計算数理工学論文集 Vol. 20 (2020 年 12 月), 論文 No. 17-201219 JASCOME

凹型の散乱体に対する2次元Helmholtz方程式のtransmission問題の境界積分方程式法による複素固有値計算について

On the calculation of complex eigenvalues of transmission problems for the 2D Helmholtz equation for concave scatterer using boundary integral equation method

三澤 亮太 [1)]

Ryota MISAWA

1) 埼玉大学大学院理工学研究科 (〒 338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255, E-mail: misawa@mail.saitama-u.ac.jp)

We consider boundary integral equation method (BIEM) for calculating complex eigenvalues of transmission problem for concave scatterer in the 2D free space. In this problem, separation of fictitious eigenvalues of the BIEM from the real axis is of importance since both the true and fictitious eigenvalues may be obtained near the real axis. In this paper, motivated by Steinbach and Unger [(2)], we focus on several boundary integral equations which are formulated by combining the potential and its normal derivative multiplied by an elliptic operator to see their ability of separating the fictitious eigenvalues from the real axis. Specifically, we focus on combined boundary integral equation formulated with the single layer potential of the Yukawa type, and we discuss the heuristic parameter choice related to the formulation. Numerical examples show that the combined boundary integral equation formulated with the Yukawa potential is effective in the separation of the eigenvalues, while the standard Burton-Miller type formulation shows rather better performance.

Key Words: Boundary Integral Equations, Combined Boundary Integral Equations, Eigenvalues

1. 導入

本論文では、近年注目を集めてきている開領域における外部境界値問題の共鳴現象に関わる複素固有値 (固有振動数) の、境界積分方程式法 (boundary integral equation method、以下 BIEM) による数値計算について考える。BIEM を用いた複素固有値計算を行う場合、得られた固有値は本来求めたい境界値問題の固有値 (真の固有値) ではない「見かけの固有値 (fictitious eigenvalue)」と呼ばれる偽の固有値であるおそれがあり、これらの判別を行う必要がある。

そこで本論文では、2 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題を取り上げ、真の固有値と見かけの固有値を容易に判別できるような境界積分方程式を考察する。Transmission 問題におけるこのような定式化として、著者らは (transmission 問題における) 内側の領域に対応する式の基本解を修正する方法を提案している [(1)]。この定式化を用いると、真の固有値と見かけの固有値は、それぞれ複素平面の下半平面、上半平面に現れ区別ができる。しかしながら、真の複素固有値や見かけの複素固有値が十分実軸から離れている場合であればきわめて容易に判別できるが、真の固有値も見かけの固有値もともに実軸付近に現れるような問題であれば、判別が難しくなるおそれがある。これは、Fig. 1 のような凹型の形状に対する散乱問題で顕著に起こりうる。なぜなら、凹型の形状においては窪みの部分に局在するような固有モードが存在し得り、それらも厳密には複素固有値に対応する無限領域における固有モードであるが、その振る舞いは有界領域中の実固有値の固有モードに近いものであり、それに対応する固有値はほとんど実数となると考えられるためである。実際、そのようになるという計算結果が報告されている [(2, 3)]。

そこで本論文では、凹型の散乱体の transmission 問題について、ポテンシャル U を用いて以下の形で与えられる境界積分方程式の見かけの固有値の分離性能を検討する：

$$U + (\text{複素定数 } \alpha) \times (\text{作用素 } \mathcal{P}) \frac{\partial U}{\partial n}. \tag{1}$$

こういった形、あるいはこれと似た形の境界積分方程式は

2020 年 11 月 2 日受付, 2020 年 11 月 20 日受理

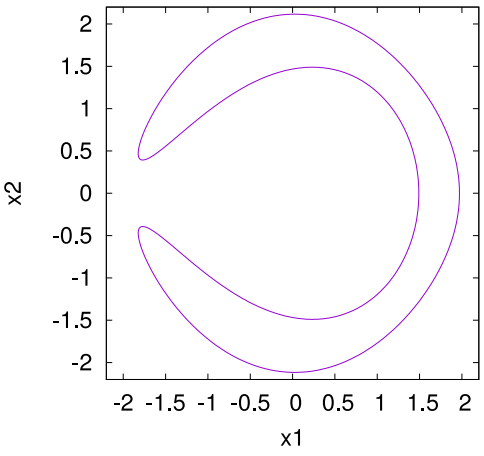


Fig. 1 Concave scatterer. This shape is given by (15) with the coefficients in Table. 1.

combined (field) boundary integral equation と呼ばれ正則化の観点からよく研究されてきており (例えば [4])、また (1) において $\mathcal{P} = \mathcal{I}$(恒等作用素) とした場合、よく知られている Burton-Miller 型の境界積分方程式 [5](以下、BM 型と呼ぶ) となる。 式 (1) の形の境界積分方程式の見かけの複素固有値分布に関する知見としては、Steinbach と Unger の研究 [2] がある。彼らは、3 次元 Helmholtz 方程式の外部 Neumann 問題を取り上げ、見かけの複素固有値分布が、$\mathcal{P}$ を静的問題の一重層ポテンシャルとした場合の (1) の形の境界積分方程式と同一となる境界積分方程式を考え凹型の形状の問題の固有値解析を行い、その (見かけの) 複素固有値は実軸から離れて現れ、単純な BM 型 (と同様の固有値分布を持つ積分方程式) のものより複素固有値の分離性能が優れているという計算結果を報告している [2]。

そこで、本論文では 2 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題に対して、(1) の形の境界積分方程式を考え、この形で与えられるいくつかの境界積分方程式の見かけの複素固有値分離性能を比較する。一見すると、すでに Steinbach と Unger の複素固有値に関する知見がある下で、そのような比較研究を行う必要性は無い様に見えるが、実は 2 次元 transmission 問題に対して先述の Steinbach と Unger の 3 次元 Neumann 問題における知見をそのまま当てはめられるか否かは、以下に示す 2 点の理由・違いから検討の余地が充分ある。実際、この定式化において真の固有値と見かけの固有値を分離できるためには、作用素 $\mathcal{P}$ が楕円的 (ここでは任意の関数 ϕ について、$(\phi, \mathcal{P}\phi) \geq C(\phi, \phi)$, $\exists C > 0$ となることとする。ここに $(\,)$ は境界積分をとる内積である) であることが要請されるが、静的問題の一重層ポテンシャルが楕円的であることは、2 次元の場合は条件付きでしか成り立たたないため (文献 [6]、6.6.1)、3 次元の場合と同様には取り扱えない。そこで、本論文では静的問題の一重層ポテンシャルのかわりに、楕円的であることが保証される [7] 湯川型ポテンシャルを用いる。この発想は素朴であり斬新なものではないが、静的問題と異なり核関数の選び方に自由度が生じる。本論文では、数値実験に基づく核関数の発見的な選び方も与える。2 点目の大きな違いは、見かけの固有値を生成する境界値問題の違いである。Transmission 問題の場合、散乱体の内部と外部のいずれにおいても波動が存在するため、式 (1) の形で与えられる境界積分方程式を散乱体内部と外部で 2 本分並べる必要があり、それらの見かけの固有値は、境界条件が (1) の形で与えられる内部境界値問題または外部境界値問題の固有値となる。外部 Neumann 問題の場合、見かけの固有値は補領域である内部問題の固有値しか現れないが、一方で transmission 問題では散乱体の内部と外部両方の領域の解の積分表現を考える必要があるため、内部問題の固有値だけでなく、外部境界値問題の固有値も見かけの固有値として出現する。したがって、外部境界値問題の生成する見かけの固有値の分離についても考慮する必要がある。凹型の領域の内部問題の見かけの固有値として現れる外部境界値問題由来の見かけの固有値の知見として Zheng らの報告 [3] があり、そこでは BM の係数 α を i/k(k は波数) の形とする選び方が見かけの固有値の分離に有効であることが、Fig. 1 と似た凹型形状において報告されている [3]。しかしながら, そこでは BM 型の境界積分方程式のみ取り扱われており、一重層ポテンシャルを用いた定式化についての外部境界値問題由来の見かけの固有値に関する知見は著者の知る限りない。以上のように、本論文は境界積分方程式の斬新な定式化を提供するものではないものの、本論文が取り扱う問題は既存の知見が必ずしも適用できるか定かではないものであるため、本論文が提供する数々の数値実験結果が寄与する知見は、実用上小ではないと考えられる。

本論文の構成は以下のとおりである。2 節において、対象とする境界値問題の定式化と、境界積分方程式の定式化を示す。3 節において、数値計算例を示す。4 節で、結言と今後の課題をまとめる。

2. 定式化

2.1. 2 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題

本論文では、$e^{-i\omega t}$ の形 (ω は角振動数) で時間 t に依存する波動方程式より導かれる 2 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題を考える。境界が滑らかな曲線で表される有界領域 $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ を考え、$\Omega_1 := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_2}$ とする。考える 2 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題は

$$(\Delta + k_i^2)u(x) = 0 \text{ in } \Omega_i \ (i = 1, 2) \tag{2}$$

$$u^+ = u^- (= u), \ \frac{1}{\epsilon_1}\frac{\partial u^+}{\partial n} = \frac{1}{\epsilon_2}\frac{\partial u^-}{\partial n} (= q) \text{ on } \partial\Omega_2 \tag{3}$$

十分大きな R が存在し、$|\boldsymbol{x}| > R$ となる x において

$$u(x) - u^{\text{inc}}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(k_1|\boldsymbol{x}|)e^{in\theta}, \tag{4}$$

を満たす $u(x)$ を求める問題である。ここに、ϵ_i は正の実数、k_i は波数で $k_i = \omega\sqrt{\epsilon_i}(\epsilon_i > 0)$、$u^{\text{inc}}$ は Ω_1 における入射波、$H_n^{(\nu)}$ は n 次第 ν 種 Hankel 関数である。式 (3) は境界条件で

あり、上付き添字の $+(-)$ は $\Omega_1(\Omega_2)$ から境界への trace、また $\partial/\partial n$ は法線微分を表す (法線ベクトルは Ω_2 から Ω_1 の向きを正の向きとする)。式 (4) は放射条件を表す。なお、具体的な物理現象としては、透磁率 $\mu = 1$ における電磁波を想定し、ϵ_i は各領域 Ω_i $(i = 1, 2)$ における誘電率である。上記の transmission 問題の固有値 (固有振動数) とは、$u^{\mathrm{inc}} \equiv 0$ のときに (2)-(4) を満たす $u \not\equiv 0$ が存在するような $\omega \in \mathbb{C}$ である。このような ω は $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ であるが、Fig. 1 のような凹型の形状では極めて小さな虚部をもち、ほとんど実数となることが有り得る。

2.2. 境界積分方程式の定式化

記号をいくつか導入する。境界値 u, q に対してポテンシャル

$$U_k^{\mathrm{o/i}}(x) := \int_{\partial\Omega_2} \left(\epsilon_k G_k^{\mathrm{o/i}}(x,y) q(y) - \frac{\partial G_k^{\mathrm{o/i}}(x,y)}{\partial n_y} u(y) \right) ds_y$$

を導入する (ただし $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega_2$)。ここに、$\epsilon_k$ は波数が k である領域の誘電率、$G_k^{\mathrm{o/i}}$ は波数 k の 2 次元 Helmholtz 方程式の基本解で

$$G_k^{\mathrm{type}}(x,y) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) & \text{for } k \neq 0,\ \mathrm{type} = \mathrm{o} \\ -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) & \text{for } k \neq 0,\ \mathrm{type} = \mathrm{i} \\ \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

とする。上付き添字の o と i は、それぞれ外向き放射条件、内向き放射条件を考えていることに対応する。また、境界積分作用素を以下のように定義する

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{S}_k^{\mathrm{o/i}} q\right)(x) &= \int_{\partial\Omega_2} G_k^{\mathrm{o/i}}(x,y) q(y)\, ds_y, \\ \left(\mathcal{D}_k^{\mathrm{o/i}} u\right)(x) &= \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial G_k^{\mathrm{o/i}}(x,y)}{\partial n_y} u(y)\, ds_y, \\ \left(\mathcal{D}_k^{\mathrm{o/i}^T} q\right)(x) &= \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial G_k^{\mathrm{o/i}}(x,y)}{\partial n_x} q(y)\, ds_y, \\ \left(\mathcal{N}_k^{\mathrm{o/i}} u\right)(x) &= \fint_{\partial\Omega_2} \frac{\partial^2 G_k^{\mathrm{o/i}}(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} u(y)\, ds_y. \end{aligned}$$

ここに $\fint$ は発散する積分の有限部分である。

本論文では、楕円的な作用素 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ および係数 α, β を用いて以下のように表される境界積分方程式を考える。

$$\left(U_{k_1}^{\mathrm{o}}\right)^- + \alpha \mathcal{P}_1 \left(\frac{\partial U_{k_1}^{\mathrm{o}}}{\partial n} \right)^- = 0 \text{ on } \partial\Omega_2, \tag{5}$$

$$\left(U_{k_2}^{\mathrm{i}}\right)^+ + \beta \mathcal{P}_2 \left(\frac{\partial U_{k_2}^{\mathrm{i}}}{\partial n} \right)^+ = 0 \text{ on } \partial\Omega_2. \tag{6}$$

これらは、領域 Ω_1, Ω_2 の解に対応する積分表現 U_{k_1}, U_{k_2} が、補領域においてゼロになるという式の境界への trace を用いて定式化されたものである (作用素 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ は楕円的であるように選べば元の境界値問題の解の積分表現 U とは無関係なものであり、また本論文では作用素 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ として境界で連続となる一重層ポテンシャルまたは恒等作用素を想定している。以上の理由から、これらの作用素には上付き添字はつけていない)。なお、U_{k_2} の方の式において U_2^{i} と内向き放射条件に対応するものを用いているのは、(1) と同様のアイデアに基づく。また、上記の積分方程式は固有値計算を念頭に入れて、斉次 $u^{\mathrm{inc}} \equiv 0$ の場合のみを示している。なお、式 (5)-(6) により与えられる境界積分方程式の積分作用素の形を陽に書くと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{I}}{2} - \mathcal{D}_{k_1}^{\mathrm{o}} - \alpha \mathcal{P}_1 \mathcal{N}_{k_1}^{\mathrm{o}} & \epsilon_1 \left(\mathcal{S}_{k_1}^{\mathrm{o}} + \alpha \mathcal{P}_1 \left(\frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D}_{k_1}^{\mathrm{o}\,T} \right) \right) \\ \frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D}_{k_2}^{\mathrm{i}} + \beta \mathcal{P}_2 \mathcal{N}_{k_2}^{\mathrm{i}} & -\epsilon_2 \left(\mathcal{S}_{k_2}^{\mathrm{i}} + \beta \mathcal{P}_2 \left(-\frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D}_{k_2}^{\mathrm{i}\,T} \right) \right) \end{pmatrix} \tag{7}$$

境界積分方程式の固有値とは、(7) を係数行列とする斉次積分方程式が非自明解を持つような $\omega \in \mathbb{C}$ である。式 (5)-(6) に基づき固有値を計算すると、transmission 問題の固有値とは別に、見かけの固有値として以下の内部問題

$$\left(\Delta + k_1^2\right) u = 0 \text{ in } \Omega_2, u^- + \alpha \mathcal{P}_1 \frac{\partial u^-}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega_2 \tag{8}$$

および外部問題

$$\left(\Delta + k_2^2\right) u = 0 \text{ in } \Omega_1, u^+ + \beta \mathcal{P}_2 \frac{\partial u^+}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega_2$$

十分大きな R が存在し、$|\boldsymbol{x}| > R$ となる x において

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n H_n^{(2)}(k_2|\boldsymbol{x}|) e^{in\theta}, \tag{9}$$

の固有値が現れる。内部問題 (8) および外部問題 (9) の固有値は、それぞれ $\mathrm{Im}\,\alpha < 0$ および $\mathrm{Im}\,\beta > 0$ となるように係数 α, β を選ぶと、正の虚部を持ち、負の虚部を持つ真の固有値 (transmission 問題 (2)-(4) の固有値) と判別できる。この説明は付録に記す。具体的な選び方は、数値計算例で述べる。

本論文では、$\alpha, \beta, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ の選び方として、以下を考える

- **Burton-Miller の定式化 (BM)**:$\mathcal{P}_1 = \mathcal{I}, \mathcal{P}_2 = 0$ のとき、標準的な transmission 問題に対する Burton-Miller の定式化と一致し、本論文では BM と呼ぶことにする。注意すべきは、見かけの固有値を生む問題の一つの外部問題 (9) が、外部 Dirichlet 境界値問題となる点である。多くの場合このような問題の固有値は実軸から離れているが、散乱体が Fig. 1 のように波を局在させる形状を持つ凹型の形状であれば、外部 Dirichlet 問題が非常に小さな虚部を持つ固有値を生成する可能性がある。
- **BMBM 型**:$\mathcal{P}_1 = \mathcal{I}, \mathcal{P}_2 = \mathcal{I}$ のとき、外部問題 (9) の境界条件もインピーダンス境界条件となり、凹型の形状であっても「吸収」の効果によって虚部の小さな固有値が現れにくいと期待される (実際、そのように虚部を実軸から引き離す効果は Zheng ら (3) により報告されている)。本論文では、この組み合わせで与えられる境界積分方程式を BMBM と呼ぶことにする。
- **Regularized 型 (Reg)**:$\mathcal{P}_1 = \mathcal{S}_{i\eta_1}^{\mathrm{o}}, \mathcal{P}_2 = \mathcal{S}_{i\eta_2}^{\mathrm{o}}$、ここに $\eta_1, \eta_2 > 0$:Steinbach and Unger(2) において、3 次元問題の場合に $\mathcal{P}_1 = \mathcal{S}_0$ としたとき (8) が、BM 型のものより固有値が実軸から離れる計算結果が報告されており、固有値の分離の効果に期待できる。波数 k_2 に関わるポテンシャルにも、$\beta \times \cdots$ の項を加えているのは BMBM と同じ発想による。なお、導入でも述べた

ように、2 次元問題の場合は $\mathcal{S}_0$ は条件付きで楕円的であるため、ここでは代わりに常に楕円的である湯川ポテンシャル $\mathcal{P}_1 = \mathcal{S}^{\circ}_{i\eta_1}, \mathcal{P}_2 = \mathcal{S}^{\circ}_{i\eta_2}$ を採用する。作用素 $\mathcal{S}^{\circ}_{i\eta_i}$ は陽にかくと

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{S}^{\circ}_{i\eta_i}\phi\right)(x) &= \int_{\partial\Omega_2} G^{\circ}_{i\eta_i}(x,y)\phi(y)\,ds_y \\ &= \int_{\partial\Omega_2} \frac{1}{2\pi} K_0(\eta_i|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\phi(y)\,ds_y\end{aligned}$$

となる (ここに K_0 は 0 次変形 Bessel 関数)。正数 η_1, η_2 の選び方は、後に数値実験により示す。本論文では、この方程式を「Regularized 型 (Reg 型)」と呼ぶ。

3. 数値計算例

3.1. 境界積分作用素の離散化

本論文では、境界が滑らかに媒介変数表示される問題を考え、Hao ら [8] により提示されている Alpert の数値積分公式 [9] を用いた Nyström 法による離散化を行う。これは、境界形状の滑らかな媒介変数表示を用いて、境界積分を 1 次元の積分に帰着させ、各積分点上の関数値を未知量として問題を解く方法である。一重層ポテンシャルが持つ log の特異性は Alpert の数値積分公式により高精度に計算される。一方で、超特異積分作用素 $\mathcal{N}$ をこの方法で直接計算することはできない。そこで、本論文では式 (7) 中の $\mathcal{PN}$ の項は Calderón の式 (例えば文献 [6] の corollary 6.19 を参照 (静的問題)) を用いて以下のように計算する (以下では上付き添字は省略する)。まず、$\mathcal{P} = \mathcal{S}_{i\eta}$ の場合は

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{i\eta}\mathcal{N}_k &= \mathcal{S}_{i\eta}(\mathcal{N}_k - \mathcal{N}_{i\eta}) + \mathcal{S}_{i\eta}\mathcal{N}_{i\eta} \\ &= \mathcal{S}_{i\eta}(\mathcal{N}_k - \mathcal{N}_{i\eta}) + \mathcal{D}^2_{i\eta} - \frac{\mathcal{I}}{4}\end{aligned}$$

上式の右辺の $(\mathcal{N}_k - \mathcal{N}_{i\eta})$ は高々log の特異性しか持たず Nyström 法により計算できる。同様に、$\mathcal{P} = \mathcal{I}$ の場合は、上式の両辺に $\mathcal{S}^{-1}_{i\eta}$ を乗じたものを考えれば良い。本論文では、$\mathcal{N}_k$ 単体の計算には $\eta = 0$ とした $\mathcal{S}_0^{-1}$ を用いる (これは境界が Γ-contour [10] でなければ必ず存在する)。以上の関係式を用いて、BMBM および Reg 型の作用素の計算を行う。ただし、BM 型については上記のように $\mathcal{N}_k$ を陽に計算はせず、弱い特異性だけを持つ同一の固有値分布を持つ定式化 [11] を利用する。本論文では、この定式化を BM2 と呼ぶが、固有値分布は通常の BM と同一であるので、固有値分布を考えるときは単に BM と呼ぶ。

以上のように Nyström 法で計算した離散化積分作用素を組み合わせて式 (7) の離散化版の行列を作成し、固有値問題はその ω に関する非線形固有値問題を櫻井･杉浦法 (SSM、[12]) によって解いて求める。

3.2. 係数 α, β および η_1, η_2 の選び方の一例

係数 α, β および η_1, η_2 の選び方を数値的に検討する。

まず、BM 型、および BMBM 型について、見かけの固有値を生む境界値問題の境界条件が (実波数時の) 放射条件の 1 次近似の形となる選び方に負号をかけたものである $\alpha = -i/k_1$ および $\beta = i/k_2$ を採用する (符号は見かけの固有値を分離できるように考慮されている)。

本論文での、Reg 型のパラメータの選び方を示す。係数 $\alpha = \beta = 0$ であれば (8) および (9) は Dirichlet 問題となり、特に内部問題 (8) は実固有値を持ち、また外部問題 (9) も凹型の形状であれば実軸に近い固有値を持つ可能性が高い。$|\alpha|, |\beta| \to \infty$ の場合も Neumann 問題に近づき同様である。また、$\eta_i \to \infty$ のとき、$\mathcal{S}^{\circ}_{i\eta_i}$ は核関数の強い減衰のためゼロに近づき、Dirichlet 問題に近づくと予想される。したがって、上記の $\alpha, \beta, \eta_1, \eta_2$ には極端な値ではなく、マイルドな有限の値を定めれば良いと予想される。そこで、一般の複素係数では範囲が広すぎるため、α, β は以下の純虚数に制限する。

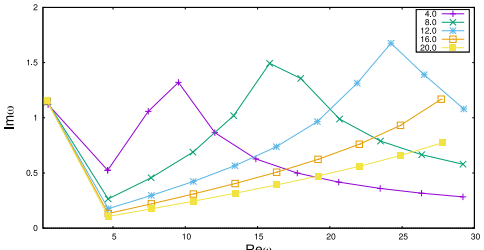
$$\alpha = -ia,\ \beta = ib\ (a, b > 0) \tag{10}$$

パラメータ $\eta_i (i = 1, 2)$ の選択の知見を得るための数値実験を示す。形状を原点中心の円とした場合、固有関数や解、および境界上の関数に境界積分作用素を作用させたものは円の周方向 (角度方向) の Fourier 級数展開で表され、種々の境界積分方程式の固有モードは $e^{in\theta}$ の形に分解され、各固有モードに対応する固有値は容易に決定できる。そこで、Ω_2 が半径 1.1 の原点中心の円であるとし、$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ の場合を考える。この場合、transmission 問題の固有値は存在せず、境界積分方程式の固有値はすべて見かけの固有値となり、上半平面に現れる。まず、$\alpha = -i, \beta = i$ と固定し、また $\eta := \eta_1 = \eta_2$(今は $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ としているため、これらの値は領域によらず同じ値とする) として η を変化させた時の $n = 2$ および $n = 10$ の Reg 型の固有値を複素平面上にプロットし、傾向が見やすいように折れ線で結んだものを Fig. 2(a),(b) にそれぞれ示す。これらの図より、各 η に対して実軸から最も離れる山があり (例えば、$n = 2, \eta = 12$ の場合は $\mathrm{Re}\,\omega = 25$ 付近が最も実軸から離れている)、高周波側 ($\mathrm{Re}\,\omega$ の大きい方) にいくにつれ裾が広がる (実軸に近づく) ことがわかる。また、その山は η が大きくなるに連れ、高周波側へ移動していくことがわかる。そこで、一般には $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ であることを考慮し、η_1, η_2 は波数の実部:$\eta_i = \mathrm{Re}\,k_i = \sqrt{\epsilon_i}\,\mathrm{Re}\,\omega$ とすると良いと考えられる。この選び方は、$\mathcal{S}^{\circ}_{i\eta_i}$ の核関数の引数として現れる $\eta_i|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ が無次元量となることからも、物理的に自然な選び方であると考えられる。ただし、このような選び方を行うと、$\mathcal{S}^{\circ}_{i\eta_i}$ が楕円的であることは保たれるが、SSM による固有値計算で必要とされる係数行列が ω について解析的である性質がなくなり、SSM による固有値計算ができない。そこで、固有値を計算するための SSM の経路を長方形とし、

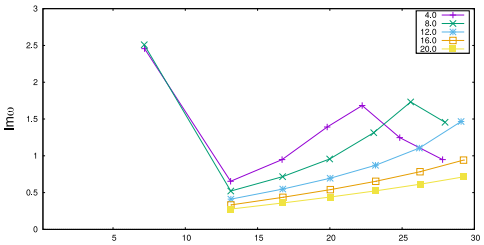
$$\eta_i := (\text{SSM の長方形経路の中心の実部}) \times \sqrt{\epsilon_i}\ (i = 1, 2) \tag{11}$$

と選び、近似的に $\eta_i = \mathrm{Re}\,k_i$ を実現することにする。このように選べば、SSM の経路の中では η_i は定数であり、解析的であるという性質が保持され、SSM による固有値計算が可能となる。Fig. 2(c) は、このような η の選び方を行った場合と、いくつかの固定した η を用いた場合の固有値分布を、実

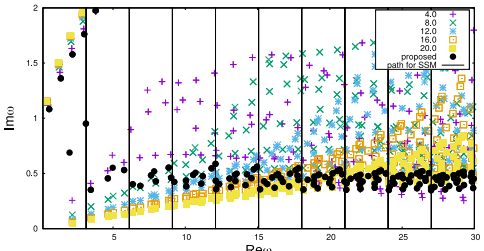
際に境界積分方程式の固有値を計算して (離散化点数 500 とした) 求めた結果を示す。Fig. 2(c) より、ここで提案した η の選択法により得られた固有値 (proposed, 黒丸) は、η を決め打ちにして得られたものよりも、実軸との距離が安定していることがわかる。



(a) $n = 2$



(b) $n = 10$



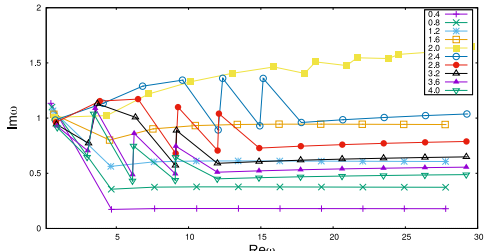
(c) BIEM

Fig. 2 Distribution of the fictitious eigenvalues of the Reg-type BIE with $\alpha = -i, \beta = i$ and various η (circular scatterer, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$). Note that the eigenvalues are plotted with lines in (a) and (b). Subfigures (a) and (b) show $n = 2$ and $n = 10$, respectively, and (c) shows the eigenvalues obtained with the BIEM. Graph legends show the value of η.

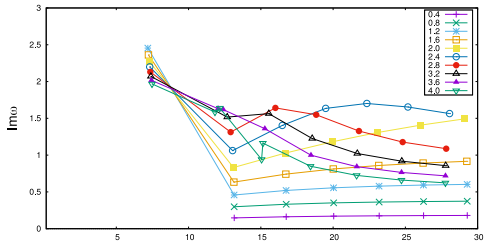
次に、α, β の選択について考える。作用素 $\mathcal{S}$ を $\partial U/\partial n$ に乗じることは、$\partial U/\partial n$ の物理的な次元を U と揃える効果を持つ。したがって、係数 α, β は無次元量とすることが自然と考えられる。BM 型の場合は α, β は領域の波数に依存する形とされるが、Reg 型では上記のように α, β は無次元量とするのが妥当と考えられること、また先述の議論より領域の波数への依存性は η_1, η_2 へ導入することが妥当と考えられることから、本論文では α, β は絶対値が同じ純虚数であるとし

$$\alpha = -ia, \ \beta = ia \ (a > 0) \tag{12}$$

と選ぶことにする。Fig. 3(a),(b) は η_i を (11) のように選び a を変化させたときの、それぞれ $n = 2$ および $n = 10$ の Reg 型の固有値を Fig. 2(a)(b) と同様の形式で示したものである。これらの図より、$a = 2$ のときの固有値分布が全体として実軸から最も離れているように見えるため、本論文ではこれ以降 $\alpha = -2i, \beta = 2i$ と選ぶことにする。



(a) $n = 2$



(b) $n = 10$

Fig. 3 Distribution of the fictitious eigenvalues of the Reg-type BIE for various a (circular scatterer, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$). Note that η is chosen as center of each path of integral for the SSM, and the eigenvalues are plotted with lines in (a) and (b). Subfigures (a) and (b) show $n = 2$ and $n = 10$, respectively. Graph legends show the value of a.

3.3. 定式化の妥当性の検証

解析解を求めることが可能な通常の問題 (固有値問題でない) を実数の ω の範囲で解き、定式化の妥当性を数値的に確認する。ここでは、Reg 型は $\alpha = -2i$, $\beta = 2i$, $\eta_1 = k_1$, $\eta_2 = k_2$ とする (ここでは ω が正の実数であるので η を波数としても差し支えない)。解くべき transmission 問題は、Ω_2 が半径 1.1 の原点中心の円であるとし、$\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 4$ および入射波を

$$u^{\mathrm{inc}}(x) = \sum_{n=-50}^{50} J_n(k_1 r) e^{in\theta} \tag{13}$$

とした問題を考える。ここに J_n は n 次 Bessel 関数で r, θ は x の極座標表示である。Fig. 4 に、離散化点数 100 とし、ω を変化させたときの、種々の積分方程式の以下で定義される相対誤差を示す。

$$\mathrm{error} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} |u_i - u_i^{\mathrm{ana}}|^2}{\sum_{n=1}^{N} |u_i^{\mathrm{ana}}|^2}} + \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} |q_i - q_i^{\mathrm{ana}}|^2}{\sum_{n=1}^{N} |q_i^{\mathrm{ana}}|^2}} \right). \tag{14}$$

ここに、u_i, q_i は $i(= 1, \cdots, N)$ 番目の積分点上の u, q の関数値、上付き添字 $^{\mathrm{ana}}$ は解析解を示す。Fig. 4 より、いずれの定

式化も誤差が大きい ω の近傍 (これらの ω は真の固有値に近い) を除き、精度よく解を得ている。なお、円形の問題でも実軸に近い真の固有値が多数現れるが、これは Ω_2 内部で波速が遅いことにより波が散乱体にとらわれる効果を表すものであり、形状に由来するものではないことを注意しておく。

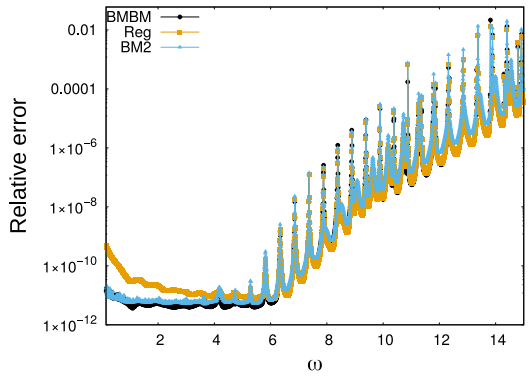


Fig. 4　Relative error in (14) (circular scatterer, $\epsilon = 1, \epsilon_2 = 4$)

3.4. 凹型形状の transmission 問題の固有値

凹型形状の transmission 問題の複素固有値の計算結果を示す。境界 $\partial\Omega_2$ が

$$x_1 = \sum_{i=0}^{5} a_i \cos(i\theta),\ x_2 = \sum_{i=0}^{5} b_i \sin(i\theta) \qquad (15)$$

とかける Fig.1 のような形状とする。ただし、係数 $a_i, b_i (i = 0, \cdots, 5)$ は Table. 1 に示した*。また、$\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 10$ および境界の離散化点数は 1000 点とした。

Fig. 5 に、種々の境界積分方程式で求めたこの問題の固有値を示す。なお、ここでは BMBM、Reg、BM2 に加えて、transmission 問題に対する標準的な境界積分方程式の一つである作用素が以下で表される Müller の定式化の固有値も比較のために掲示している。

$$\begin{pmatrix} \frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)\mathcal{I}}{2\epsilon_1\epsilon_2} - \frac{\mathcal{D}^{\mathrm{o}}_{k_1}}{\epsilon_1} + \frac{\mathcal{D}^{\mathrm{i}}_{k_2}}{\epsilon_2} & \mathcal{S}^{\mathrm{o}}_{k_1} - \mathcal{S}^{\mathrm{i}}_{k_2} \\ -\mathcal{N}^{\mathrm{o}}_{k_1} + \mathcal{N}^{\mathrm{i}}_{k_2} & \frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)\mathcal{I}}{2} + \epsilon_1 {\mathcal{D}^{\mathrm{o}}_{k_1}}^T - \epsilon_2 {\mathcal{D}^{\mathrm{i}}_{k_2}}^T \end{pmatrix}$$

上半平面に見かけの固有値が得られるように係数および基本解を選んでいるため、いずれの定式化も見かけの固有値は上半平面に得られており、真の固有値は下半平面に (定式化によらず同じ位置に) 得られていることがわかる。この問題では、真の固有値は実軸に非常に近い場所に得られている。Müler の定式化と BM(BM2) は極めて実軸に近い見かけの固有値を得ている一方で、Reg 型と BMBM は実軸から離れた位置に見かけの固有値が出現しており、いずれも十分良好な分離特性を示しているが、やや BMBM 型のほうが良好なようである。Steinbach と Unger の 3 次元 Neumann 問題の凹型形状に対する計算 [2] では、Reg 型 (と同一の固有値分布を持つ積分方程式の) のほうが分離性能がよいという結果が示されていたが、今回の 2 次元問題の結果ではシンプルな BMBM のほうがやや性能が良いようである。この結果の背景として、2 次元と 3 次元の違い、用いる一重層ポテンシャルの違い、問題設定の違い、係数の選び方の違い (彼らは係数を波数に依存する形で選んでいない)、など様々な要因が考えられ、一概に評価することは難しいが、少なくとも作用素の積を必要としないシンプルな BMBM だけで分離性能が良い振る舞いを見せたことは、実装の面からは好都合であると考えられる。一方で、湯川型ポテンシャルを用いた場合はパラメータ選択の自由度が高く、実際今回の数値実験でも 3.2 節に示したようにパラメータを適切に選ぶことで、固有値の分離特性を制御できることがわかった。そこで、必ずしも湯川型ポテンシャルを用いる必要のない 3 次元問題においても湯川型ポテンシャルを用いてパラメータを適切に設定することで、静的問題のポテンシャルを用いるよりも分離特性を向上できるのでないかと期待される。当然、このことは今後検証を行う必要があるが、この点において、Reg 型も依然有望かつ興味深い定式化である。

*これらの係数はリング型の形状の Fourier 級数近似により求めた。

Table 1　Coefficients in (15) for Fig. 1.

i	a_i	b_i
0	-3.064764096577138E-002	0.00000000000000
1	0.388433845686800	1.50601097840694
2	1.76625441794311	0.370261740255805
3	-0.114720734160458	0.816223039551295
4	-4.437476608042842E-003	-0.299619197550651
5	-3.369918642548613E-002	-9.285824310853109E-002

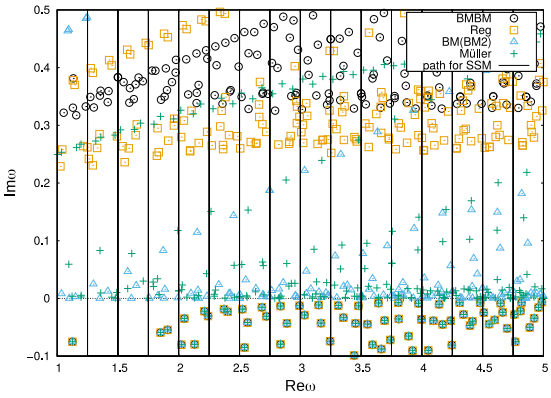


Fig. 5　Eigenvalues obtained with the BIEs for the concave scatterer in Fig. 1 with $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 10$. Eigenvalues in the upper half plane are the fictitious ones.

4. 結言

本論文では 2 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題に対して、(5)-(6) の形で表される境界積分方程式をいくつか取り上げ、各々の見かけの固有値の分離性能を虚部の小さ

な複素固有値を持つ凹型形状の問題に対して数値実験により検討した。数値実験の結果、湯川型ポテンシャルを利用した定式化の凹型形状の transmission 問題における固有値の分離特性が良好であることを確認した。一方、数値計算例は標準的な Burton-Miller の定式化を並べたようなシンプルな定式化のほうがやや分離性能が高いことを示唆した。

今後の課題として、3 次元問題で湯川型ポテンシャルを用いた定式化の固有値の分離性能を確かめることが挙げられる。また、今回は湯川型の一重層ポテンシャルを利用した定式化を行ったが、必ずしも一重層ポテンシャルを用いる必然性はないと考えられ、むしろ楕円的かつ放射条件をうまく近似するような適切な作用素を用いた定式化を行うことが、固有値の分離の観点から望ましいと考えられる。今後の課題として、そのような性質を持つ作用素 $\mathcal{P}$ の検討を行うことも挙げられる。

謝辞:本研究は JSPS 科研費 19K20285 の助成を受けました。ここに記して謝意を表します。また、本論文をご校閲頂き、有益なご意見を頂きました 2 名の匿名の校閲委員に感謝いたします。

5. 付録:見かけの固有値を分離する係数 α, β について

見かけの固有値を生む境界値問題 (8) と (9) の固有値の虚部が正となる条件を考える。ここでは、より複雑な外部問題 (9) の場合を考える。見かけの固有値を、transmission 問題の固有値から分離できる条件は、$\operatorname{Im}\omega \le 0$ のとき、(9) が自明解しか持たず $u \equiv 0$ となる条件を求めれば良い。Ω_2 の内部のある点を中心として、Ω_2 を含む半径 R の円を B_R とし、$\Omega_R := \Omega_1 \cap B_R$ とする。このとき、Ω_R において

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega_R} \overline{u}\left(\Delta + k_2^2\right) u \, dS \\
&= \int_{\partial B_R} \overline{u}\frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \int_{\partial\Omega_2} \overline{u}\frac{\partial u}{\partial n}\, ds \\
&\quad - \int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 \, dS + k_2^2 \int_{\Omega_R} |u|^2 \, dS \\
&\quad \Leftrightarrow \\
&\quad - \overline{\beta \int_{\partial\Omega_2} \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} \mathcal{P}_2 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds} \\
&= \int_{\partial B_R} \overline{u}\frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 \, dS + k_2^2 \int_{\Omega_R} |u|^2 \, dS
\end{aligned}
$$

ここに、境界条件を用いた。作用素 $\mathcal{P}_2$ は楕円的であるので左辺の積分の複素共役は外すことができ、上式の虚部をとると

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\beta \int_{\partial\Omega_2} \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} \mathcal{P}_2 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \\
&= \operatorname{Im} \int_{\partial B_R} \overline{u}\frac{\partial u}{\partial n}\, ds + 2 \operatorname{Re} k_2 \operatorname{Im} k_2 \int_{\Omega_R} |u|^2 \, dS
\end{aligned}
$$

$\operatorname{Im}\omega \le 0$ の場合の放射条件 (内向き放射条件であることに注意) より、$R \to \infty$ で上式の右辺第一項はゼロに近づくので、結局

$$
\operatorname{Im}\beta \int_{\partial\Omega_2} \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} \mathcal{P}_2 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 2 \operatorname{Re} k_2 \operatorname{Im} k_2 \int_{\Omega_\infty} |u|^2 \, dS
$$

である。上式において、$\operatorname{Re} k_2 > 0$, $\operatorname{Im} k_2 \le 0$ であり、左辺の積分は楕円的であることから正の数であるので、$\operatorname{Im}\beta > 0$ であるならば $u \equiv 0$ となるため、固有値は正の虚部を持つ。同様に、内部問題を考えて式 (8) の固有値が正となる条件は $\operatorname{Im}\alpha < 0$ であることがわかる。

参考文献

(1) R. Misawa, K. Niino, and N. Nishimura, Boundary integral equations for calculating complex eigenvalues of transmission problems, SIAM J. Appl. Math., 77 (2017), pp. 770–788.

(2) O. Steinbach and G. Unger, Combined boundary integral equations for acoustic scattering-resonance problems, Math. Methods Appl. Sci., 40 (2017), pp. 1516–1530.

(3) C.-J. Zheng, C.-X. Bi, C. Zhang, Y.-B. Zhang, and H.-B. Chen, Fictitious eigenfrequencies in the BEM for interior acoustic problems, Eng. Anal. Bound. Elem., 104 (2019), pp. 170–182.

(4) A. Buffa and R. Hiptmair, Regularized combined field integral equations, Numer. Math., 100 (2005), pp. 1–19.

(5) A. J. Burton and G. F. Miller, The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 323 (1971), pp. 201–210.

(6) O. Steinbach, Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems: finite and boundary elements, Springer, 2008.

(7) O. Steinbach and L. Tchoualag, Fast Fourier transform for efficient evaluation of Newton potential in BEM, Appl. Numer. Math., 81 (2014), pp. 1–14.

(8) S. Hao, A. H. Barnett, P.-G. Martinsson, and P. Young, High-order accurate methods for Nyström discretization of integral equations on smooth curves in the plane, Adv. Comput. Math., 40 (2014), pp. 245–272.

(9) B. K. Alpert, Hybrid Gauss-trapezoidal quadrature rules, SIAM J. Sci. Comput., 20 (1999), pp. 1551–1584.

(10) M. A. Jaswon, Integral equation methods in potential theory. I, Proc. Roy. Soc. London Ser A, 275 (1963), pp. 23–32.

(11) 三澤亮太, 西村直志, Burton-Miller の定式化と同一の複素固有値を持つ Nyström 法に適した 2 次元 Helmholtz 方程式の境界積分方程式について, 計算数理工学論文集, 19 (2019), pp. 61–66.

(12) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and K. Kimura, A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, JSIAM Lett., 1 (2009), pp. 52–55.