計算数理工学論文集 Vol. 20 (2020 年 12 月)，論文 No. 13-201219 JASCOME

密度法に基づくトポロジー最適化における ヤング率の定義式に対するシグモイド関数の適用

APPLICATION OF SIGMOID FUNCTION FOR DEFINITION EQUATION OF YOUNG'S MODULUS IN TOPOLOGY OPTIMIZATION BASED ON THE DENSITY METHOD

岸田 真幸 [1)]，倉橋 貴彦 [2)]

Masayuki KISHIDA and Takahiko KURAHASHI

1) 長岡技術科学大学大学院工学研究科 (〒 940-2188 長岡市上富岡町 1603-1, E-mail: s173029@stn.nagaokaut.ac.jp)

2) 長岡技術科学大学大学院工学研究科 (〒 940-2188 長岡市上富岡町 1603-1, E-mail: kurahashi@mech.nagaokaut.ac.jp)

This paper describes numerical studies carried out to enhance the definition equation of Young's moduls for use in topology optimization based on the density method incorported the sigmoid function that is commonly used in machine learning. Topology optimization is the most flexible type of structure optimization because it optimizes the material's layout or form within a given design space. However, when applying topology optimization based on the density method, the suppression of intermediate materials, termed grayscale, is needed to enable efficient manufacturing. We investigated the optimal shape for a cantilever beam model using the Solid Isotropic Material with Penalization method and our density method with the sigmoid function. The results of suppression of intermediate materials and the performance function are described when forces are added to the model as part of the static problem. In this study, we use topology optimization theory applying the optimality criteria method and the filter approach.

Key Words: Topology optimization, Density method, Grayscale, Finite element method

1. 緒言

近年，材料費の削減や性能の向上のために，構造最適化理論により得られた結果を基に製品開発が行われるようになってきた．構造最適化とは，ある条件下で最大もしくは最小の性能を得る構造を求める手法であり，寸法最適化 (1)・形状最適化 (2)・トポロジー最適化 (3) の 3 つに分類される．その中で，トポロジー最適化は，特定の設計空間に外形形状だけでなく構造の形態をも変更できるため，最も自由度の高い手法であり，性能の大幅な改善が期待できる．トポロジー最適化の中でも様々な手法があるが，本研究では材料的アプローチである密度法 (4) を用いた場合のトポロジー最適化について述べる．密度法は，簡易的な手法であり，ヤング率を無次元密度（以降，密度と略す.）の関数により定義する手法である．これにより，密度が 0 の場合では空気もしくは材料なしを意味し，密度が 1 の場合では固体もしくは材料ありを意味する．しかし，それ以外の値では，Fig.1 に示すグレースケールと呼ばれる中間材料を表してしまい意味を持たない．こうしたことから，工業的価値を高めるためにもグレースケールを減らす必要がある．加えて，密度法には Fig.2 に示すチェッカーボードと呼ばれる市松模様を含む形態が最適解となってしまう場合があり，製造不可能な構造が最適解となる．そのため，本研究では感度に対してフィルタリングをすることにより，チェッカーボード問題を解決している．一方，フィルタリング (5) を適用することによりグレースケールが増える可能性がある．すなわち，グレースケールの抑制とチェッカーボードの抑制はトレードオフの関係にある．本研究の目的としては，機械学習の分野で 2 値化のために使われるシグモイド関数を適用したヤング率の定義式を提案し，従来の密度法の 1 つである SIMP 法 (6) と比較し，ヤング率の定義式の変更といった簡易的な手法によるグレースケールの抑制について比較検討する．また，本論文では，感度に対してフィルタリング処理を適用した場合と，Heviside Projection Method(7)（以降，HPM と略す.）を適用した場

2020 年 10 月 26 日受付，2020 年 11 月 11 日受理

合の２つの結果を述べている．詳細に関しては，第２章でトポロジー最適化の定式化，第３章で本解析の流れ，第４章で数値解析例について述べる．

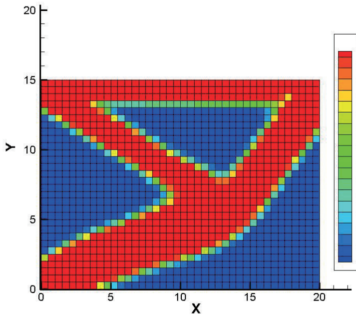


Fig. 1: Grayscale.

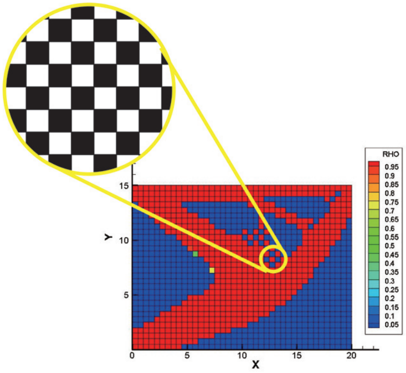


Fig. 2: Checkerboard pattern.

2. 構造におけるトポロジー最適化

本章では，定常問題における構造を対象としたトポロジー最適化の定式化について説明する．

2.1. 密度法に基づくトポロジー最適化の定式化

本解析では，設計領域 Ω における目標体積 V_f を満たすようにひずみエネルギーが最小となる密度分布を求めることを目的とする [8, 9]．式 (1) にひずみエネルギーを表す評価関数を，式 (2) に等方弾性体における離散化された支配方程式をそれぞれ示す．加えて，式 (3) に示す体積制約と式 (4) に示す密度制約を用いる．密度法に基づくトポロジー最適化では，設計変数は設計領域 Ω で定義された密度 ρ_e である．密度法は，各要素の剛性マトリックスが密度の関数であることを前提としており，その密度の値は 0〜1 の範囲の値とする．したがって，最適化問題は次のよう問題とする．

$$\text{minimize} \quad J = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{u\}^T [K(E(\rho_e))] \{u\} d\Omega \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad \int_{\Omega} [K(E(\rho_e))] \{u\} d\Omega = \int_{\Omega} \{f\} d\Omega \tag{2}$$

$$V = \int_{\Omega} \frac{\rho_e v_e}{V_{total}} d\Omega - \overline{\rho_0} \leq 0 \tag{3}$$

$$0 \leq \rho_e \leq 1 \tag{4}$$

ここで，$[K]$，$\{u\}$，$\{f\}$ は，剛性マトリックス，変位ベクトル，荷重ベクトルをそれぞれ表す．また，v_e，V_{total}，$\overline{\rho_0}$ は，要素 e の体積，設計領域 Ω の総体積，設計領域 Ω における初期密度の平均をそれぞれ表す．ひずみエネルギーの最小化である目的を達成する密度 ρ_e を探索するために，ラグランジュ未定乗数法を用いる．ラグランジュ未定乗数法により得られる随伴方程式より，$-[K]^T\{\lambda\} = \{f\}$ という式が導き出され，剛性マトリックスの対称性より，$-[K]\{\lambda\} = \{f\}$ となる．したがって，式 (2) で示した支配方程式と前述した式の関係より，$\{\lambda\} = -\{u\}$ が成り立つ．これを自己随伴と呼ぶ．この自己随伴を用いて，次式のように密度に対するラグランジュ関数 L の勾配である感度を計算する．

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \rho_e} &= \frac{1}{2} \{\lambda\}^T \frac{\partial [K(E(\rho_e))]}{\partial \rho_e} \{u\} \\ &= -\frac{1}{2} \{u\}^T [B]^T \frac{\partial [D(E(\rho_e))]}{\partial \rho_e} [B] \{u\} \end{aligned} \tag{5}$$

ここで，剛性マトリックス $[K]$ は，B マトリックスと D マトリックスにより求められる．本研究では，3 次元等方弾性体を取り扱っており，ヤング率 E の定義式に関しては，次節以降にて説明をする．前述したように，密度法におけるトポロジー最適化では，フィルタリングを適用することで，隣接する要素同士を平滑化でき，Fig.2 で示されたチェッカーボードを抑制することができる．一方，フィルタリングを適用することで，Fig.1 で示されたグレースケールと呼ばれる中間材料を表す要素が最適化構造の周囲に表れる問題がある．そのため，式 (6) に示す密度に対するラグランジュ関数の感度にフィルタリング [10] を適用する．また，フィルタリングの範囲 [11, 12] に関しては，Fig.3 および式 (7) で示すように自然座標系においてフィルタリング半径 R によって決定される．

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{j \in \Omega_f} w(\boldsymbol{x_j}) \frac{\rho_j}{v_j} \frac{\partial L}{\partial \rho_j}}{\frac{1}{v_e} \sum_{j \in \Omega_f} w(\boldsymbol{x_j}) \rho_j} \tag{6}$$

上式の重み係数 w は，次式で表される．

$$w(\boldsymbol{x_j}) = R - \|\boldsymbol{x_j} - \boldsymbol{x_e}\| \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ および Ω_f は，ある要素の自然座標系の座標およびフィルタリング領域を表す．また，添え字 j および e は，隣接する要素 j およびフィルタリングを適用する要素 e を意味する．

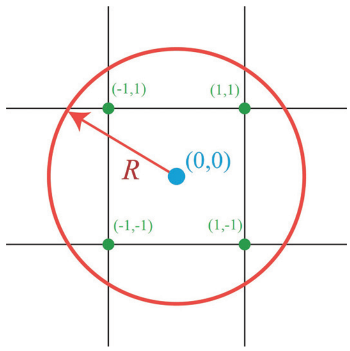


Fig. 3: Filtering domain.

フィルタリングにより平滑化された感度を用いて，再度式

(3) に示した体積制約を考慮した密度に対するラグランジュ関数の感度を求める．その後，KKT 条件より得られる最適性基準法 [13] に基づき，次式で示すような密度更新を行う．

$$\begin{aligned}\rho_e^{(k+1)} &= \rho_e^{(k)} \left(\frac{\frac{\partial L}{\partial \rho_e}^{(k)}}{-\Lambda^{(k)} \frac{\partial V}{\partial \rho_e}^{(k)}} \right)^{\eta} \\ &= \rho_e^{(k)} \left(A_e^{(k)} \right)^{\eta} \end{aligned} \tag{8}$$

ここで，η および Λ は，ダンピングパラメータおよびラグランジュ未定乗数を表しており，Λ は 2 分法により求まる．密度更新式のみの場合では，式 (4) である密度制約を満たさない可能性があるため，次式を 2 分法で探索する計算の中に側面制約として考慮する必要がある．

$$\rho_e^{(k+1)} = \begin{cases} \rho_e^{L(k)} & \left(\rho_e^{(k)} \left(A_e^{(k)}\right)^{\eta} \le \rho_e^{L(k)}\right) \\ \rho_e^{U(k)} & \left(\rho_e^{(k)} \left(A_e^{(k)}\right)^{\eta} \ge \rho_e^{U(k)}\right) \\ \rho_e^{(k)} \left(A_e^{(k)}\right)^{\eta} & (otherwise) \end{cases} \tag{9}$$

$$\rho_e^{L(k)} = \max\left\{\rho_e^{(k)} - \varsigma, 0\right\} \tag{10}$$

$$\rho_e^{U(k)} = \min\left\{\rho_e^{(k)} + \varsigma, 1\right\} \tag{11}$$

ここで，ς は，密度のムーブリミットを表す．

2.2. SIMP 法に基づくヤング率の定義式

本節では，密度法の中の 1 つである SIMP 法に基づくヤング率の定義式について述べていく．まず，密度法とは，仮想的な密度を要素もしくは節点に与え，材料が要素もしくは節点に分布しているかどうかを表すために用いられる手法である．こうしたことから，密度法は材料的アプローチ手法であり，トポロジー最適化の中で比較的容易な手法である．また，一般的に初期密度は一様に与えられる．本研究では，要素内に密度を与え，次式より要素のヤング率を定義する [14]．

$$E = E_0 f(\rho_e) \tag{12}$$

ここで，E_0 は，ある材料のヤング率を表している．しかし，式 (12) で示した定義式では，数値的不安定性が生じてしまうため，次式のように再定義する．

$$E = (E_0 - E_{min}) f(\rho_e) + E_{min} \tag{13}$$

この式の E_{min} は，有限要素解析において数値的不安定性を回避するためのパラメータであり，E_0 と比べ極めて小さな値を取る．式 (13) より，$f(\rho_e)$ は密度が 0 に近い値を取るとき，ヤング率は E_{min} に近い値になり，その要素は空気もしくは材料なしを意味する．一方，密度が 1 に近い値を取るとき，ヤング率は E_0 に近い値になり，その要素は固体もしくは材料ありを意味することになる．密度がそれ以外の値の場合では，ヤング率の値が材料ありもしくはなしのどちらでもなくなることから，中間材料となり工学的意味を持たない．

SIMP 法は，次式に示すように密度のべき乗によりヤング率を表す手法であり，密度値が 0 から 1 の範囲で等方弾性体としての挙動を表している．

$$f(\rho_e) = \rho_e^p \tag{14}$$

ここで，p はペナルティパラメータと呼ばれ，一般的に $p \ge 3$ となるように設定される．また，ペナルティパラメータの値が増加すると，グレースケールが減少することは周知されている [15]．しかし，ペナルティパラメータが高すぎたり低すぎたりすると，チェッカーボード，グレースケール，収束判定，数値的不安定性など様々な問題が出てくる．

2.3. 密度法のヤング率の定義式に対するシグモイド関数の適用

本節では，今回提案するシグモイド関数を適用した密度法のヤング率の定義式について述べる．シグモイド関数とは，機械学習の分野において分類のための活性関数として用いられる関数である．例として，ある情報からそれが犬か犬ではないかを判断するために用いられる．この関数の特性を利用して，Fig.4 に示すように，材料ありかなしかを判断するためにヤング率を定義する関数 $f(\rho_e)$ に適用する．

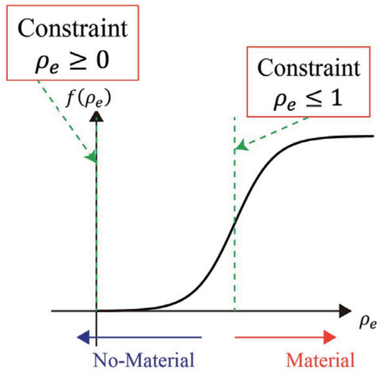


Fig. 4: Image of the sigmoid function.

シグモイド関数を適用した密度法のヤング率の定義式は，次のように導出を行う．その際に，変数を設計変数 ρ_e とする．まず，式 (15) に示すシグモイド関数の曲線であるシグモイド曲線の共通通過点である点 (0,0.5) が原点を通るように式変形を行うと，式 (16) のようになる．

$$g_1(\rho_e) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha\rho_e)} \tag{15}$$

$$g_2(\rho_e) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \exp(-\alpha\rho_e)}{1 + \exp(-\alpha\rho_e)} \tag{16}$$

その後，座標 (1.0.5) および座標 (-1.-0.5) を通るようにスケーリングをし，原点が座標 (1,0.5) に，座標 (-1.-0.5) が原点を通るように再度式変形を行うことで，式 (17) が得られる．しかし，このままでは，式 (17) のグラフの傾きである感度は 0 にならない可能性があるため，密度更新を繰り返しても密度の値は 0 にならない．そのため，式 (18) を用いることで，密度 ρ_e が 0 の時，感度 $\frac{\partial f(\rho_e)}{\partial \rho_e}$ が 0 となり，密度 ρ_e が 1 の時，感度 $\frac{\partial f(\rho_e)}{\partial \rho_e}$ が $0 \le \rho_e \le 1$ の範囲で最大値となる．

$$g_3(\rho_e) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1 - \exp(-\alpha\rho_e + \alpha)}{1 + \exp(-\alpha\rho_e + \alpha)} \cdot \frac{1 + \exp(-\alpha)}{1 - \exp(-\alpha)}\right) \tag{17}$$

$$f(\rho_e) = -4\left(g_3(\rho_e)\right)^3 + 6\left(g_3(\rho_e)\right)^2 \tag{18}$$

ここで，α は材料の挙動を表していることから，本論文では材料挙動パラメータと呼ぶ．前述した通り，SIMP 法におけるペナルティパラメータの値を高くすることで，密度の勾配の最大値が大きくなることが要因となり，グレースケールの数が減少する．そのため，この材料挙動パラメータ α の設定は，$\rho_e = 1$ の時の SIMP 法における密度の勾配の最大値と同じ値になるように設定している．

SIMP 法と今回提案するシグモイド関数を適用した密度法の関数グラフを Fig.5 に示し，感度を表す関数の密度勾配のグラフを Fig.6 に示す．本論文では，グレースケールの抑制を確認するために，ヤング率の値が高い範囲である $0.9 < \rho_e \leq 1$ では材料ありを意味するものとし，ヤング率が限りなく 0 に近い範囲である $0 \leq \rho_e \leq 0.2$ では材料なしを意味する．その他の範囲である $0.2 < \rho_e \leq 0.9$ をグレースケールと定義する．Fig.6 の青色の直線は，上記で述べた範囲を表している．また，Fig.6 より，グレースケールの範囲の感度 $\frac{\partial f(\rho_e)}{\partial \rho_e}$ の最大値および最小値の差を Table2 に示す．

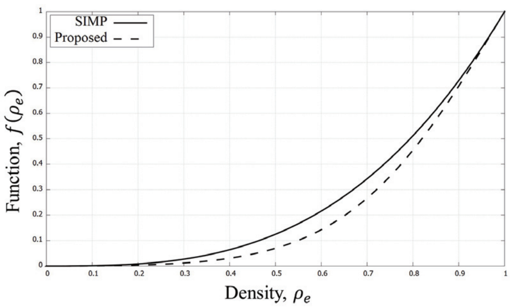


Fig. 5: Relationship between the function $f(\rho_e)$ and density ρ_e using the SIMP method and our proposed method with the sigmoid function.

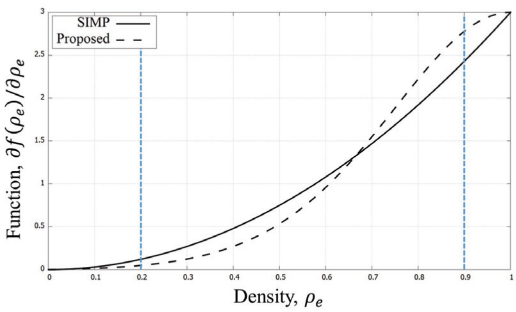


Fig. 6: Relationship between the function $\frac{\partial f(\rho_e)}{\partial \rho_e}$ and density ρ_e using the SIMP method and our proposed method with the sigmoid function.

Table 1: Relationship between density and material.

Density value	In element
$0 \leq \rho_e \leq 0.2$	No-material or Air
$0.2 < \rho_e \leq 0.9$	Intermediate material
$0.9 < \rho_e \leq 1$	Material or Solid

Table 2: The difference value of the gradient in grayscale area.

Method	SIMP	Proposed
$\frac{\partial f(\rho_e)}{\partial \rho_e}\Big\|_{\rho_e=0.9} - \frac{\partial f(\rho_e)}{\partial \rho_e}\Big\|_{\rho_e=0.2}$	2.310	2.731

2.4. Heaviside Projection Method

本節では，代表的なグレースケールの抑制手法の 1 つである HPM について述べる．従来のトポロジー最適化とは異なり，設計変数を後述するプロジェクション関数を用いて写像をした後に，要素ごとに正規化された密度関数を配置する手法である．本研究では，物体領域に最小寸法制約を課す場合の流れを以下に示す [16]．式 (19) に示すプロジェクション関数を用いて，フィルタされた密度 ρ_F を求める．

$$\rho_F = \frac{\sum_{j \in \Omega} \rho_e w(\boldsymbol{x_j})}{\sum_{j \in \Omega} w(\boldsymbol{x_j})} \tag{19}$$

式 (19) の重み係数 w は，式 (7) により得られる．さらに，ヘヴィサイド関数を用いて正規化された密度を求める．

$$\rho_H = \begin{cases} 1 & (\rho_F > 0) \\ 0 & (\rho_F = 1) \end{cases} \tag{20}$$

式 (20) のままでは，関数の不連続性より密度更新のための感度の算出が不可能である．そのため，式 (21) より平滑化されたヘヴィサイド関数を算出する．

$$\rho_H = 1 - \exp(-\beta \rho_F) + \rho_F \exp(-\beta) \tag{21}$$

ここで，β はヘヴィサイド関数の曲率を表すパラメータである．このパラメータは，β が 0 の時，平滑化されたヘヴィサイド関数は線形になり，β が増加するに従いヘビサイド関数に近づくという特性を持つ．また，式 (21) で得られる平滑化されたヘヴィサイド関数は正規化した密度 ρ_e として扱う．

HPM を用いる際，設計変数である密度 ρ_e は $\rho_e(\rho_H(\rho_F))$ となることから，評価関数および体積制約に関する感度の計算の時には，以下のような連鎖律を用いて表すことにする．

$$\frac{\partial E}{\partial \rho_e} = \frac{\partial E}{\partial \rho_H} \frac{\partial \rho_H}{\partial \rho_F} \frac{\partial \rho_F}{\partial \rho_e} \tag{22}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_e} = \frac{\partial V}{\partial \rho_H} \frac{\partial \rho_H}{\partial \rho_F} \frac{\partial \rho_F}{\partial \rho_e} \tag{23}$$

3. トポロジー最適化のフローチャート

本研究で用いたトポロジー最適化の流れを以下に示す.

1). 解析モデル，初期条件，計算条件などを設定する.

2). 式 (2) に示された線形弾性体における支配方程式を解き，変位を算出する.

3). ステップ 2). で求めた変位を用いて，式 (1) に示された評価関数を計算する.

4). $k > 0$ の時，収束判定式 $\left| J^{(k)} - J^{(k-1)} \right| / J^{(0)} < \epsilon$ を満たした場合，計算を終了し，そうでない場合は次のステップへ進む.

5). 自己随伴関係である $\{\lambda\} = -\{u\}$ を用いて，式 (5) に示された密度に対するラグランジュ関数の感度を計算する.

6). ステップ 5). で求めた感度を用いて，式 (6) に示されたフィルタリングを行う.

7). 式 (8) に示された最適性基準法に基づく密度更新式を用いて密度を更新し，ステップ 2). に戻る.

本解析では，グレースケールの抑制のため評価関数の収束判定値を厳しく設定している．そのため，解析例によっては，評価関数の値が振動し収束しない場合が存在する．このことから，最大反復回数 k_{max} を設定しており，最大反復回数を超える場合にはその時点で解が収束したと判定している．上記の流れは HPM を用いない場合であり，HPM 用いる場合はステップ 6) を実施しないものとする．また，β は上限値を 50 とし，$\beta^{(k)} = \beta^{(k-1)} + \Delta\beta$ とする．パラメータ設定として，β の初期値は 0 とし，$\Delta\beta = 1.1^k$ とする．ここに，$\Delta\beta$ の計算において k は乗数である.

4. 数値解析例

本章では，前述した SIMP 法および今回提案するシグモイド関数を適用した密度法に基づくトポロジー最適化の結果について述べていく．例題として，等方弾性体の 3 次元片持ちはりモデルを用いる．詳細に関しては，本章の 1 節に解析条件，2 節に数値解析結果の一例について述べる.

4.1. 解析条件

本解析では，Fig.7 に示すような等方弾性体の 3 次元片持ちはりモデルを対象としており，Y-Z 面で完全固定をし，先端に 10[N/mm] 等分布荷重を与えている．また，はりの寸法は 40.0[mm]×8.0[mm]×20.0[mm] とし，要素の寸法は 1 辺が 0.25[mm] の立方体となるように分割している．計算条件は，Table3 に示す．前述した通り，材料挙動パラメータ α は，SIMP 法と比較するための値を 2 分法により求めて設定している．その結果の詳細に関しては，次節にて述べていく.

4.2. 数値解析結果の一例

本節では，前述した片持ち梁モデルを対象にした際の解析結果について述べていく．Figs.8，9 に，感度に対してフィルタリング処理を適用した場合と，HPM を適用した場合のトポロジー最適化解析の結果である収束時の密度分布をそれぞ

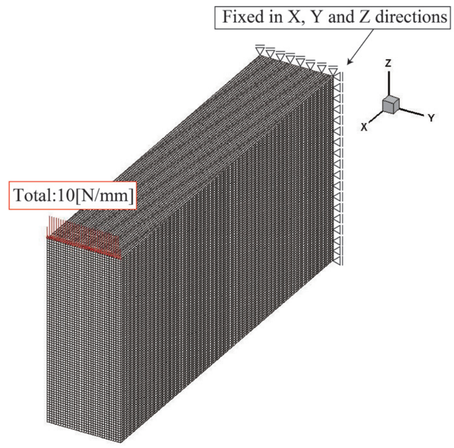


Fig. 7: Computational model and boundary conditions for a cantilever beam model.

Table 3: Computational condtions in common.

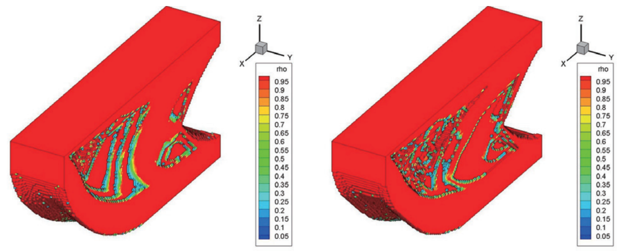
Element type	8-node hexahedron
Number of elements	409600
Number of nodes	430353
Initial density average, $\overline{\rho_0}$	0.5
Penalization parameter, p	3.0
Damping parameter, η	0.75
Move limit of density update, ς	0.15
Filter radius, R	2.0
Convergence criterion, ϵ	10^{-7}
Maximum number of iterations, k_{max}	200
Young's modulus, E_0[GPa]	20.2
Poisson ratio, ν	0.37

れ示しており，それぞれの図には，3D モデルを対象としていることから，等角図，底面図，正面図，側面図の 4 つの図を示している．それぞれの密度分布の図の左側が SIMP 法に基づくトポロジー最適化の結果であり，右側が今回提案したシグモイド関数を適用した密度法に基づくトポロジー最適化の結果である．ただし，結果を見やすくするために，密度 0.2 以下の要素は非表示にしている．Tables4，5 に，2 つの手法の比較を行うために，収束時の密度分布における材料ありを意味する要素の数，中間材料を意味する要素の数，材料なしを意味する要素の数，収束時の評価関数，次式により得られる 2 つの手法の評価関数の増減率 ζ をそれぞれ示す．

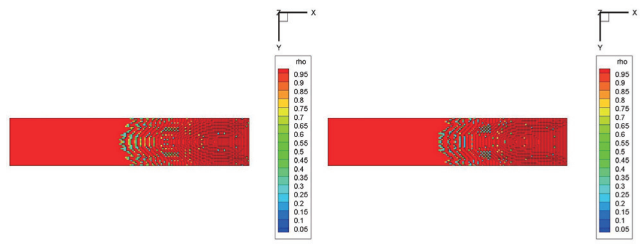
$$\zeta = \frac{J_{Sigmoid} - J_{SIMP}}{J_{SIMP}} \times 100 \tag{24}$$

ここで，$J_{Sigmoid}$ および J_{SIMP} は，今回提案したシグモイド関数を適用した密度法および SIMP 法を用いた際に得られる収束時の評価関数である．それぞれの初期密度平均に対する評価関数の収束履歴に関しては，Fig.10 に示す．

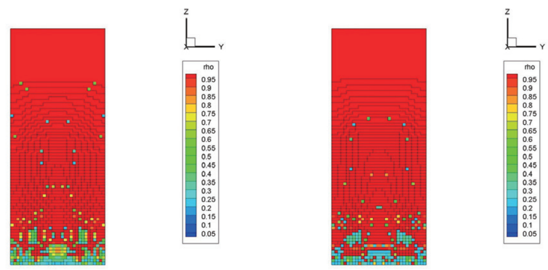
まず，密度分布の結果および考察について述べていく．Figs.8，9 に示した密度分布の結果から，異なるフィルタリング手法を用いた際に，左図である SIMP 法を適用した場合の結果と右図である提案手法を適用した場合の結果は，すべて異なる密度分布が得られた．Figs.8d，9d に示した側面図の結果と Tables4，5 のそれぞれの密度の分布数より，提案した手法では，従来の SIMP 法と比べ，構造内にグレースケールである中間材料が少なく分布しており，グレースケールの抑制効果の結果が見られる．その理由として，Fig.6 および Table2 に示した密度に対する勾配すなわち感度が影響している．提案した手法では，SIMP 法と比べ，材料なしの密度を表すときの感度は限りなく 0 に近い値を取り，材料ありの密度を表すときの感度は高い値を取っているため，同じフィルタリング処理を適用した際に，従来の手法よりも密度分布の 2 値化ができたと言える．一方で，Fig.9 より，HPM を用いた際の提案した手法の密度分布の結果はグレースケールの抑制はできたものの，最適構造として適切であるような解ではないと見える．理由としては，次に述べる評価関数より考察できる．Fig.10 に示した評価関数の収束履歴より，すべての条件下で収束していることが分かり，Tables4，5 より，提案した手法を適用した際の収束時の評価関数は，SIMP 法を適用した際の収束時の評価関数と比べ，ほぼ同じになっていることが分かる．また，HPM を用いた際の提案した手法の評価関数の履歴より，開始から 20 回目までのイタレーションにおいて，評価関数が振動しているように見られる．このことから，他の結果とは異なり安定して解を求めれていないことが分かる．本研究では，参考文献 [17] とは，設計変数およびペナルティパラメータの与え方，閾値を設定していない点，ロバスト性を考慮していない点など異なる点が多々あるため，HPM を適用した際にグレースケールの要素数が感度のフィルタリングを適用した際よりも多くなる結果になってしまった．しかし，どちらの手法に対しても提案したヤング率の定義式は有効であるといった結果が得られた．以上のことから，今回提案したシグモイド関数の特性を適用した密度法は，中間材料であるグレースケールの抑制，密度分布の集中化の効果があることが明らかになった．



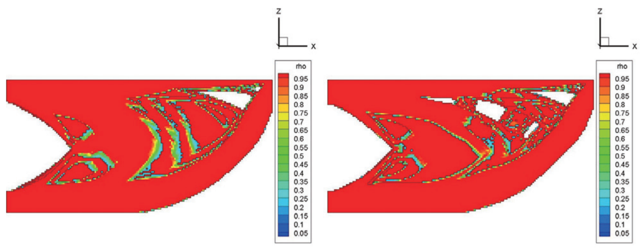
(a) Isometric views.



(b) Bottom views.

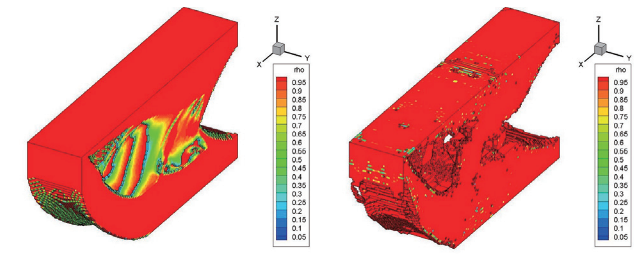


(c) Front views.

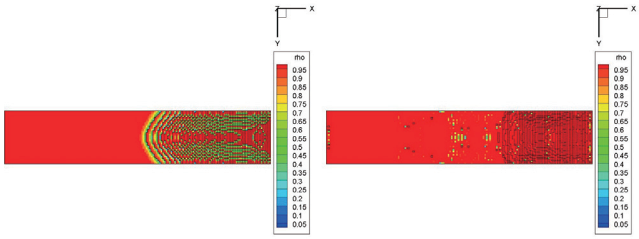


(d) Side views.

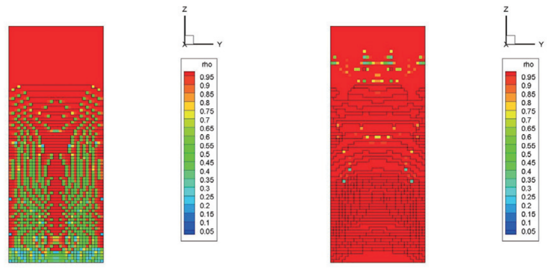
Fig. 8: Structures at convergence using the SIMP method and our proposed method with sensitivity filter.



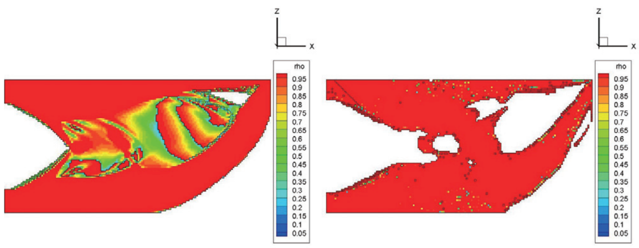
(a) Isometric views.



(b) Bottom views.



(c) Front views.



(d) Side views.

Fig. 9: Structures at convergence using the SIMP method and our proposed method with HPM .

Table 4: The number of density distribution, performance function J and the ratio ζ when sensitivity filter is employed.

	SIMP	Proposed
No-material	202312	202956
Intermediate material	6006	4768
Material	201282	201876
Performance function, J[J]	0.041623	0.041932
Ratio ζ[%]	0.743	

Table 5: The number of density distribution, performance function J and the ratio ζ when HPM is employed.

	SIMP	Proposed
No-material	219470	209627
Intermediate material	14228	1184
Material	175902	198789
Performance function, J[J]	0.018549	0.021734
Ratio ζ[%]	3.858	

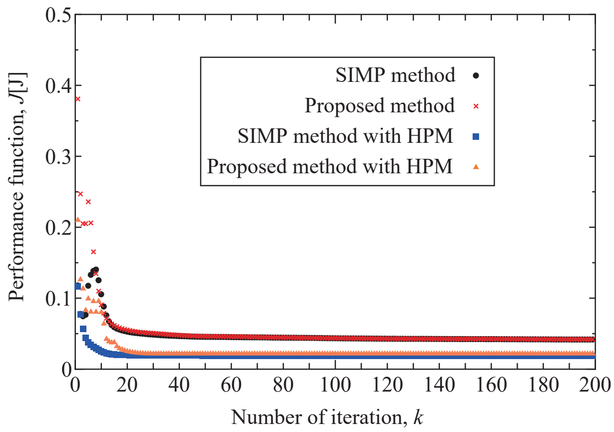


Fig. 10: Convergence history performance function when using the SIMP method and our proposed method.

5. 結言

本論文では，シグモイド関数を適用した密度法に基づくトポロジー最適化におけるヤング率の定義式への提案を行った．評価関数はひずみエネルギーとし，ひずみエネルギー最小化となるような構造を求めた．フィルタリングには密度の感度に対して行い，密度の更新式には最適性基準法を用いた．片持ちはりモデルを対象として，従来の手法であるSIMP法と今回提案したシグモイド関数の特性を用いた密度法をそれぞれ適用したトポロジー最適化の数値実験を実施し，比較を行った．それにより，異なるフィルタリング手法においても，中間材料を意味する要素の数が減少し，材料ありまたはなしの要素の数が増加することが確認できた．このことから，本研究の目的である工業的に意味を持たないグレースケールの要素の数を抑制することができたと言える．さらに，評価関数は異なるフィルタリング手法においても，SIMP法を適用した時とほぼ同じになるという結果が得られた．以上のことから，機械学習の分野で用いられるシグモイド関数のある値を基に判別する特性は，トポロジー最適化の密度法に対しても有効であることが明らかになった．本論文では，グレースケールの抑制傾向は確認できたものの実問題に適用するには前章で述べた多くの問題がある．また，SIMP法を適用したHPMを用いた際の結果は，参考文献とは異なりグレーススケールの抑制効果が見られなかった．理由として，設計変数の与え方，閾値の設定，ロバスト性を考慮していない点など異なる点も多々ある．以上の点は，今後の課題とする．

なお，本研究を行うにあたり，科学研究費補助金（基盤(C)）18K03897の援助およびオイレス工業株式会社の助成金を受けた．また，本論文中に示した数値計算を行うにあたり，九州大学情報基盤研究開発センターの高性能演算サーバーシステムを利用させて頂いた．ここに謝意を表す．

参考文献

(1) W. Prager：A note on discretized michell structures, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **3**(1974), pp. 349–355.

(2) O. C. Zienkiewicz and J.S. Campbell：Shape optimization and sequential linear programming, in optimum structural design, Optimum Structural Design, (1973), pp. 109–126.

(3) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi：Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **71**(1988), pp. 891–909.

(4) R. Yang and C. Chuang：Optimal topology design using linear programming, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **5(2)**(1994), pp. 265–275.

(5) O. Sigmund：Morphology-based black and white filters for topology optimization, Structure and Multidisciplinary Optimization, **33(4)**(2007), pp. 401–424.

(6) M. P. Bendsøe and O. Sigmund：Material interpolation scheme for minimum compliance topology optimization, Archive of Applied Mechanics, **69(9)**(1999), pp. 635–654.

(7) J. K. Guest, J. H. Prvost and T Belytschko：Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **61(2)**(2004), pp. 238–254.

(8) W. Prager and J. Taylor：Problems of optimal structural design, Journal of Applied Mechanics, **35(1)**(1968), pp. 102–106.

(9) C. Sheu and W. Prager：Minimum-weight design with piecewise constant specific stiffness, Journal of Optimization Theory and Applications, **2(3)**(1968), pp. 179–186.

(10) O. Sigmund：On the design of compliant mechanics using topology optimization, Journal of Structural Mechanics, **25(4)**(1997), pp. 493–524.

(11) B. Bourdin：Filters in topology optimization, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **50(9)**(2001), pp. 2143–2158.

(12) T. Bruns and D. Tortorelli：Topology optimization of non-linear elastic structure and compliant mechanisms, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **50(26)**(2001), pp. 3443–3459.

(13) K. Suzuki and N. Kikuchi：A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **93(3)**(1991), pp. 291–318.

(14) H. Mlejnek and R. Schirrmacher：An engineer's approach to optimal material distribution and shape finding, Computer & Structures, **106**(1993), pp. 1–26.

(15) M. Stolpe and K. Svanberg：An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization, **22**(2001), pp. 116–124.

(16) J. K. Guest：Topology optimization with multiple phase projection, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **199(1)**(2009), pp. 123–135.

(17) F. Wang, B. S. Lazarov and O. Sigmund：On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization, **43(6)**(2011), pp. 767–784.