計算数理工学論文集 Vol. 20 (2020 年 12 月)，論文 No. 11-201219 JASCOME

Maxwell方程式におけるPMCHWT定式化とMullerの定式化に対するIsogeometric境界要素法と選点法による離散化について

On isogeometric boundary element methods based on the PMCHWT and Muller formulation for Maxwell's equations and their discretisation using collocation

新納 和樹 [1)]，西村 直志 [2)]

Kazuki NIINO and Naoshi NISHIMURA

1) 京都大学情報学研究科　(〒 600-8501　京都市左京区吉田本町，　E-mail: niino@i.kyoto-u.ac.jp)
2) 京都大学情報学研究科　(〒 600-8501　京都市左京区吉田本町，　E-mail: nishimura.naoshi.8r@kyoto-u.jp)

This paper discusses boundary element methods using the isogeometric analysis for electromagnetic wave scattering problems and its discretisation based on collocation. In our previous research we proposed that the EFIE (Electric Field Integral Equation) and MFIE (Magnetic Field Integral Equation), which are formulations of boundary integral equations for electromagnetic wave scattering problems with PECs (Perfectly Electric Conductors), can be discretised with collocation by interpolating unknown functions with the B-spline functions. In this paper we extend this numerical method to wave scattering problems with dielectric materials and show that a similar discretisation method is available for the PMCHWT (Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai) and Muller formulation, which are formulations of boundary integral equations for scattering problems with dielectric materials.

Key Words: Isogeometric boundary element method, PMCHWT formulation, Muller formulation, collocation

1. 序論

Maxwell 方程式に対する境界積分方程式の研究では，積分方程式を Galerkin 法によって離散化するモーメント法の研究が盛んに行われているが，選点法による離散化の研究も数多く行われており，特に Nystrom 法は積分方程式の離散化として広く用いられている [(1)]．しかし一般に用いられる平面要素と RWG 基底の組み合わせでは，要素の辺上に選点を取ると積分が発散し，自然な選点法を構築することができない．一方我々のグループでは，isogeometric 解析によって EFIE と MFIE が容易に選点法で離散化できることを示した [(2)]．本稿ではこの手法を PMCHWT (Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai) 定式化 [(3)] 及び Muller の定式化 [(4)] に拡張することで，誘電体散乱問題に対する境界積分方程式の選点法による離散化について提案する．

2. 定式化

2.1. 電磁波動散乱問題及び積分方程式

領域 Ω^- は滑らかな境界 $\Gamma = \partial\Omega^-$ を持つトーラスに同相な領域とし，$\Omega^+ = \mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega^-}$ とする．Ω^- を占める誘電体による散乱問題を考える:

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = i\omega\mu^\pm\boldsymbol{H},\quad \nabla\times\boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon^\pm\boldsymbol{E}\quad \text{in}\,\Omega^\pm,$$
$$(\boldsymbol{m}:=)\boldsymbol{E}^+\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{E}^-\times\boldsymbol{n},\quad (\boldsymbol{j}:=)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^+ = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^-\quad \text{on}\,\Gamma,$$
$$(\boldsymbol{E}^{\text{sca}},\boldsymbol{H}^{\text{sca}}) = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{\text{inc}},\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}^{\text{inc}})\text{ に対する放射条件.}$$

ここに $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ はそれぞれ電場と磁場，ω は周波数，$\boldsymbol{E}^\pm,\boldsymbol{H}^\pm$ はそれぞれ $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ の $\Omega^\pm$ から Γ への極限値，$\boldsymbol{n}$ は Γ 上 Ω^- から見た外向き単位法線ベクトル，$\varepsilon^\pm,\mu^\pm$ はそれぞれ $\Omega^\pm$ における誘電率と透磁率，$(\boldsymbol{E}^{\text{inc}},\boldsymbol{H}^{\text{inc}})$ は与えられた入射波とする．

この問題に対応する境界積分方程式の定式化の一つとして，PMCHWT 定式化 [(3)] が知られている:

$$(P^+ + P^-)\boldsymbol{m} - i\omega(\mu^+Q^+ + \mu^-Q^-)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{E}^{\text{inc}}\times\boldsymbol{n}, \quad (1)$$
$$i\omega(\varepsilon^+Q^+ + \varepsilon^-Q^-)\boldsymbol{m} + (P^+ + P^-)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\text{inc}}. \quad (2)$$

2020 年 10 月 23 日受付，2020 年 11 月 10 日受理

ここに

$$
\begin{aligned}
P^{\pm}\boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{n}\times\int_{\Gamma}\nabla_x G^{\pm}(x,y)\times\boldsymbol{\phi}(y)\mathrm{d}S_y,\\
Q^{\pm}\boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{n}\times\int_{\Gamma}\left(1+\frac{\nabla\nabla}{k^{\pm 2}}\right)G^{\pm}\boldsymbol{\phi}(y)\mathrm{d}S_y,\\
k^{\pm} &= \omega\sqrt{\varepsilon^{\pm}\mu^{\pm}},\\
G^{\pm}(x,y) &= \frac{\mathrm{e}^{ik^{\pm}|x-y|}}{4\pi|x-y|}
\end{aligned}
$$

である．また，この問題に対する積分方程式の他の定式化として，PMCHWT 定式化と比較し積分方程式中に現れる積分作用素の特異性が弱い Muller の定式化 [4] が知られている：

$$
\begin{aligned}
&-i\omega(\varepsilon^{+}P^{+}-\varepsilon^{-}P^{-})\boldsymbol{m}-({k^{+}}^{2}Q^{+}-{k^{-}}^{2}Q^{-})\boldsymbol{j}\\
&=i\omega\varepsilon^{+}\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\times\boldsymbol{n}, \qquad (3)\\
&({k^{+}}^{2}Q^{+}-{k^{-}}^{2}Q^{-})\boldsymbol{m}+-i\omega(\mu^{+}P^{+}-\mu^{-}P^{-})\boldsymbol{j}\\
&=i\omega\mu^{+}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

2.2. B-spline 関数による散乱体形状の表現

isogeometric 境界要素法を導入する準備として，散乱体境界 Γ を B-spline 関数で表現する．$D=(0,1]\times(0,1]$ とし，D にデカルト座標 s_I, $(I=1,2)$ を導入する．s_I 軸上に節点 $0=s_I^0<s_I^1<\cdots<s_I^{n_I}=1$ を設け，$s_I^{-i}=s_I^{n_I-i}-1$, $s_I^{n_i+i}=s_I^i+1$ とする $(i=1,2)$．一般に節点 $t_0\le t_1\le\cdots\le t_{p+1}$ を有する p 次 B-spline 関数を $B_p(t:t_0,t_1,\cdots,t_{p+1})$ と書き，幾何形状を表現する基底関数を次のように取る:

$$
\begin{aligned}
&\phi^{ij}(s_1,s_2)\\
=&B_2(s_1:s_1^{i-2},s_1^{i-1},s_1^{i},s_1^{i+1})B_2(s_2:s_2^{j-2},s_2^{j-1},s_2^{j},s_2^{j+1})\\
&\quad(0\le i\le n_1+1, 0\le j\le n_2+1)
\end{aligned}
$$

これらの基底の Greville 座標

$$
(s_1^{ig},s_2^{jg})=\left(\frac{s_1^{i-1}+s_1^{i}}{2},\frac{s_2^{j-1}+s_2^{j}}{2}\right)
$$

において，Γ 上の点 x^{ij} を通る条件

$$
x^{ij}=\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\phi^{kl}(s_1^{ig},s_2^{jg})\tilde{x}^{kl}\quad(1\le i\le n_1, 1\le j\le n_2)
$$

を $\tilde{x}^{kl}$ について解く．求まった $\tilde{x}^{kl}$ より B-spline 関数で表現される Γ の近似式は，$s_1^{i-1}\le s_1\le s_1^{i}$, $s_2^{j-1}\le s_2\le s_2^{j}$ を満たす (s_1,s_2) に対して

$$
x(s_1,s_2)=\sum_{k=i-1}^{i+1}\sum_{l=j-1}^{j+1}\phi^{kl}(s_1,s_2)\tilde{x}^{kl}
$$

で与えられる．但し，この式において $1\le k\le n_1, 1\le l\le n_2$ を満たさない k と l については，それぞれ $\mathrm{mod}\, n_1, \mathrm{mod}\, n_2$ の意味で取ることとする．

2.3. isogeometric 解析

本稿では未知関数 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{j}$ を B-spline 関数を用いて補間する．幾何学量については C^1 級であることのみを要求する．Buffa ら [5] によると，Γ 上の $H_{\mathrm{div}}^{-\frac{1}{2}}$ に属する関数 $\boldsymbol{j}$ は

$$
\boldsymbol{j}_i(y)\approx\sum_{\alpha}\frac{1}{J}\frac{\partial y_i}{\partial s_I}N_I^{\alpha}(s)j^{\alpha}
$$

の形に離散化できる．ここに N_I^{α}, $(I=1,2)$ は D 上の $H_{\mathrm{div}}^{-\frac{1}{2}}$ の基底（I がベクトル添字）であり，

$$
(B_p(s_1)\times B_{p-1}(s_2), B_{p-1}(s_1)\times B_p(s_2))
$$

の形を有する．ここに $B_p(s)$ は s に関して周期 1 の p 次周期 B-spline 関数 $(p\ge 1)$ である．また α はこのような基底関数の通し番号，$j^{\alpha}\in\mathbb{C}$ は係数である．また，幾何形状 $y(s_1,s_2)$ は $(s_1,s_2)\in D$ についてそれぞれ周期 1 の C^1 級周期関数であり，

$$
J=\sqrt{\left|\frac{\partial y}{\partial s_1}\times\frac{\partial y}{\partial s_2}\right|}
$$

は Jacobian である．なお，大文字，小文字の添字について，それぞれ範囲 $2,3$ の範囲で総和規約を適用する．

本稿では $p=2$ とする．その結果 N_I^{α} は

$$
\begin{aligned}
&\alpha=2((i-1)n_2+j)-1\\
&N_1^{\alpha}(s_1,s_2)=B_2(s_1:s_1^{i-2},s_1^{i-1},s_1^{i},s_1^{i+1})B_1(s_2:s_2^{j-1},s_2^{j},s_2^{j+1})\\
&N_2^{\alpha}(s_1,s_2)=0
\end{aligned}
$$

となるもの（Fig. 1 の黒矢印）と，

$$
\begin{aligned}
&\alpha=2((i-1)n_2+j)\\
&N_1^{\alpha}(s_1,s_2)=0\\
&N_2^{\alpha}(s_1,s_2)=B_1(s_1:s_1^{i-1},s_1^{i},s_1^{i+1})B_1(s_2:s_2^{j-2},s_2^{j-1},s_2^{j},s_2^{j+1})
\end{aligned}
$$

となるもの（Fig. 2 の黒矢印）に分けられる． それぞれの図

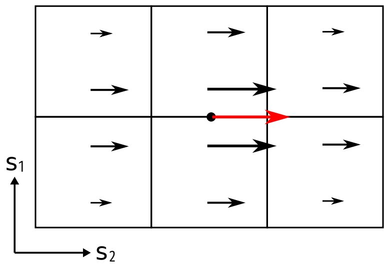

Fig. 1 A basis function directing s_1 direction. Six squares are support of the basis function. Circular dot indicates the collocation point. Red arrow shows the direction in which the boundary integral equations are evaluated at the collocation point.

において，四角形の頂点が格子点 s_I^i に対応しており，それぞれの基底関数の台は図に示した 6 つの四角形である．したがって PMCHWT 定式化（式 (1), (2)）を選点法で離散化する場合，選点を Fig. 1 の黒点に対応する点

$$
\left(\frac{s_1^{i-1}+s_1^{i}}{2},s_2^{j}\right)\quad(1\le i\le n_1, 0\le j\le n_2), \qquad (5)
$$

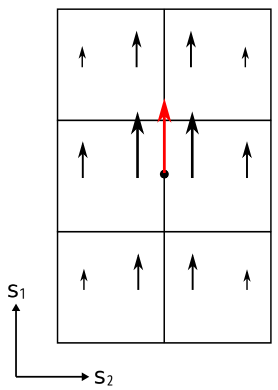

Fig. 2　A basis function directing s_2 direction. Six squares are support of the basis function. Circular dot indicates the collocation point. Red arrow shows the direction in which the boundary integral equations are evaluated at the collocation point.

及び Fig. 2 の黒点に対応する点

$$\left(s_1^i, \frac{s_2^{j-1}+s_2^j}{2}\right) \quad (0 \leq i \leq n_1,\, 1 \leq j \leq n_2), \tag{6}$$

とし，図中の赤矢印に対応する Γ 上の接ベクトルを $\boldsymbol{t}$ として，

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t})\cdot\{(P^+ + P^-)\boldsymbol{m} - i\omega(\mu^+Q^+ + \mu^-Q^-)\boldsymbol{j}\}$$
$$= -(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t})\cdot(\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\times\boldsymbol{n}) \tag{7}$$
$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t})\cdot\{i\omega(\varepsilon^+Q^+ + \varepsilon^-Q^-)\boldsymbol{m} + (P^+ + P^-)\boldsymbol{j}\}$$
$$= -(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t})\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}) \tag{8}$$

をそれぞれの選点において評価することが自然であることがわかる．さらに Muller の定式化に対しては，同じ選点 (5), (6) において，

$$\boldsymbol{t}\cdot\{-i\omega(\varepsilon^+P^+ - \varepsilon^-P^-)\boldsymbol{m} - ({k^+}^2\mu^+Q^+ - {k^-}^2\mu^-Q^-)\boldsymbol{j}\}$$
$$= i\omega\varepsilon^+\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\times\boldsymbol{n}), \tag{9}$$
$$\boldsymbol{t}\cdot\{({k^+}^2Q^+ - {k^-}^2Q^-)\boldsymbol{m} + -i\omega(\mu^+P^+ + \mu^-P^-)\boldsymbol{j}\}$$
$$= i\omega\mu^+\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}). \tag{10}$$

を評価すればよい．PMCHWT 定式化（式 (7), (8)）では $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t}$ を積分方程式に乗じている一方で，Muller の定式化（式 (9), (10)）では $\boldsymbol{t}$ を乗じていることに注意されたい．例えば RWG 基底 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{RWG}}$ のみを用いた Galerkin 法によって積分方程式を離散化する際には，PMCHWT 定式化は $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t}^{\mathrm{RWG}}$ をテスト関数とする一方で，Muller の定式化では $\boldsymbol{t}^{\mathrm{RWG}}$ をテスト関数にするのが一般的であり，PMCHWT 定式化でテスト関数 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{RWG}}$ を用いたり Muller の定式化でテスト関数 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t}^{\mathrm{RWG}}$ を用いたりすると精度が悪化することが知られている．本稿での $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t}$ の選択もこれと同様の理由であり，この選択を誤ると精度が悪化することが予想される．

この式の作用素 $P^\pm, Q^\pm$ に現れる積分の詳しい計算法は基本的に [(2)] に準じているが，Γ が閉曲面であることを利用して，特異積分の扱いを簡単化している．実際，文献 [(2)] では作用素 $Q^\pm$ に現れる特異積分を以下の様に変形し，

$$\boldsymbol{n}_x\times\int_\Gamma \nabla_x G(x,y)\mathrm{div}_S\boldsymbol{j}(y)\mathrm{d}S_y$$
$$=\boldsymbol{n}_x\times\int_\Gamma\{\nabla_x^S G(x,y)\mathrm{div}_S\boldsymbol{j}(y) + \nabla_y^S G(x,y)\mathrm{div}_S\boldsymbol{j}(x)\}\mathrm{d}S_y$$
$$-\mathrm{div}_S\boldsymbol{j}(x)\boldsymbol{n}_x\times\int_\Gamma\nabla_y^S G(x,y)\mathrm{d}S_y,$$

2 項目を要素毎の線積分に帰着することで特異積分の正則化を行っていたが，2 項目の積分は Γ が閉曲面の場合 0 となるため，線積分の計算を省略することができる．ここに ∇_x^S, ∇_y^S は，それぞれ x, y に関する surface gradient である．

3. 数値計算例

以下では数値実験によって提案法の妥当性を検討する．領域 Ω^- は大半径 0.4，小半径 0.1 のトーラスであり，入射波は

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}} = {}^t\left(\frac{\mathrm{e}^{i\omega\sqrt{\varepsilon^+\mu^+}x_3}}{\sqrt{\varepsilon^+}}, 0, 0\right)$$
$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}} = {}^t(0, \mathrm{e}^{i\omega\sqrt{\varepsilon^+\mu^+}x_3}, 0)$$

とし，$\mu^\pm = 1$ とした．トーラスは 2.2 節で示した 2 次の B-spline 関数で表現した．Γ 上の積分は，D のメッシュの面要素毎に座標軸方向に関する 4 次の Gauss 積分公式のテンソル積を用いて計算した．ただし辺要素上に選点が存在する面要素では高橋ら [(6)] に従って，Lachat-Watson 型の要素分割と変数変換による正則化を行った上で，同様の数値積分公式を適用した．また全ての数値解法において，線型方程式は許容誤差 10^{-5}，リスタート無しの GMRES を用いて解いた．

まず $\varepsilon^\pm = \mu^\pm = 1$ とし，解が入射波と一致する問題を解くことで提案法の妥当性を検討した．Fig. 3 は，$k = 1$, 分割数 $n_1 = n_2 = 30$（D 上の要素数は 900, $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{j}$ の自由度はそれぞれ 1800）としたときの，選点法で離散化した PMCHWT 定式化及び Muller の定式化の解 $\boldsymbol{m}$ と，この問題の解析解である $\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\times\boldsymbol{n}$，それぞれの x_3 成分の実部をプロットしたものであり，Fig. 4 は同じ図を x_1 軸方向から見た図である．これらの図より PMCHWT 定式化と Muller の定式化で得られた数値解は，解析解と概ね一致していることがわかる．実際，積分方程式を離散化した選点上における $\boldsymbol{m}$,$\boldsymbol{j}$ の値を要素とするベクトルについて，同じ選点上での入射波の値 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{inc}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\times\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}^{\mathrm{inc}} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}$ を要素とするベクトルと数値解の l^2 相対誤差は Table 1 に示す値となった．この問題における Muller の定式化では，対応する積分作用素が単位作用素となるために誤差が小さくなっている．一方，PMCHWT 定式化ではこの問題においても trivial でない作用素を計算する必要があるが，ある程度の精度で解が求まっていることがわかる．

また同じトーラス形状の散乱体において，$\varepsilon^+ = 1, \varepsilon^- = 4$ としたときの，分割数 $n_1 = n_2 = 75$ (D 上の要素数 5625, $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{j}$ の自由度はそれぞれ 11250) に対する提案法の数値解 $\boldsymbol{m}$ と，PMCHWT 定式化を Roof top 関数を基底として用いた Galerkin 法 [(7)] (要素数は 1600) で解いた数値解，それぞれの x_3 成分の実部をプロットしたものが Fig. 5，同じグラフ

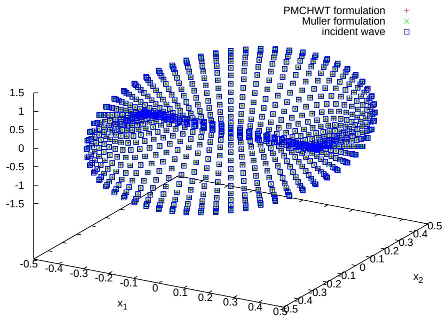

Fig. 3　Surface magnetic current $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{m}_3$. Comparison of solutions of the proposed methods with the analytical solution $\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}} \times \boldsymbol{n}$. $k=1$, $\varepsilon^{\pm}=1$, $n_1=n_2=30$.

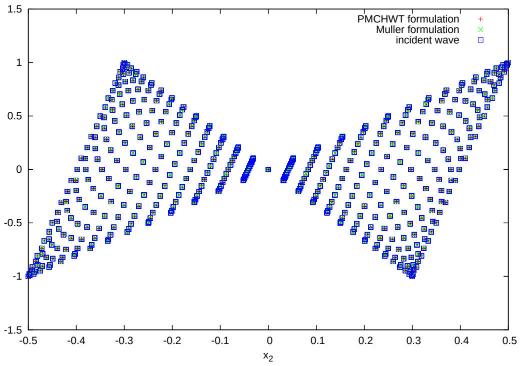

Fig. 4　Surface magnetic current $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{m}_3$. Comparison of solutions of the proposed methods with the analytical solution $\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}} \times \boldsymbol{n}$. $k=1$, $\varepsilon^{\pm}=1$, $n_1=n_2=30$.

の $x_1>0, x_2>0$ を満たす部分を拡大した図が Fig. 6 である．これらの結果も概ね一致していることがわかる．

また $\varepsilon^{\pm}=1$ と $\varepsilon^{+}=1, \varepsilon^{-}=4$ の二つの問題に対して，分割数 $(n_1,n_2)=(30,30)$ と $(n_1,n_2)=(75,75)$ の PMCHWT 定式化及び Muller の定式化の選点法によって数値計算した際の，GMRES の反復数を検証した．Table 2 に $\varepsilon^{\pm}=1$ のときの反復数を，Table 3 に $\varepsilon^{+}=1, \varepsilon^{-}=4$ のときの反復回数を示す． PMCHWT 定式化では GMRES の収束に多くの反復回数を要しており，特に $(n_1,n_2)=(75,75)$ の場合多くの反復回数を要している．Muller の定式化は特に $\varepsilon^{\pm}=1$ の場合，係数行列に対応する作用素が単位作用素になるため，これを離散化して得られる行列も単位行列に非常に近い．そのため非常に少ない反復回数で残差が収束している．また $\varepsilon^{+}=1, \varepsilon^{-}=4$ の場合も，やや反復回数が増加するものの，自由度の大きさに関わらず少ない反復回数で収束していることがわかる．これらの結果は，それぞれの定式化における積分作用素の示す性質から想定される通りの結果である．

Table 1　Relative l^2 error of the proposed numerical method. $k=1$, $\varepsilon^{\pm}=1$, $n_1=n_2=30$.

Relative error	PMCHWT	Muller
$\boldsymbol{m}$	2.99×10^{-3}	1.44×10^{-5}
$\boldsymbol{j}$	2.99×10^{-3}	1.44×10^{-5}

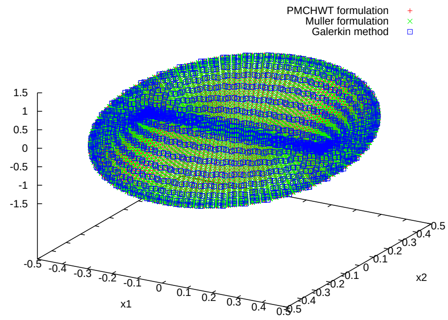

Fig. 5　Surface magnetic current $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{m}_3$. Comparison of solutions of the proposed methods with that of the PMCHWT formulation with the roof top basis function and Galerkin method. $k=1$, $\varepsilon^{+}=1$, $\varepsilon^{-}=4$ and $n_1=n_2=75$.

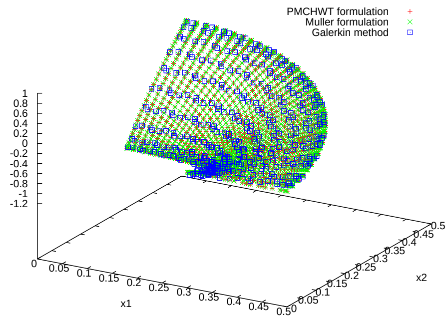

Fig. 6　Surface magnetic current $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{m}_3$. Comparison of solutions of the proposed methods with that of the PMCHWT formulation with the roof top basis function and Galerkin method. $k=1$, $\varepsilon^{+}=1$, $\varepsilon^{-}=4$ and $n_1=n_2=75$.

4. 結論

本稿では Maxwell 方程式における isogeometric 解析を用いた PMCHWT 定式化及び Muller の定式化について検討した．EFIE や MFIE と同様に，PMCHWT 定式化や Muller の定式化も容易に選点法による離散化が行えることを示した．また得られた数値解を解析解や Roof top 関数を用いた Galerkin 法と比較し，良好な数値結果を得られることを確認した．積分作用素の性質から，前処理無しの PMCHWT 定式化は反復解法の収束に多くの反復を要する一方で，Muller の定式化は少ない反復回数で収束することが予想されたが，

Table 2　Iteration numbers of the GMRES with $k=1$ and $\varepsilon^{\pm}=1$.

(n_1,n_2)	PMCHWT	Muller
$(30,30)$	660	17
$(75,75)$	4712	17

Table 3 Iteration numbers of the GMRES with $k = 1$, $\varepsilon^+ = 1$ and $\varepsilon^- = 4$.

(n_1, n_2)	PMCHWT	Muller
$(30, 30)$	564	37
$(75, 75)$	5253	37

これも数値的に確認した．PMCHWT 定式化の反復回数は Calderon の前処理を適用することで削減できることが知られているが，本手法にこれを適用することは今後の課題である．また，本手法をより一般の形状の散乱体へと適用することや従来法との定量的な精度比較を行うことも今後の課題である．

参考文献

(1) Mei Song Tong and Weng Cho Chew. A higher-order nystro/spl uml/m scheme for electromagnetic scattering by arbitrarily shaped surfaces. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, Vol. 4, pp. 277–280, 2005.

(2) 新納和樹, 西村直志. Maxwell 方程式における isogeometric 境界積分法と選点法による離散化. 計算数理工学論文集, Vol. 19, pp. 91–94, 2019.

(3) W. C. Chew. *Waves and fields in inhomogeneous media.* IEEE press New York, 1995.

(4) C. Müller. *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves.* Springer-Verlag Berlin, 1969.

(5) Annalisa Buffa, Giancarlo Sangalli, and Rafael Vázquez. Isogeometric analysis in electromagnetics: B-splines approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 17-20, pp. 1143–1152, 2010.

(6) 高橋徹, 平井哲郎, 佐藤大輔, 飯盛浩司, 松本敏郎. 3 次元音響問題に関する isogeometric bem に基づく形状感度解析. 計算数理工学論文集, Vol. 18, pp. 69–74, 2018.

(7) K. Niino and N. Nishimura. Calderón's preconditioning approaches for PMCHWT formulations for Maxwell's equations. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, Vol. 25, pp. 558–572, 2012.