができる．なお，この散乱波の形状は，等方とならず，左上に 30° 傾いた楕円形状となっている．すなわち，Fig. 5(b) で示した qS2 波の群速度曲線の形状とおよそ一致する．よって，異方性主軸が傾いた場合でも，異方性の影響を正しく評価できていると考えられる．一方，与えた入射平面波に着目すると，入射平面波の振幅は，Fig. 6 のオステナイト系鋼材の場合と同様に，時間ステップの増加に伴い，徐々に減衰していることがわかる．ただし，オステナイト系鋼材とグラファイトエポキシでは，入射波の伝搬方向に対する位相速度が異なるため，x_1 方向の波長自体は同一にならないことに注意する．

最後に，Fig. 7 と同様に，Fig. 3 における A, B, C 点での変位 u/u_0 をプロットした結果を Fig.9 に示す．参考のため，粘性効果がない，通常の異方性弾性体の場合の結果も実線で示してある．Fig. 7 の結果と同様に，粘性効果がある場合は，粘性効果のない異方性弾性波動問題の場合の結果に比べて，各点での変位 u/u_0 は小さくなっていることがわかる．よって，いずれの点においても粘性効果の影響を確認できた．

6. 結論および今後の展望

2 次元純面外異方性・粘弾性波動問題における演算子積分時間領域境界要素法の定式化を行った．一般的に，異方性と粘弾性の両者を考慮した問題に対して，解析解を導出することは難しい．そのため，ここでは，粘性効果を取り入れた入射波自体の伝搬，群速度曲線から予想される散乱波の波動伝搬等に着目し，空洞による入射波の散乱問題を解き，異方性や粘弾性の影響を確認することで，本手法のおよその妥当性を示した．異方性と粘弾性の両者の効果を取り入れた CQBEM は，これまでに例はない．そのため，今後は，2 次元純面内波動問題を対象とした異方性・粘弾性波動問題への拡張や，3 次元問題への拡張等，関連する問題に応用することを予定している．また，本研究では，簡単のため，粘性の影響を等方として考えた．そのため，粘性の影響が方向に依存するような場合についての定式化も検討する予定である．解析結果のより定量的な評価も今後の課題である．

謝辞

本研究は，R2 年度学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (拠点研究機関 : 京都大学，Project ID:jh200052-NAH)，R3 年度学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (拠点研究機関 : 京都大学，北海道大学，Project ID:jh210033-NAH)，科学研究費補助金基盤研究 (C)(21K0423100)，並びに日本学術振興会二国間共同研究 (project number: JPJSBP1 20207707) の支援の下で実施された．

参考文献

(1) 小林昭一編著 : 波動解析と境界要素法， 京都大学学術出版会，(2000).

(2) 福井卓雄 : 境界要素法の研究-高速・高精度計算法の開発と応用- 京都大学学位論文, (1998).

(3) 福井卓雄，岡山美央，石田貴之 : 2 次元波動伝播問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算数理工学論文集，**6**(2), (2006), pp.153-158.

(4) Abreu, A. I., Carrer, J. A. M. and Mansur, W. J. : Scalar wave propagation in 2D: a BEM formulation based on the operational quadrature method, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **27**, (2003), pp. 101-105.

(5) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I *Numer. Math.*, **52**, (1988), pp. 129-145.

(6) Schanz, M. : Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: A Boundary Element Approach, Springer, (2001).

(7) 斎藤隆泰，石田貴之，福井卓雄，廣瀬壮一:粘弾性面外波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, 原稿番号 No.20080011, (2008).

(8) 斎藤隆泰，近澤文香，廣瀬壮一 : 演算子積分時間領域境界要素法を用いた飽和多孔質弾性体における大規模波動散乱解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), **68**, (2012), pp.I_187-I_197.

(9) Zhang, Ch.: Transient elastodynamic antiplane crack analysis of anisotropic solids, *Int. J. Solids and Structures*, **37**, (2000), pp. 6107-6130.

(10) 斎藤隆泰，田中遊雲，廣瀬壮一 : 3 次元異方性弾性波動問題における Lubich の方法を用いた時間領域境界要素法，計算数理工学論文集, **10**, (2010), pp.111-116.

(11) Furukawa, A., Saitoh, T. and Hirose, S.: Convolution quadrature time-domain boundary element method for 2-D and 3-D elastodynamic analyses in general anisotropic elastic solids, *Eng. Anal. Bound. Elem*, **39**, (2014), pp.64-74.

(12) 斎藤隆泰，瀬川尚揮，石田貴之，廣瀬壮一 : 並列化された演算子積分時間領域高速多重極境界要素法を用いた大規模多重散乱解析, 計算数理工学論文集, **11**, (2011), pp.95-100.

(13) Wang, C.-Y. and Achenbach, J. D. :Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids, *Geophys, J. Int.*, **118**, (1994), pp.384-392.

(14) Abramowitz, M., and Stegun, I. A.: Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables, Dover, (1965).

(15) ファン, Y. C. (大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀生共訳): 固体の力学/ 理論, 培風館, (1970).

(16) 斎藤隆泰，下田瑞斗，稲垣祐生，廣瀬壮一 : 演算子積分時間領域境界要素法を援用した異方性板内部の欠陥に対する順解析および逆散乱解析，土木学会論文集 A2(応用力学), **72**(2), (2016), pp.I_237-I_246.

(17) Auld, B. A.: Acoustic fields and waves in solids, vol.1, 2, R.E. Krieger, (1990).

(18) Fukui, T. and Funato, K.: Time domain boundary element method in anti-plane viscoelastic wave propagation problems, Proc. 7th Japan-China Symp. Boundary Element Methods, M. Tanaka and Z. Yao(eds.), (1996), Elsevier, pp.47-56.

(19) 前原佑，斎藤隆泰：時間反転法を用いた L 字型 CFRP 中の欠陥形状再構成，計算数理工学論文集, **18**, (2018), pp.47-52.