計算数理工学論文集 Vol. 20 (2020 年 12 月)，論文 No. No.05-201219 JASCOME

# 微圧縮超弾性体の熱・機械完全連成問題に対する増分型 Mean dilatation 法

## AN INCREMENTAL MEAN DILATATION METHOD FOR THE FULLY COUPLED THERMO-MECHANICAL PROBLEM OF NEARLY INCOMPRESSIBLE MATERIALS

松原　成志朗 [1)]，奥村　大 [2)]，寺田　賢二郎 [3)]

Seishiro MATSUBARA, Dai OKUMURA and Kenjiro TERADA

1) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464-8603　名古屋市千種区，　E-mail: seishiro.matsubara@mae.nagoya-u.ac.jp)
2) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464-8603　名古屋市千種区，　E-mail: dai.okumura@mae.nagoya-u.ac.jp)
3) 東北大学災害科学国際研究所　(〒 980-8572　仙台市青葉区，　E-mail: tei@irides.tohoku.ac.jp)

This study proposes an incremental mean dilatation method to conduct the thermo-mechanically coupled analyses for nearly incompressible hyperelastic materials by the use of low-order elements. The mean dilatation method to avoid volumetric locking of finite element solution is reformulated after the fashion of thermo-mechanically coupled incremental variational framework. Then, the equilibrium temperature resulting from the volume change is originally introduced in connection with the introductions of volume change and pressure, which are constant in a whole domain of continuum body. As a result, the thermo-mechanically coupled problem, including control of volume change, is variationally consistent, so that we can enjoy several benefits associated with numerical convergency and efficiency. In particular, taking advantage of the benefit, which the consistent tangent modulus necessarily becomes symmetry, the fully implicit update algorithm based on the standard type of Newton-Raphson method is constructed. To validate the performance of the proposed method, the Cook's plane strain problems are solved by means of three kinds of numerical methods: a conventional method using 1st order element, a conventional method using 2nd order element, the proposed method using 1st order element.

***Key Words***: Incremental variational formulation, Thermo-mechanics, Mean dilatation method, Nearly incompressible materials, Volumetric locking

## 1. 緒言

ゴム材料の多くは，外的負荷に対して体積変形を許容しない非圧縮性を有するとともに，変形による自己発熱を熱源とした変形場と温度場の連成現象を発現することが知られている [1, 2]．このような現象を予測するための有限要素解析では，低次要素を用いた場合での体積ロッキングや熱・機械連成問題の変分構造の破綻が計算の収束性や精度を悪化させることが問題となっている．

体積ロッキングとは，非圧縮性の条件が体積変形以外の変形モードも拘束することで，物体が過度に剛な応答を呈することを指す．この問題は高次要素を用いることで概ね解決可能であるが，高次要素は低次要素に比べて多くの自由度を必要とするため，計算効率の低下を避けることができない．このような背景から，これまでに F-bar 法 [3]，u/p 混合法 [4]，Mean-dilatation 法 [5] に代表されるような低次要素の使用を前提として体積ロッキングを回避する手法が数多く提案されてきた．しかし，F-bar 法は，接線剛性行列が非対称行列となってソルバーの負荷を増大させるため，計算効率の面で問題が残る．また，u/p 混合法は，変位自由度とは別に圧力自由度の導入が必要であり，いわゆる Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi(LBB) 条件を満足するような補間近似を達成する必要がある．熱・機械連成問題においては，さらに温度自由度が加わることになるため，さらなる理論的な制限の増大を避けることができないと考えられる．一方で，Mean-dilatation

2020 年 10 月 9 日受付，2020 年 11 月 17 日受理

法は，変位自由度のみを扱い，接線剛性行列の対称性を満足するものの，物体に蓄積されるポテンシャルの関数形を必要とする．したがって，平衡方程式と熱力学第一法則からなる標準的な熱・機械連成問題については，その変分構造の破綻がネックとなって本手法を適用することができない．

Mean-dilatation 法の問題を解決するための基本的枠組みとして，本研究では増分型変分法[6, 7]に着目する．これは，物体の瞬間的な熱・機械的平衡状態を，全エネルギーの変化率の状態変数に関する停留問題の解として定式化する枠組みである．この定式化の特徴は，熱・機械連成問題に対する一般化された全ポテンシャルエネルギー最小の原理とみなすことができるため，変形場と温度場を求めるつり合い問題の変分理論的な整合性が保証される点である．このため，変形問題と熱伝導問題をいわゆるマトリックス連成手法により解析を行う場合の接線剛性行列は必ず対称性を満足し，安定的かつ効率的な強連成アルゴリズムの構築を可能とする．

そこで本研究では，増分型変分法を基軸として Mean dilatation 法を定式化することにより，微圧縮超弾性体の熱・機械強連成解析を安定的かつ効率的に実施可能な増分型 Mean dilatation 法を構築する．加えて，Newton-Raphson 法の使用を前提とした状態変数の陰的更新アルゴリズムを構築し，計算の収束性や効率性に大きな影響を及ぼす接線剛性行列が必ず対称性を満足することを示す．その際，より効率的な数値計算を実現するための空間表示によるアルゴリズムも構築する．そして本手法の性能は，曲げ変形とせん断変形が卓越する Cook の平面ひずみ問題を通して検証する．

## 2. 材料構成モデリング

本節では，固体材料に対する標準的な熱力学的定式化[8, 9]を通して，超弾性体の熱・機械連成挙動を特徴づける 2 つのポテンシャル汎関数を規定する．

### 2.1. 運動学的変数の定義

時刻 $t = t_0 \geq 0$ において，十分になめらかな境界 $\partial B_0$ を有する連続体 $B$ を参照配置 $B_0$ とし，その物質点を $\boldsymbol{X} \in B_0$ とする．一方で，時刻 $t = t \geq t_0$ における連続体を現配置 $B_t$ とすると，$\boldsymbol{X}$ は，十分になめらかな運動 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)$ によって現配置の物質点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t) \in B_t$ に写像される．このとき，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{x}$ の接空間を結ぶ変形勾配テンソルを次式で定義する．

$$\boldsymbol{F} = \nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t) \tag{1}$$

ここで，変形勾配テンソルは常に正則 ($J = \det(\boldsymbol{F}) > 0$) と仮定する．また，次式で示す変形勾配テンソルの Flory 分解[10]を考慮する．

$$\boldsymbol{F} = J^{\frac{1}{3}} \bar{\boldsymbol{F}} \tag{2}$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{F}}$ は，変形勾配テンソルの等容変形成分であり，$\det(\bar{\boldsymbol{F}}) = 1$ を満たす．さらに，物体の熱膨張変形を考慮するために，$J$ を次式のように乗算分解する．

$$J = J_{\mathrm{M}} J_{\mathrm{T}} \tag{3}$$

ここで，$J_{\mathrm{M}} > 0, J_{\mathrm{T}} > 0$ は，それぞれ $J$ の機械変形成分，熱膨張変形成分であり，後者は次式で定義する[11]．

$$J_{\mathrm{T}} = \exp\left[\int_{T_0}^{T} 3\alpha\left(\tilde{T}\right) d\tilde{T}\right] \tag{4}$$

ここで，$T > 0, T_0 > 0, \alpha(T)$ は，それぞれ絶対温度，参照温度，熱膨張関数である．なお，式 (4) は，材料が等方的に熱膨張変形することを意味する．

### 2.2. 熱力学的定式化

Helmholtz の自由エネルギー密度を次式で定義する．

$$\psi(\boldsymbol{C}, T) = U(J_{\mathrm{M}}) + \bar{\psi}\left(\bar{\boldsymbol{C}}, T\right) + \psi^{\mathrm{h}}(T) \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{C}, \bar{\boldsymbol{C}}$ は，それぞれ $\boldsymbol{F}, \bar{\boldsymbol{F}}$ に関する右 Cauchy-Green テンソルである．なお，$\psi$ は，$T_0$ に対して $\psi(\boldsymbol{1}, T_0) = 0$ を満たし，$\boldsymbol{C}$ について凸，$T$ について凹な関数である．また，$U, \bar{\psi}, \psi^{\mathrm{h}}$ は，それぞれ $\psi$ の体積変形成分，等容変形成分，比熱に関する成分である．一方で，内部エネルギー密度についても次式を定義しておく．

$$e(\boldsymbol{C}, \eta) = \sup_{\forall T}\{\psi(\boldsymbol{C}, T) + T\eta\} = U(J_{\mathrm{M}}) + \bar{e}\left(\bar{\boldsymbol{C}}, \eta\right) + e^{\mathrm{h}}(\eta) \tag{6}$$

ここで，$\eta$ はエントロピー密度であり，$e$ は $e(\boldsymbol{1}, 0) = 0$ を満たす凸関数である．なお，Legendre-Fenchel 変換の結果として，$J_{\mathrm{M}}$ は，式 (5) では，$T$ に依存するのに対して，式 (6) では，$\eta$ に依存することに注意する．

一方で，標準的な熱力学的定式化[8, 9]により，$B_0$ を参照とする全エネルギー散逸は次式で得られる．

$$D = \frac{1}{2}\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{C}} - \rho_0\left(\dot{\psi} + \dot{T}\eta\right) + \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{Q} \tag{7}$$

ここで，$\rho_0 > 0, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{G} \equiv -(\nabla_{\boldsymbol{X}} T)/T, \boldsymbol{Q}$ は，それぞれ $B_0$ における質量密度，第二 Piola-Kirchhoff 応力，$B_0$ を参照とする正規化温度勾配，第一 Piola-Kirchhoff 熱流束である．式 (7) に式 (5) の物質時間微分を代入し，次の超弾性構成則とエントロピー密度の式；

$$\boldsymbol{S} = 2\partial_{\boldsymbol{C}}(\rho_0\psi), \quad \eta = -\partial_T \psi \tag{8}$$

を考慮すると，全エネルギー散逸は次式となる．

$$D = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{Q} \tag{9}$$

一方で，式 (9) について次の Legendre-Fenchel 変換を考える．

$$\tilde{\chi}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{F}) = \sup_{\forall \boldsymbol{G}}\{D - \chi(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F})\} \tag{10}$$

ここで，$\chi \geq 0, \tilde{\chi} \geq 0$ は，それぞれ Fourier ポテンシャル，双対 Fourier ポテンシャルであり，$\chi(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{F}) = \tilde{\chi}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{F}) = 0$ を満たす凸関数であるとともに，次の関係が成り立つ．

$$\boldsymbol{G} = \partial_{\boldsymbol{Q}}\tilde{\chi}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{F}), \quad \boldsymbol{Q} = \partial_{\boldsymbol{G}}\chi(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}) \tag{11}$$

このとき，$\chi$ が $\boldsymbol{G}$ に関して一次の斉次凸関数であると仮定すると，式 (11) を式 (9) に代入した結果は次式で得られる．

$$D=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{G}\cdot\partial_{\boldsymbol{G}}\chi(\boldsymbol{G},\boldsymbol{F})=\frac{1}{2}\chi(\boldsymbol{G},\boldsymbol{F})\geq 0 \qquad (12)$$

したがって，式 (9) は非負となり，本研究で示した超弾性構成則は熱力学第二法則を満たす．

## 3．増分型 Mean dilatation 法

本節では，増分型変分法 [(6)] と Mean dilatation 法に基づいて速度ポテンシャルの停留問題を構築する．そして，その停留条件が微圧縮超弾性体の熱・機械連成挙動を予測しうる支配方程式となることを示す．また，後退差分近似によって時間離散化された停留問題を構築するとともに，その停留条件が増分時間を無限小としたときに時間連続な場合の停留条件を再生することを示す．

### 3.1．速度ポテンシャルの停留問題

増分型 Mean dilatation 法を構築するために，物質点 $\boldsymbol{X}$ の近傍領域に蓄えられる内部速度ポテンシャルを次式で定義する．

$$\begin{aligned}&\Upsilon\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}},\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}},p,\dot{\eta},T\right)\\&=\rho_0\dot{e}\left(\dot{\bar{\boldsymbol{C}}},\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}},\dot{\eta}\right)-\rho_0T\dot{\eta}+p\left(\dot{J}_{\mathrm{M}}-\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}}\right)-\chi(\boldsymbol{G})\end{aligned} \qquad (13)$$

ここで，$\bar{J}_{\mathrm{M}},p$ は，それぞれ体積変化を表す変数と圧力である．また，増分型変分法にならって，$\theta$ をエントロピーの関数である平衡温度，$T$ を外部温度として 2 つの温度変数を導入する [(6)]．

ところで，$\dot{J}_{\mathrm{M}}$ が $\dot{\eta}$，$T$ のどちらに依存するかは，熱膨張がエネルギー貯蔵的な現象かエネルギー散逸的な現象かという議論に直結するため，物理的な解釈も導入して慎重に検討しなければならない．これに関して，ゴム材料における変形と温度の相互作用は，Gough-Joule 効果 [(12)] として知られており，エントロピーと密接に関係するとされる．また，式 (3) と式 (6) より，熱膨張変形は，$J_{\mathrm{M}}$ を介して内部エネルギーにのみ寄与するため，熱膨張はエネルギー貯蔵的な現象であると判断できる．したがって，標準的な熱力学理論の下では，式 (13) 内の $J_{\mathrm{M}}$ は内部エネルギーの状態変数である $\eta$ に依存すると考えるのが妥当であり，本研究ではこれを仮定する．このため，平衡温度の関数形として従来法 [(6)] とは異なる次式を定義する．

$$\theta=\theta'+\theta_{\mathrm{v}} \qquad (14)$$

ここで，$\theta'$ と $\theta_{\mathrm{v}}$ はそれぞれ次式で定義する．

$$\theta'=\partial_{\eta}\bar{e}\left(\bar{\boldsymbol{C}},\eta\right)+\partial_{\eta}e^{\mathrm{h}}(\eta),\quad \theta_{\mathrm{v}}=p\partial_{\eta}J_{\mathrm{M}} \qquad (15)$$

一方で，参照配置 $B_0$ のエネルギー変化率を次式で定義する．

$$\phi\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}},\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}},p,\dot{\eta},T\right)=\int_{B_0}\Upsilon\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}},\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}},p,\dot{\eta},T\right)dV-\phi^{\mathrm{ext}}(\dot{\boldsymbol{\varphi}},T) \qquad (16)$$

ここで，$\phi^{\mathrm{ext}}$ は，外部仕事率と外部熱供給率の和である．したがって，$B_0$ の瞬間的な平衡状態を特徴づける状態変数は次式で得られる．

$$\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}},\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}},p,\dot{\eta},T\right)_{\mathrm{opt}}=\arg\left[\inf_{\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}},\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}},\dot{\eta}\right)}\sup_{(T,p)}\phi\right] \qquad (17)$$

このとき，$\phi$ の $\dot{\eta}$ に関する停留条件は次式で得られる．

$$\begin{aligned}D\phi[\delta\dot{\eta}]&=\int_{B_0}\rho_0\left(\partial_{\dot{\eta}}\dot{\bar{e}}+\partial_{\dot{\eta}}\dot{e}^{\mathrm{h}}+p\partial_{\dot{\eta}}\dot{J}_{\mathrm{M}}-T\right)\delta\dot{\eta}dV\\&=\int_{B_0}\rho_0\left(\theta'+\theta_{\mathrm{v}}-T\right)\delta\dot{\eta}dV\\&=\int_{B_0}\rho_0(\theta-T)\delta\dot{\eta}dV=0\quad\Rightarrow\quad\theta=T\end{aligned} \qquad (18)$$

式 (18) は，$B_0$ が熱平衡状態であることを意味しており，熱・機械連成問題の変分構造を保持するために必要な条件である [(6)]．また，$p,\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}}$ が空間的に一定であると仮定すると，$\phi$ の $p,\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}}$ に関する停留条件は次式で得られる．

$$\begin{aligned}D\phi[\delta p]&=\delta p\left(\int_{B_0}\dot{J}_{\mathrm{M}}dV-\int_{B_0}\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}}dV\right)=0\\&\Rightarrow\quad\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}}=\frac{1}{|V|}\int_{B_0}\dot{J}_{\mathrm{M}}dV\end{aligned} \qquad (19)$$

$$\begin{aligned}D\phi\left[\delta\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}}\right]&=\int_{B_0}\left(\partial_{\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}}}(\rho_0\dot{e})-p\right)\delta\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}}dV=0\\&\Rightarrow\quad p=\partial_{\bar{J}_{\mathrm{M}}}(\rho_0e)\end{aligned} \qquad (20)$$

ここで，$|V|$ は，$B_0$ の体積である．式 (19)，(20) で物体の体積変形を制御することにより，体積ロッキングを回避することが可能となる [(5)]．

一方で，$\phi$ の $\dot{\boldsymbol{\varphi}},T$ に関する停留条件は次式で得られる．

$$D\phi[\delta\dot{\boldsymbol{\varphi}}]=\int_{B_0}\boldsymbol{S}:\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\delta\dot{\boldsymbol{\varphi}}dV-\delta F^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{mech}}(\delta\dot{\boldsymbol{\varphi}})=0 \qquad (21)$$

$$\begin{aligned}D\phi[\delta T]&=\int_{B_0}-\rho_0\dot{\eta}\delta TdV+\int_{B_0}\boldsymbol{Q}\cdot\nabla_{\boldsymbol{X}}\left(\frac{\delta T}{T}\right)dV\\&\quad-\delta F^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{heat}}(T,\delta T)=0\end{aligned} \qquad (22)$$

ここで，$\boldsymbol{S}'=2\partial_{\boldsymbol{C}}(\rho_0\bar{e})$ は，偏差第二 Piola-Kirchhoff 応力である．また，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}'+pJ_{\mathrm{M}}\boldsymbol{C}^{-1}$ であり，$\delta F^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{mech}},\delta F^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{heat}}$ は，それぞれ外部仮想仕事率，外部仮想熱供給率である．具体的な導出過程は省略するが，式 (21)，(22) に関する Euler-Lagrange 方程式は，$B_0$ を参照とする局所的つり合い式と非定常熱伝導方程式に一致する．したがって，本研究で提案した速度ポテンシャルから，体積変形に対する制御式を含んだ変形場と温度場の支配方程式が導出されることが示された．

### 3.2．停留問題の時間離散化

式 (16) より，時間間隔 $[t_n,t_{n+1}]$ における $B_0$ の全エネルギー変化率は次式で得られる．

$$\begin{aligned}\Delta\phi&=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left[\int_{B_0}\Upsilon dV-\phi^{\mathrm{ext}}\right]dt\\&=\int_{B_0}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\Upsilon dtdV-\int_{t_n}^{t_{n+1}}\phi^{\mathrm{ext}}dt\\&=\int_{B_0}\Delta\Upsilon dV-\Delta\phi^{\mathrm{ext}}\end{aligned} \qquad (23)$$

ここで，$\Upsilon$ の適切な時間離散化については，Stainier[13] や Canadija and Mosler[14] で検討されているように未だ議論が必要な課題である．特に，式 (19) をみると，空間的に一定である Global 変数 $\dot{\bar{J}}_{\mathrm{M}}$ が Local 変数 $\dot{\eta}$ に依存するため，Euler の後退差分近似：$\dot{\boldsymbol{\Xi}} \approx (\boldsymbol{\Xi}_{n+1} - \boldsymbol{\Xi}_n)/\Delta t$ によって時間離散化された式 (13) を用いた場合の陰的更新アルゴリズムは複雑化する．このため本研究では，数値計算アルゴリズムの単純化を目的として，Legendre-Fenchel 変換により $e$ を $\psi$ に置き換えて $\dot{\eta}$ を未知量から省いた次の離散化式を設定する．

$$\Delta\Upsilon = \rho_0\psi\left(\bar{\boldsymbol{C}}, \bar{J}_{\mathrm{M}}, T\right) - \rho_0\psi_n + \left(\rho_0\eta_n - p_n\partial_T J_{\mathrm{M}}|_n\right)(T - T_n) + p\left\{J_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{F}, T) - \bar{J}_{\mathrm{M}} - J_{\mathrm{M},n} + \bar{J}_{\mathrm{M},n}\right\} - \Delta t\chi(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}) \tag{24}$$

ここで，$J_{\mathrm{M}}$ は $T$ に依存する変数であることに注意する．なお，時刻 $t_{n+1}$ における未知量は，$\Xi_{n+1} \to \Xi$ と表記する．したがって，式 (17) に対応する時間離散化後の停留問題は，次式で得られる．

$$\left(\boldsymbol{\varphi}, \bar{J}_{\mathrm{M}}, p, T\right)_{\mathrm{opt}} = \arg\left[\inf_{(\boldsymbol{\varphi},\bar{J}_{\mathrm{M}})}\sup_{(T,p)}\Delta\phi\right] \tag{25}$$

このとき，$\phi$ の $p, \bar{J}_{\mathrm{M}}$ に関する停留条件は，それぞれ次式となる．

$$D\phi[\delta p] = \delta p\left[\int_{B_0}(J_{\mathrm{M}} - J_{\mathrm{M},n})\,dV - |V|\left(\bar{J}_{\mathrm{M}} - \bar{J}_{\mathrm{M},n}\right)\right] = 0$$
$$\Rightarrow \quad \bar{J}_{\mathrm{M}} = \frac{1}{|V|}\int_{B_0}(J_{\mathrm{M}} - J_{\mathrm{M},n})\,dV + \bar{J}_{\mathrm{M},n} \tag{26}$$

$$D\phi\left[\delta\bar{J}_{\mathrm{M}}\right] = \int_{B_0}\left\{\partial_{\bar{J}_{\mathrm{M}}}(\rho_0 e) - p\right\}\delta\bar{J}_{\mathrm{M}}dV = 0$$
$$\Rightarrow \quad p = \partial_{\bar{J}_{\mathrm{M}}}(\rho_0 e) \tag{27}$$

また，$\phi$ の $\boldsymbol{\varphi}, T$ に関する停留条件は，それぞれ次式となる．

$$D\phi[\delta\boldsymbol{\varphi}] = \int_{B_0}\left(\boldsymbol{S}' + pJ_{\mathrm{M}}\boldsymbol{C}^{-1}\right) : \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\delta\boldsymbol{\varphi}dV - \int_{B_0}\Delta t\partial_{\boldsymbol{F}}\chi : \nabla_{\boldsymbol{X}}\delta\boldsymbol{\varphi}dV - \delta F^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{mech}}(\delta\boldsymbol{\varphi}) = 0 \tag{28}$$

$$D\phi[\delta T] = \int_{B_0}\left\{-\rho_0(\eta - \eta_n) + p\partial_T J_{\mathrm{M}} - p_n\partial_T J_{\mathrm{M}}|_n\right\}\delta TdV + \int_{B_0}\Delta t\boldsymbol{Q}\cdot\nabla_{\boldsymbol{X}}\left(\frac{\delta T}{T}\right)dV - \delta F^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{heat}}(T, \delta T) = 0 \tag{29}$$

$\Delta t \to 0$ のとき，式 (26) から式 (28) は，対応する時間連続な場合の式 (19) から式 (21) に一致する．また，式 (29) の $p\partial_T J_{\mathrm{M}}$ と $p_n\partial_T J_{\mathrm{M}}|_n$ は，式 (14) における $\theta_{\mathrm{v}}$ と双対関係にある項であり，これらが熱膨張変形によるエントロピー変化に相当すると考えれば，式 (29) は式 (22) に整合する．したがって，本研究で示した時間離散化問題は変分的整合性を満足している．

## 4. Newton-Raphson 法を用いた陰的更新アルゴリズム

本節では，Newton-Raphson 法を用いた状態変数の陰的更新アルゴリズムを構築する．そして，計算の収束性や効率性に大きな影響を及ぼす接線剛性行列が必ず対称性を満足することを示す．また，より効率的な数値計算を実現するための空間表示によるアルゴリズムも構築する．

### 4.1. 物質表示のアルゴリズム

状態変数の集合をそれぞれ $\boldsymbol{\pi}' = (\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\omega}), \boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\varphi}, T), \boldsymbol{\omega} = \left(\bar{J}_{\mathrm{M}}, p\right)$ とすると，式 (25) は次式で書き換えられる．

$$\boldsymbol{\pi}'|_{\mathrm{opt}} = \arg\left[\underset{\boldsymbol{\pi}'}{\mathrm{infsup}}\,\Delta\phi\right] \tag{30}$$

そこで，第 $i+1$ ステップ目の修正子計算における $\Delta\phi$ の $\boldsymbol{\pi}'$ に関する停留条件を次式のように線形化する．

$$D\Delta\phi|^{i+1}[\delta\boldsymbol{\pi}'] = D\Delta\phi|^{i}[\delta\boldsymbol{\pi}'] + D^2\Delta\phi|^{i}[\delta\boldsymbol{\pi}', \Delta\boldsymbol{\pi}'] + O\left(||\Delta\boldsymbol{\pi}'||^2\right) = 0 \tag{31}$$

ここで，$D\Delta\phi|^{i}[\delta\boldsymbol{\pi}']$ は，式 (26) から式 (29) に対応する第 $i$ ステップ目の残差である．また，式 (26) と式 (27) をみると，$D\Delta\phi|^{i}[\delta\boldsymbol{\pi}']$ のなかで $\bar{J}_{\mathrm{M}}$ と $p$ は，$\boldsymbol{F}$ と $T$ に対して陽的に求められる形式となっているため，主変数として解く必要がないことがわかる．したがって，式 (31) は次式で書き換えることができる．

$$D\Delta\phi|^{i+1}[\delta\boldsymbol{\pi}] = D\Delta\phi|^{i}[\delta\boldsymbol{\pi}] + D^2\Delta\phi|^{i}[\delta\boldsymbol{\pi}, \Delta\boldsymbol{\pi}] + O\left(||\Delta\boldsymbol{\pi}||^2\right) = 0 \tag{32}$$

次に，$D^2\Delta\phi|^{i}[\delta\boldsymbol{\pi}, \Delta\boldsymbol{\pi}]$ は次式となる．

$$D^2\Delta\phi|^{i}[\delta\boldsymbol{\pi}, \Delta\boldsymbol{\pi}] = D^2\Delta\phi|^{i}_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{const.}}}[\delta\boldsymbol{\pi}, \Delta\boldsymbol{\pi}] + \partial_{\boldsymbol{\omega}}D\Delta\phi|^{i}[\delta\boldsymbol{\pi}] * D\boldsymbol{\omega}[\Delta\boldsymbol{\pi}] \tag{33}$$

まず，$D^2\Delta\phi|^{i}_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{const.}}}[\delta\boldsymbol{\pi}, \Delta\boldsymbol{\pi}]$ は次式で得られる．

$$D^2\Delta\phi|^{i}_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{const.}}}[\delta\boldsymbol{\varphi}, \Delta\boldsymbol{\varphi}] = \int_{B_0}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\delta\boldsymbol{\varphi} : \mathcal{C}_{\mathrm{MM}} : \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\Delta\boldsymbol{\varphi}dV + \int_{B_0}\boldsymbol{S} : (\nabla_{\boldsymbol{X}}\Delta\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\delta\boldsymbol{\varphi}dV - \int_{B_0}\nabla_{\boldsymbol{X}}\delta\boldsymbol{\varphi} : \Delta t\partial^2_{\boldsymbol{FF}}\chi : \nabla_{\boldsymbol{X}}\Delta\boldsymbol{\varphi}dV - \delta H^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{mm}}(\delta\boldsymbol{\varphi}, \Delta\boldsymbol{\varphi}) \tag{34}$$

$$D^2\Delta\phi|^{i}_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{const.}}}[\delta\boldsymbol{\varphi}, \Delta T] = \int_{B_0}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\delta\boldsymbol{\varphi} : \mathcal{C}_{\mathrm{MT}}\Delta TdV + \int_{B_0}\nabla_{\boldsymbol{X}}\delta\boldsymbol{\varphi} : \Delta t\partial^2_{\boldsymbol{FG}}\chi\cdot\nabla_{\boldsymbol{X}}\left(\frac{\Delta T}{T}\right)dV \tag{35}$$

$$D^2\Delta\phi|^{i}_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{const.}}}[\delta T, \Delta\boldsymbol{\varphi}] = \int_{B_0}\delta T\mathcal{C}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{MT}} : \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\Delta\boldsymbol{\varphi}dV + \int_{B_0}\nabla_{\boldsymbol{X}}\left(\frac{\delta T}{T}\right)\cdot\Delta t\partial^2_{\boldsymbol{GF}}\chi : \nabla_{\boldsymbol{X}}\Delta\boldsymbol{\varphi}dV \tag{36}$$

$$D^2\Delta\phi|^i_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{const.}}}[\delta T, \Delta T]$$
$$= \int_{B_0} \delta T \left(-\rho_0 \partial_T \eta + p \partial^2_{TT} J_{\mathrm{M}}\right) \Delta T dV$$
$$- \int_{B_0} \nabla_{\boldsymbol{X}} \left(\frac{\delta T}{T}\right) \cdot \Delta t \partial^2_{\boldsymbol{GG}} \chi \cdot \nabla_{\boldsymbol{X}} \left(\frac{\Delta T}{T}\right) dV$$
$$- \int_{B_0} \nabla_{\boldsymbol{X}} \left(\frac{\delta T \Delta T}{T^2}\right) \cdot \Delta t \boldsymbol{Q} dV - \delta H^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{hh}} \left(T, \delta T, \Delta T\right) \quad (37)$$

ここで，$H^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{mm}}, H^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{tt}}$ は，それぞれ外部仕事率と外部熱供給率に関する Hesse 行列である．また，$\mathcal{C}_{\mathrm{MM}}$ と $\mathcal{C}_{\mathrm{MT}}$ は，それぞれ次式で定義される物質接線係数である．

$$\mathcal{C}_{\mathrm{MM}} = 2\partial_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{S}' + p J_{\mathrm{M}} \left(\boldsymbol{C}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}^{-1} + 2\partial_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{C}^{-1}\right) \quad (38)$$
$$\mathcal{C}_{\mathrm{MT}} = \partial_T \boldsymbol{S}' + p \partial_T J_{\mathrm{M}} \boldsymbol{C}^{-1} \quad (39)$$

ここで，$2\partial_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{C}^{-1}|_{ijkl} = -C^{-1}_{ik} C^{-1}_{lj} - C^{-1}_{il} C^{-1}_{kj}$ である．また，$\psi$ の凸性より，$\mathcal{C}_{\mathrm{MT}}$ は運動と温度に関して対称性を満足する．したがって，式 (34) から式 (37) は，$\delta\boldsymbol{\pi}$ と $\Delta\boldsymbol{\pi}$ を交換しても全く同じ式が得られるため，$D^2\Delta\phi|^i_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{const.}}}[\delta\boldsymbol{\pi}, \Delta\boldsymbol{\pi}]$ は対称性を満足する．さらに，$\partial_{\boldsymbol{\omega}} D\Delta\phi|^i[\delta\boldsymbol{\pi}] * D\boldsymbol{\omega}[\Delta\boldsymbol{\pi}]$ は次式となる．

$$\partial_{\boldsymbol{\omega}} D\Delta\phi|^i[\delta\boldsymbol{\varphi}] * D\boldsymbol{\omega}[\Delta\boldsymbol{\varphi}]$$
$$= \frac{\partial_{\bar{J}_{\mathrm{M}}} p}{|V|} \left[\int_{B_0} J_{\mathrm{M}} \nabla_{\boldsymbol{X}} \delta\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} dV\right] \left[\int_{B_0} J_{\mathrm{M}} \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} : \nabla_{\boldsymbol{X}} \Delta\boldsymbol{\varphi} dV\right] \quad (40)$$

$$\partial_{\boldsymbol{\omega}} D\Delta\phi|^i[\delta\boldsymbol{\varphi}] * D\boldsymbol{\omega}[\Delta T]$$
$$= \frac{\partial_{\bar{J}_{\mathrm{M}}} p}{|V|} \left[\int_{B_0} J_{\mathrm{M}} \nabla_{\boldsymbol{X}} \delta\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} dV\right] \left[\int_{B_0} \partial_T J_{\mathrm{M}} \Delta T dV\right] \quad (41)$$

$$\partial_{\boldsymbol{\omega}} D\Delta\phi|^i[\delta T] * D\boldsymbol{\omega}[\Delta\boldsymbol{\varphi}]$$
$$= \frac{\partial_{\bar{J}_{\mathrm{M}}} p}{|V|} \left[\int_{B_0} \delta T \partial_T J_{\mathrm{M}} dV\right] \left[\int_{B_0} J_{\mathrm{M}} \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} : \nabla_{\boldsymbol{X}} \Delta\boldsymbol{\varphi} dV\right] \quad (42)$$

$$\partial_{\boldsymbol{\omega}} D\Delta\phi|^i[\delta T] * D\boldsymbol{\omega}[\Delta T]$$
$$= \frac{\partial_{\bar{J}_{\mathrm{M}}} p}{|V|} \left[\int_{B_0} \delta T \partial_T J_{\mathrm{M}} dV\right] \left[\int_{B_0} \partial_T J_{\mathrm{M}} \Delta T dV\right] \quad (43)$$

式 (40) から式 (43) についても同様に，$\delta\boldsymbol{\pi}$ と $\Delta\boldsymbol{\pi}$ の入れ替えによって式は不変であるため，$\partial_{\boldsymbol{\omega}} D\Delta\phi|^i[\delta\boldsymbol{\pi}] * D\boldsymbol{\omega}[\Delta\boldsymbol{\pi}]$ もまた対称性を満足する．したがって，$D^2\Delta\phi|^i[\delta\boldsymbol{\pi}, \Delta\boldsymbol{\pi}]$ は対称性を満足する．このことから本手法は，対称ソルバーを使用することが可能であるため計算コストの削減が可能であるだけでなく，標準的な熱・機械強連成解析手法と比べて安定な数値計算が実施可能である．さらに，本手法は未知量の完全陰的更新を実現しているため，弱連成解析手法として一般的な Staggered approach(15) とは異なり，少ない計算ステップ数で適切な解を求めることも可能である．

**4.2. 空間表示のアルゴリズム**

続いて，現配置 $B_t$ を参照とする残差や接線を導出する．まず，式 (28) と式 (29) より，$B_t$ を参照とする残差はそれぞれ次式となる．

$$D\Delta\phi|^i[\delta\boldsymbol{\varphi}]$$
$$= \int_{B_t} \left(\boldsymbol{\sigma} - J^{-1} \Delta t \partial_{\boldsymbol{F}} \chi \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\right) : \nabla_{\boldsymbol{x}} \delta\boldsymbol{\varphi} dv - \delta F^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{mech}} \left(\delta\boldsymbol{\varphi}\right) \quad (44)$$
$$D\Delta\phi|^i[\delta T]$$
$$= \int_{B_t} \left\{-\rho \left(\eta - \eta_n\right) + p \partial_T J^{-1}_{\mathrm{T}} - p_n \partial_T J_{\mathrm{M},n} J^{-1}\right\} \delta T dv$$
$$+ \int_{B_t} \Delta t \boldsymbol{q} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\delta T}{T}\right) dv - \delta F^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{heat}} \left(T, \delta T\right) \quad (45)$$

ここで，$\rho = J^{-1}\rho_0, \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \boldsymbol{F} \boldsymbol{S}' \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} + p J^{-1}_{\mathrm{T}} \boldsymbol{1}, \boldsymbol{q} = J^{-1} \boldsymbol{F} \boldsymbol{Q}$ は，それぞれ $B_t$ における質量密度，Cauchy 応力と空間熱流束である．また，式 (34) から式 (37) に対応する $B_t$ を参照とする接線はそれぞれ次式となる．

$$D^2\Delta\phi|^i_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{const.}}}[\delta\boldsymbol{\varphi}, \Delta\boldsymbol{\varphi}]$$
$$= \int_{B_t} \nabla_{\boldsymbol{x}} \delta\boldsymbol{\varphi} : c_{\mathrm{MM}} : \nabla_{\boldsymbol{x}} \Delta\boldsymbol{\varphi} dv$$
$$+ \int_{B_t} \boldsymbol{\sigma} : \left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \Delta\boldsymbol{\varphi}\right)^{\mathrm{T}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \delta\boldsymbol{\varphi} dv - \delta H^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{mm}} \left(\delta\boldsymbol{\varphi}, \Delta\boldsymbol{\varphi}\right) \quad (46)$$

$$D^2\Delta\phi|^i_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{const.}}}[\delta\boldsymbol{\varphi}, \Delta T]$$
$$= \int_{B_t} \nabla_{\boldsymbol{x}} \delta\boldsymbol{\varphi} : c_{\mathrm{MT}} \Delta T dv + \int_{B_t} \nabla_{\boldsymbol{x}} \delta\boldsymbol{\varphi} : c_{\mathrm{MG}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\Delta T}{T}\right) dv \quad (47)$$

$$D^2\Delta\phi|^i_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{const.}}}[\delta T, \Delta\boldsymbol{\varphi}]$$
$$= \int_{B_t} \delta T c^{\mathrm{T}}_{\mathrm{MT}} : \nabla_{\boldsymbol{x}} \Delta\boldsymbol{\varphi} dv + \int_{B_t} \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\delta T}{T}\right) \cdot c^{\mathrm{T}}_{\mathrm{MG}} : \nabla_{\boldsymbol{x}} \Delta\boldsymbol{\varphi} dv \quad (48)$$

$$D^2\Delta\phi|^i_{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{const.}}}[\delta T, \Delta T]$$
$$= \int_{B_t} \delta T \left(-J^{-1}\rho_0 \partial_T \eta + p \partial^2_{TT} J^{-1}_{\mathrm{T}}\right) \Delta T dv$$
$$- \int_{B_t} \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\delta T}{T}\right) \cdot c_{\mathrm{GG}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\Delta T}{T}\right) dv$$
$$- \int_{B_t} \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\delta T \Delta T}{T^2}\right) \cdot \Delta t \boldsymbol{q} dv - \delta H^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{hh}} \left(T, \delta T, \Delta T\right) \quad (49)$$

ここで，次の空間接線係数を定義した．

$$c_{\mathrm{MM}}|_{ijkl} = J^{-1} \mathcal{C}_{\mathrm{MM}}|_{IJKL} F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL}$$
$$- J^{-1} \left(\Delta t \partial^2_{\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}} \chi\right)_{iIkJ} F_{jI} F_{lJ} \quad (50)$$
$$c_{\mathrm{MT}} = J^{-1} \boldsymbol{F} \partial_T \boldsymbol{S}' \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} + p \partial_T J^{-1}_{\mathrm{T}} \boldsymbol{1} \quad (51)$$
$$c_{\mathrm{MG}}|_{ijk} = J^{-1} \left(\Delta t \partial^2_{\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}} \chi\right)_{iIJ} F_{jI} F_{kJ} \quad (52)$$
$$c_{\mathrm{GG}}|_{ij} = J^{-1} \left(\Delta t \partial^2_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{G}} \chi\right)_{IJ} F_{iI} F_{jJ} \quad (53)$$

さらに，式 (40) から式 (43) に対応する $B_t$ を参照とする接線は次式となる．

$$\partial_{\boldsymbol{\omega}} D\Delta\phi|^i[\delta\boldsymbol{\varphi}] * D\boldsymbol{\omega}[\Delta\boldsymbol{\varphi}]$$
$$= \frac{\partial_{\bar{J}_{\mathrm{M}}} p |v|^2}{|V|} \mathrm{avg}\left(J^{-1}_{\mathrm{T}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{avg}\left(J^{-1}_{\mathrm{T}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \Delta\boldsymbol{\varphi}\right) \quad (54)$$
$$\partial_{\boldsymbol{\omega}} D\Delta\phi|^i[\delta\boldsymbol{\varphi}] * D\boldsymbol{\omega}[\Delta T]$$
$$= \frac{\partial_{\bar{J}_{\mathrm{M}}} p |v|^2}{|V|} \mathrm{avg}\left(J^{-1}_{\mathrm{T}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}\right) \mathrm{avg}\left(\partial_T J^{-1}_{\mathrm{T}} \Delta T\right) \quad (55)$$

Table 1　Material parameters of Gent thermo-hyperelastic model

| $\rho_0$ [kg/m$^3$] | $T_0$ [K] | $K$ [MPa] | $\mu_0 T_0$ [MPa] | $J_{\mathrm{m}}$ | $\alpha$ [/K] | $c$ [J/kg/K] | $\kappa$ [W/m/K] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 900 | 298.16 | 400 | 0.8 | 4.0 | $5.0 \times 10^{-4}$ | 1900 | 0.13 |

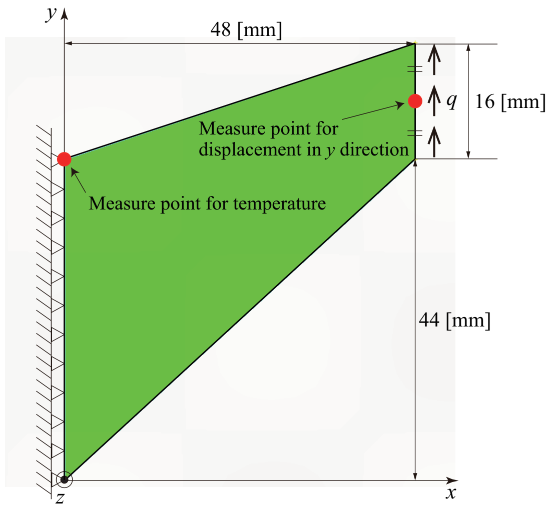


Fig. 1　Cook's membrane with boundary condition

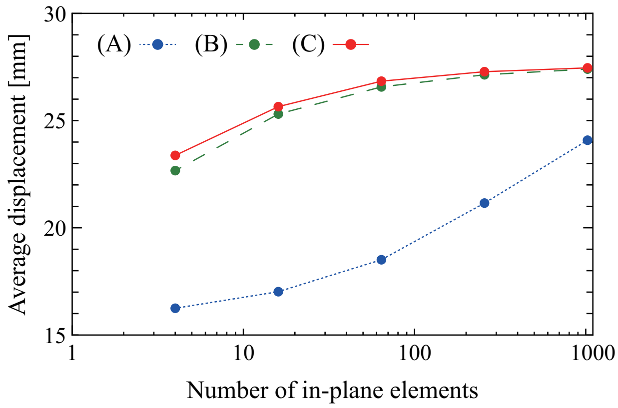


Fig. 2　Relationships between average nodal displacement and number of in-plane elements

$$\partial_{\boldsymbol{\omega}} D\Delta\phi|^i[\delta T] * D\boldsymbol{\omega}[\Delta\boldsymbol{\varphi}] = \frac{\partial_{\bar{J}_{\mathrm{M}}} p|v|^2}{|V|} \operatorname{avg}\left(\delta T \partial_T J_{\mathrm{T}}^{-1}\right) \operatorname{avg}\left(J_{\mathrm{T}}^{-1} \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \Delta\boldsymbol{\varphi}\right) \tag{56}$$

$$\partial_{\boldsymbol{\omega}} D\Delta\phi|^i[\delta T] * D\boldsymbol{\omega}[\Delta T] = \frac{\partial_{\bar{J}_{\mathrm{M}}} p|v|^2}{|V|} \operatorname{avg}\left(\delta T \partial_T J_{\mathrm{T}}^{-1}\right) \operatorname{avg}\left(\partial_T J_{\mathrm{T}}^{-1} \Delta T\right) \tag{57}$$

ここで，avg$(\bullet)$ は $\bullet$ の $B_t$ に関する体積平均である．

## 5. 数値計算例

本節では，曲げ変形とせん断変形が卓越する Cook の平面ひずみ問題を数値計算例として，増分型 Mean dilatation 法の性能を検証する．なお，増分型 Mean dilatation 法は，第 4.2 節で示した空間表示のアルゴリズムを実装した．

### 5.1. 問題設定

本研究では，Fig.1 に示すような，断熱過程において構造物の左端を $x, y$ 方向に拘束し，右端に $y$ 方向の分布荷重 $q = 1.0$[N] を作用させる問題を取り上げる．ここで，実際の数値解析では，厚みが 10[mm] の三次元モデルを用いており，平面ひずみ条件を満足するために両側の $xy$ 面を $z$ 方向に拘束した．また，構成材料には次式で示す Gent の超弾性モデル [16] を採用し，設定した材料パラメータは Table1 に示すものとした．

$$\rho_0 U(J_{\mathrm{M}}) = \frac{1}{2} K (J_{\mathrm{M}} - 1)^2, \quad J_{\mathrm{T}} = \exp\left[3\alpha (T - T_0)\right] \tag{58}$$

$$\rho_0 \bar{\psi}\left(\bar{\boldsymbol{F}}, T\right) = -\frac{\mu_0 T}{2} J_{\mathrm{m}} \ln\left(1 - \frac{\bar{I}_1 - 3}{J_{\mathrm{m}}}\right) \tag{59}$$

$$\rho_0 \psi^{\mathrm{h}}(T) = \rho_0 c \left\{T - T_0 - T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right\} \tag{60}$$

$$\chi(\boldsymbol{G}) = \frac{T_0 \kappa}{2} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{G} \tag{61}$$

なお，本例題におけるポアソン比は，

$$\nu = (3K - 2\mu_0 T_0) / (6K + 2\mu_0 T_0) = 0.499000666...$$

であるため，材料は微圧縮状態である．

本研究では，(A) 8 節点 1 次要素を用いた標準的な増分型変分法 [6]，(B) 20 節点 2 次要素を用いた標準的な増分型変分法，(C) 8 節点 1 次要素を用いた増分型 Mean dilatation 法の 3 種類について解析を実施する．ここで，有限要素モデルの分割数は，$z$ 方向を 4 に固定して，$x$ および $y$ 方向をそれぞれ $2, 4, 8, 16, 32$ とし，解析時間およびステップ数は，100[sec] と 100[steps] に統一した．なお，すべての解析において完全応力積分法を採用した．そして本手法の性能は，これら 3 種類の方法について Fig1 の赤丸で示した箇所の節点変位と節点温度，および修正子計算の反復回数や計算時間を比較することで検証する．

### 5.2. 解析結果

Fig2 と Fig3 に，3 種類の方法を用いて得られた平均節点変位，平均節点温度と有限要素モデルの $xy$ 面の全要素数との関係を示す．なお，平均節点変位と平均節点温度は各ステップの節点変位および節点温度の和を全ステップ数で除したものとする．まず平均節点変位の結果を観察すると，増分型 Mean dilatation 法を用いた (C) の結果と 2 次要素を用いた (B) の結果は概ね一致することが確認できる．特に，要素

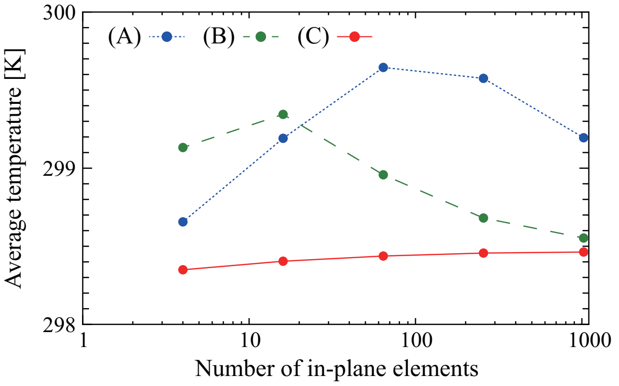


Fig. 3　Relationships between average nodal temperature and number of in-plane elements

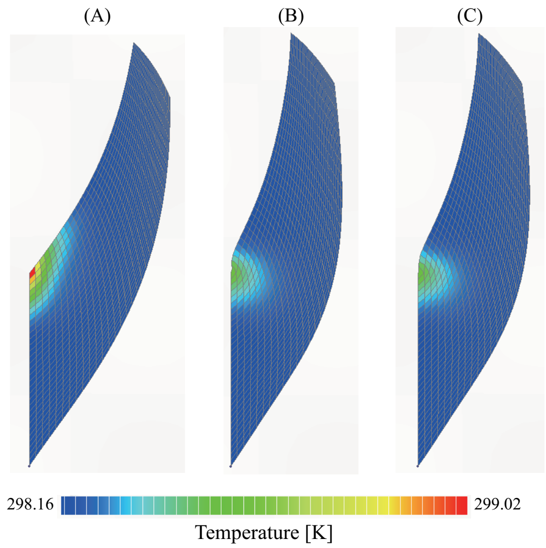


Fig. 4　Deformed configurations of Cook's membrane with absolute temperature distributions

数の増加に対して両者の差は小さくなっていき，要素数 256 以上で解が飽和することを確認できる．加えて，要素数 4 の (C) の結果は要素数 1024 の (A) の結果とほぼ同じとなっている．したがって，増分型 Mean dilatation 法を使用することで体積ロッキングを回避することができ，標準的な増分型変分法より高精度な解が得られることがわかった．

一方で，平均節点温度の結果を観察すると，要素数 64 以上で (A) の結果は (B) と (C) の結果との明らかな差が確認される．また，要素数 16 以上では，要素数の増加に対して (B) の結果と (C) の結果の差が減少する様子を確認できる．これは，要素数に対する (B) と (C) の変位量の差が減少することで，変形による発熱量の差も小さくなっていくことを表している．したがって，増分型 Mean dilatation 法は，自己発熱による温度変化に対しても良好な精度を保証できると考えられる．事実，Fig4 に示される面内要素数 1024 で構成される

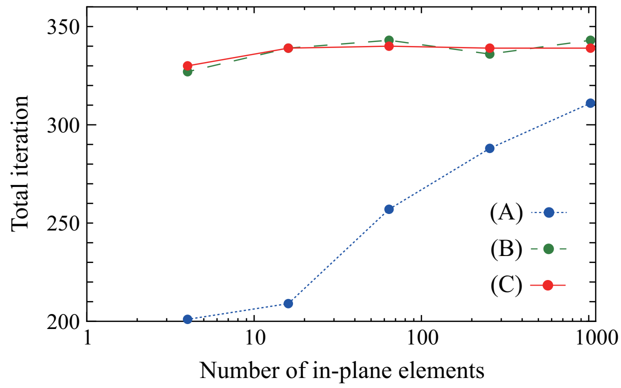


Fig. 5　Relationships between total iteration in corrector calculation and number of in-plane elements

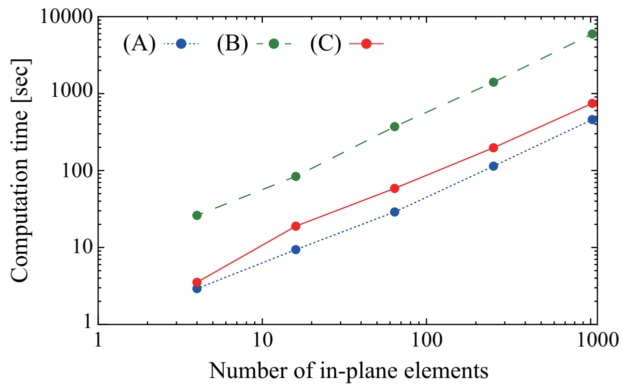


Fig. 6　Relationships between total computation time and number of in-plane elements

構造物の最終的な変形形状と温度分布を観察すると，(A) と (B) の結果では変形場，温度場双方で明らかな差が確認されるが，(B) と (C) の結果はほぼ一致することが確認できる．

ところで本研究では，応力や熱流束といった形状関数の空間勾配に依存する量の精度検証は行っていない．この点に関して，関連する他の手法 (17) では，圧力の応答が振動することが報告されており，本手法でも同様の問題が生じる可能性がある．しかし，その具体的な検証と回避方法については今後の課題として残しておく．

続いて，Fig5 に，3 種類の方法を用いた場合における修正子計算の反復回数と有限要素モデルの $xy$ 面の全要素数との関係を示す．なお，熱・機械連成問題を Newton-Raphson 法で解く際に設定した収束しきい値は $10^{-6}$ とした．結果を観察すると，まず (A) の方法は，(B) と (C) の方法に比べて反復回数が少ないことが確認できる．これは，(A) の方法だとモデルの応答変位量が小さいためであり，実際に，要素数を増やしていくと (A) と (B)，(C) 間の反復回数の差は減少する傾向にある．同様の理由より，(B) の方法と (C) の方法

では，少ない要素分割数でも良好な応答が得られていることから，要素数に関わらずほとんど同じ反復回数を推移している．とはいえ，どの結果についても 1 ステップあたりの反復回数は 3，4 回程度に収まっているため，増分型変分法による定式化によって，標準的な Newton-Raphson 法を用いた場合でも安定的な熱・機械強連成解析が可能となることがわかる．

最後に，Fig.6 に，3 種類の方法を用いた場合における全計算時間と有限要素モデルの $xy$ 面の全要素数との関係を示す．(C) の方法は，(A) の方法と比べると修正子計算の反復回数の増大により，多くの計算時間を必要とする．しかし，同等の精度が得られている (B) の方法と比べると全計算時間が 10 分の 1 程度に抑えられている．

以上より，本研究で提案した増分型 Mean dilatation 法は，微圧縮超弾性体の熱・機械強連成解析において解の精度と計算の安定性，効率性の面で優れた手法であるといえる．

## 6. 結言

本研究では，微圧縮超弾性体の熱・機械強連成解析を安定的かつ効率的に実施可能な増分型 Mean dilatation 法を構築した．そして，Newton-Raphson 法に基づく状態変数の完全陰的更新アルゴリズムを構築し，計算の収束性や効率性に大きな影響を及ぼす接線剛性行列が必ず対称性を満足することを示した．また，Cook の平面ひずみ問題の数値解析例において，本手法を用いた有限要素解析は，2 次要素を用いた場合より計算時間を大幅に削減できるばかりでなく，解の精度がほとんど同じとなることが示された．したがって，本手法は解の精度と計算の安定性，効率性の面で優れた手法であると結論付けられる．

さらに，本手法は，非弾性変形のエネルギー散逸から導出されるポテンシャル関数を考慮することで，容易に材料非線形問題にも拡張可能である．また，物体に蓄えられる全ポテンシャルをメッシュ再生成の指標となる誤差ノルムに使用することで，微圧縮超弾性体の熱・機械連成問題に対するアダプティブメッシュ法の構築が期待できる．以上により，増分型 Mean dilatation 法はゴム材料の熱・機械連成挙動の洗練された数値的予測技術としての多くの可能性を秘めており，本手法が多角的に拡張可能であることをここに記しておく．

**謝辞**

本研究は，JSPS 科研費 20K14603 の助成を受けて行われた．ここに記して謝意を表する．

## 参考文献

(1) Rodas, C. O., Zairi, F., Nait-Abdelaziz, M. and Charrier, P.: A thermo-visco-hyperelastic model for the heat build-up duriing low-cycle fatigue of filled rubbers:Formulation, implementation and experimental veriffication, International Journal of Plasticity, **79**(2016), pp. 217–236.

(2) Guo, Q., Zairi, F. and Guo, X.: A thermo-viscoelastic-damage constitutive model for cyclically loaded rubbers. part II: Experimental studies and parameter identification, International Journal of Plasticity, **101**(2018), pp. 58–73.

(3) de Souza Neto, E. A., Peric, D., Dutko, M. and Owen, D. R. J.: Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids, International Journal of Solids and Structures, **33**(1996), pp. 3277–3296.

(4) Sussman, T. and Bathe, K. -J.: A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis, Computer and Structures, **26**,Issue1-2(1987), pp. 357–409.

(5) Nagtegaal, J. C., Parks, D. M. and Rice, J. R.: On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, **4**(1974), pp. 153–177.

(6) Yang, Q., Stainier, L. and Ortiz, M.: Variational formulation of the coupled thermo-mechanical boundary value problem for general dissipative solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **54**,No.2(2005), pp. 401–424.

(7) Stainier, L. and Ortiz, M.: Study and validation of a variational theory of thermo-mechanical coupling in finite visco-plasticity, International Journal of Solids and Structures, **47**,Issue5(2010), pp. 705–715.

(8) Coleman, B. D. and Noll, W.: The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **13**(1963), pp. 167–178.

(9) Coleman, B. D. and Gurtin, M. E.: Thermodynamics with internal state variables, The Journal of Chemical Physics, **47**(1967), pp. 597–613.

(10) Flory, P. J.: Thermodynamics relations for high elastic materials, Transactions of the Faraday Society, **57**(1961), pp. 829–838.

(11) Holzapfel, G. A. and Simo, J. C.: Entropy elasticity of isotropic rubber-like solids at finite strains, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, **132**(1996), pp. 17–44.

(12) Holzapfel, G. A.: Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineeriing, Wiley(2000)

(13) Stainier, L.: Consistent incremental approximation of dissipation pseudo-potentials in the variational formulation of thermo-mechanical constitutive updates, Mechanics Research Communications, **38**(2011), pp. 315–319.

(14) Canadija, M. and Mosler, J.: On the thermomechanical coupling in finite strain plasticity theory with non-linear kinematic hardening by means of incremental en-

ergy minimization, International Journal of Solids and Structures, **48**,Issue7(2011), pp. 1120–1129.

(15) Simo, J. C.: Numerical analysis of classical plasticity In: Ciarlet, P., Lions, J. (Eds.), Handbook for numerical analysis, Elsevier Amsterdam(1998)

(16) Gent, A. N.: A new constitutive relation for rubber, Rubber Chemistry and Technology, **69**(1996) pp. 59–61.

(17) Liu, G. R., Dai, K. Y. and Nguyen, T. T.: A smoothed finite element method for mechanics problems, Computational Mechanics, **39**(2007), pp. 859–877.