計算数理工学論文集 Vol. 20 (2020 年 12 月)，論文 No. 04-201219 JASCOME

境界積分による X 線計算機断層撮影法の正則化

REGULARIZATION OF X-RAY COMPUTERIZED TOMOGRAPHY BY THE CAUCHY-TYPE BOUNDARY INTEGRAL FORMULA

藤原　宏志 [1)]，大石　直也 [2)]

Hiroshi FUJIWARA and Naoya OISHI

1) 京都大学大学院情報学研究科　(〒 606-8501　京都市左京区吉田本町,　E-mail: fujiwara@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
2) 京都大学大学院医学研究科　(〒 606-8507　京都市左京区聖護院川原町 53,　E-mail: noishi@kuhp.kyoto-u.ac.jp)

In this paper we shall discuss regularization to the X-ray Computerized Tomography (CT) algorithm based on the Cauchy type boundary integration. The reconstruction formula involves with a series of Fourier coefficients, and thus its truncation gives a stable computation scheme, since in unstable problems higher modes grow rapidly through their numerical processes. Reconstructed results from measurement data are also presented in order to show reliability and practicability of the proposed scheme.

Key Words : Inverse Problems, Radon transform, X-ray Computerized Tomography, Cauchy-type Integral Formula, Regularization

1. 緒言

本論文では，近年提唱された Cauchy 型の積分公式にもとづく X 線計算機断層撮影 (Computerized Tomography; CT) のアルゴリズムに対する正則化法を論じる．また，誤差を含む実測データを用いる事例研究により，提案手法の実用性と信頼性の高さを定量的に示す.

X 線 CT は非侵襲・非破壊検査の代表的な手法であり，医用・産業用途で広く利用されている．学術的にも様々なトモグラフィ手法の基礎と位置付けられ，逆問題の中心的話題である．その高精細・高画質化には医学など応用上の知見や信号処理などの手法の寄与も大きいが，数理の視点からアルゴリズムの本質としては，逆 Radon 変換 [(11)] が長期に渡って決定的な役割を果たしており，それに基く Filtered Back Projection (FBP) が典型的な再構成手法として知られている [(9, 10)].

1990 年代になって，Radon 変換とは全く異なる境界積分を用いるアルゴリズムが函数解析的手法により提案され [(1)]，その具体的な表現が Cauchy の積分定理の一般化にもとづいて与えられた [(2)]．この手法は，直進性が本質である X 線 CT を領域の境界上での積分で扱う点が特徴的であり，従来の X 線 CT アルゴリズムでは困難であった散乱を含む場合への適用も数学的に厳密に示されている [(4, 5)]．このことから本手法は，散乱を伴う信号を利用する種々の次世代トモグラフィ手法の基盤技術と考えられ，本研究では，これに対して自然に正則化法の構造が導入されることを示す.

本論文では，この境界積分による X 線 CT において，観測誤差を含む実測データを利用するための信頼性の高い正則化法を論じる．本手法に対して，近年，著者らによってその離散化アルゴリズムが提案され，数値的な実現可能性とともに，幾つかのアルゴリズムの比較や離散化パラメータの影響が報告されたが，観測誤差については考察されていなかった [(6, 7)]．上述のとおり本手法をもとに次世代トモグラフィの研究が進められていることを念頭におくと，その基礎である本手法での観測誤差の影響の考察は重要である．X 線 CT は典型的な逆問題であり，Hadamard の意味で非適切 (ill-posed) となる．順問題が解の (1) 存在，(2) 一意性，(3) 所与の条件・データへの連続な依存，の 3 点を前提とする適切性 (well-posed) を有することと異なり，X 線 CT の数値計算においては，特に (3) の連続性の欠如が最大の困難点である．すなわち理論的に高精度な近似は，元の問題の不安定性をも近似することになり，観測データや離散化誤差を小さくしても得られる数値計算結果の誤差が小さくなることが保証されないのみならず，それらの誤差は計算過程で急激に増大し，数値計算が破綻する．実際，著者らの先行研究 [(7)] においても導入された近似のひとつを高精度とした場合に，理論的には近似精度の向上が期待されるものの，実際の数値解の精度が低下する例が報告されている.

本論文では，この問題に対して境界積分による手法に現れる級数の打ち切りが正則化 (安定化) の役割を果たすことを

2020 年 10 月 10 日受付，2020 年 11 月 15 日受理

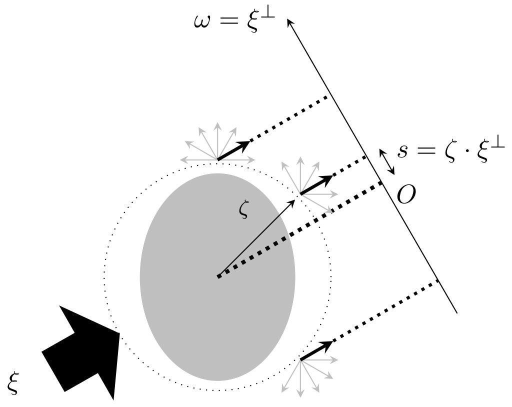


Fig. 1: Measurement with Parallel Beam Projection to the ξ-direction

述べる．次節で境界積分にもとづく X 線 CT のアルゴリズムに対する正則化を導出し，3 節でその意味を論じる．さらに 4 節で，観測誤差を含む実測データからの再構成例を示して提案手法の実用性を示す.

2. 境界積分による再構成手法

X 線 CT は，物体に X 線を照射し，その入出力信号から物体の断面上での X 線の減衰係数の分布 $\mu(x)$ を求めるものである．その典型的な再構成手法である FBP に現れる平行ビーム投影法では，Radon 変換

$$R\mu(\omega, s) = \int_{x\cdot\omega=s} \mu(x)\, d\ell$$

を $\arg\omega \in [0,\pi)$ と $s \in \mathbb{R}$ で計測する

さて対象物体の断面が $\mathbb{R}^2$ の有界領域 D を占めるとする．このとき物体の外部で $\mu \equiv 0$ と考えることで，D を単位円板 $\{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ と仮定して一般性を失わない．X 線は物体内部で散乱されず，直進する．物体の外部から $\xi \in S^1$ 方向に X 線を照射するとき，$\overline{D}$ を D の閉包として，位置 $x \in \overline{D}$ に到達する X 線が物体に入射する点を x_*，また位置 $x \in \overline{D}$ での X 線の強度を $I(x,\xi)$ として，

$$u(x,\xi) = -\log \frac{I(x,\xi)}{I(x_*,\xi)}$$

とすると，$\zeta \in \partial D, \xi \in S^1$ に対して

$$u(\zeta,\xi) = \begin{cases} R\mu(\xi^{\perp}, \zeta\cdot\xi^{\perp}), & \zeta\cdot\xi > 0, \\ 0, & \zeta\cdot\xi < 0 \end{cases} \tag{1}$$

と表される [7]．Fig. 1 に，上述の平行ビーム投影法における Radon 変換 $R\mu(\omega,s)$ の引数と ζ,ξ の関係を示す．図中，対象物体の断面を灰色で表し，それを囲む点線は単位円 D を表す．ξ 方向に照射した X 線は物体で減衰され，方向ベクトル $\omega = \xi^{\perp}$ の s 軸上で強度を観測し，$u(\zeta,\xi)$ を算出する．また $\zeta \in \partial D$ を始点とする矢印は，D から外部を向く $\zeta\cdot\xi > 0$ の方向，すなわち $R\mu$ から $u(\zeta,\xi)$ を算出する方向 ξ を表す．以下では $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ と $z = x_1 + \sqrt{-1}\,x_2 \in \mathbb{C}$ を同一視し，$\overline{z}$ は z の複素共役を表すとする．

これらの設定のもとで Bukhgeim らは，u の $\xi = \xi(\cos\theta, \sin\theta)$ についての Fourier 変換 $u\big(z, \xi(\theta)\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(z) e^{-in\theta}$ に対してシフト作用素

$$S^*(u_1, u_3, u_5, \dots) = (u_3, u_5, u_7, \dots)$$

を適当な位相で扱い，$\lambda = (\zeta - z)/(\overline{\zeta} - \overline{z})$, $z \in D$, $\zeta \in \partial D$ に対して $\mathcal{R}(\lambda) = (\lambda I - S^*)^{-1}$ が有界作用素を定めることを示し，S^* のレゾルベントの境界積分

$$u_{\mathrm{odd}}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{d\zeta - S^* d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \mathcal{R}(\lambda) u_{\mathrm{odd}}(\zeta) \tag{2}$$

を本質として，$\mu(z) = 2\,\mathrm{Re}\,\dfrac{\partial u_1}{\partial z}(z)$ と再構成されることを示した [1]．ただし $u_{\mathrm{odd}} = (u_1, u_3, u_5, \dots,)$ である．一方，Finch は複素解析的な手法により同等な

$$\begin{aligned} u_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{u_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}\right) \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\ell}} u_{2\ell+1}(\zeta) \end{aligned}$$

を示した [2]．これは数値計算に適する表現であり，∂D が単位円のときは，境界積分に台形則を適用することで数値計算スキームが構成される [7]．正則化法の構成のために，数値計算の不安定性の影響を強く受ける高周波成分を打ち切る，すなわち $u_{2\ell+1} \equiv 0$ が全ての $\ell > L$ について成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} u_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{u_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}\right) \sum_{3\le 2\ell+1\le M} \frac{1}{\lambda^{\ell}} u_{2\ell+1}(\zeta) \end{aligned} \tag{3}$$

を得る．以下，M に対して $2\ell + 1 \le M$ となる最大の ℓ を L と記す.

ここで $\{u_n\}$ は u の満たす輸送方程式に由来して

$$\overline{\partial} u_n + \partial u_{n+2} = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

を満たす [1]．ただし $\partial = (\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})/2$, $\overline{\partial} = (\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})/2$ である．この性質は A-analyticity (ただし A は適当な作用素であり，この場合は $A = S$) とよばれ，Fourier 係数が互いに関係していることが要請される．このとき次が成立する.

定理 1. ある非負正数 L に対して $u_{2L+3} \equiv 0$ ならば，$M = 2L + 1$ に対して (3) が成立する.

Proof. まず Bukhgeim らの設定のもとで，

$$(\lambda I - S^*)^{-1} u_{\mathrm{odd}} = (v_1, v_3, v_5, \dots) \tag{4}$$

が定まることに注意する．このとき $u_1 = \lambda v_1 - v_3$ であり，(2) より

$$\begin{aligned} u_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \left\{ \frac{v_1(\zeta)\, d\zeta}{\overline{\zeta} - \overline{z}} - \frac{S^* v_1(\zeta)\, d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \left\{ \frac{u_1 + v_3}{\lambda} \frac{d\zeta}{\overline{\zeta} - \overline{z}} - \frac{v_3\, d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \left\{ \frac{u_1\, d\zeta}{\zeta - z} + \left(\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \right) v_3 \right\} \end{aligned}$$

を得る．ここで $u_{2L+3} \equiv 0$ ならば，λ が S^* のレゾルベント集合に含まれることから $v_{2L+3} = 0$ であり，(4) は $(v_1, v_3, \ldots, v_{2L+1})$ に関する連立一次方程式

$$\begin{aligned} \lambda v_{2n+1} - v_{2n+3} &= u_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, L-1, \\ \lambda v_{2L+1} &= u_{2L+1} \end{aligned}$$

となる．後退代入により直ちに

$$v_{2n+1} = \sum_{\ell=n}^{L} \frac{u_{2\ell+1}}{\lambda^{\ell-n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, L$$

がわかるので，(3) を得る． □

これは上述のように $u_{2\ell+1} \equiv 0$ を全ての $\ell > L$ に仮定する必要はなく，ある $\ell = L+1$ で Fourier 係数が 0 となれば十分であることを示している．

3. 正則化パラメータと安定性

さて (3) の右辺を $u_1^{(M)}$ とすると，$L^2(D)$ で $u_1^{(M)} \to u_1$ が成立するので，(3) は正則化法となっている．しかしながら著者らの先行研究 [7] では M を大きくすると数値解の誤差が増大する例が示されており，数学的な結果が必ずしも数値計算で再現されないが，前述のとおり，これは X 線 CT の非適切性に起因するものである．一般に非適切問題では「高周波成分」が計算過程で急激に増大することが知られており，Fourier 解析や特異値分解等の周波数分解を導入して高周波成分の影響を軽減させる対処がなされる．提案手法 (3) も同様に，正数 M より大きい Fourier 係数を打ち切り，高周波成分の影響が現れないようにしている．一方，この高周波成分は問題の細部の情報を含んでおり，その影響を極度に抑えた場合，十分な近似が得られないことに注意する．

一般的な正則化法では観測誤差や計算誤差の増大は，用いる観測データのみならず，数値計算アルゴリズムとその実装に依存する．本提案手法でも同様に，これら種々の要因を勘案して，計算にもちいる周波数成分の最大値，すなわち M を設定する必要がある．

4. 数値計算例

提案する正則化法を現実的な設定で考察するため，X 線 CT のテストデータとして公開されている Fig. 2 の Radon 変換を用いた再構成をおこなう [3, 8]．これは実測で得られたもので，ω の偏角方向に区間 $[0, 2\pi)$ を $N_\omega = 120$ 等分，s 方向に区間 $[-1, 1]$ を $N_s = 2296$ 等分して観測値が与えられている．なお D の直径は 114.8mm に相当しており，s 方向の解像度は 114.8[mm]/2296 = 50[μm] である．本節では混同の恐れのない限り，簡便のため，$\omega, \zeta, \xi \in \mathbb{R}^2$ の偏角を同じ記号でそれぞれ ω, ζ, ξ で表し，それらを適当な区間で考える．

さて格子幅を $\Delta\omega = 2\pi/N_\omega$, $\Delta s = 2/N_s$ として，格子点 $\omega_n = n\Delta\omega$, $s_j = -1 + j\Delta s$ 上での観測値の全体を

$$\mathcal{D} = \{R\mu_{n,j} = R\mu(\omega_n, s_j)\,;\, 0 \le n < N_\omega, 0 \le j \le N_s\}$$

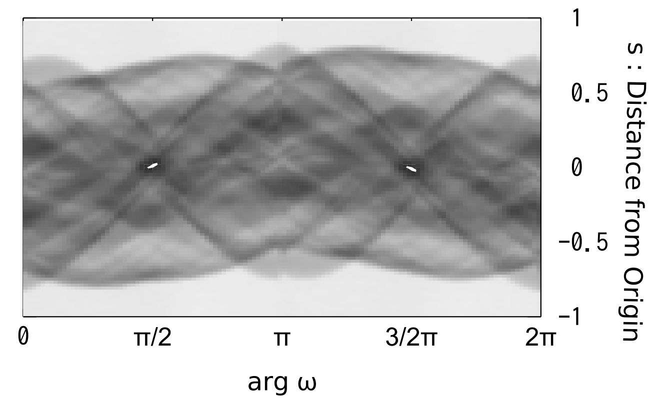


Fig. 2: Measurement Data $R\mu(\omega, s)$ (Sinogram) for Walnut [3, 8]

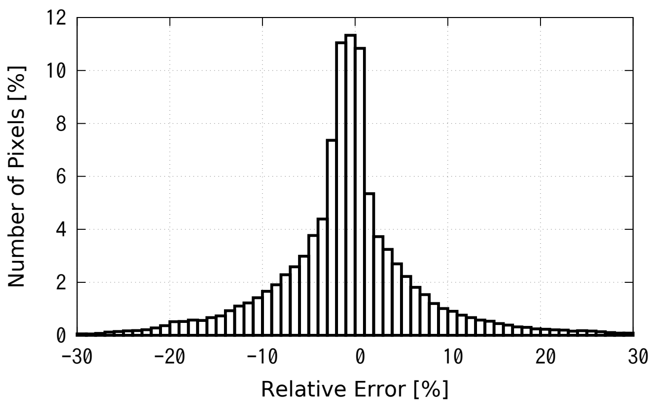


Fig. 3: Histgram of Relative Error $E(\omega, s)$ (6) of Sinogram of Fig. 2 for $0 \le \omega < \pi$, $-1 \le s \le 1$

とする．$\mathcal{D}$ は $\omega_n \in [0, 2\pi)$ で与えられるが，Radon 変換が

$$R\mu(\omega + \pi, s) = R\mu(\omega, -s) \tag{5}$$

を満たすことから，

$$E(\omega, s) = \frac{R\mu(\omega + \pi, s) - R\mu(\omega, -s)}{R\mu(\omega, -s)} \tag{6}$$

を (ω, s) での相対誤差の指標とすることができる．なお $\mathcal{D}$ 中には $|R\mu_{n,j}| < 10^{-8}$ となる点はなかった．$0 \le \omega < \pi$ の範囲での $E(\omega, s)$ の ヒストグラムを Fig. 3 に示す．このとき $|E(\omega, s)|$ の平均値は約 5.3% であった．

FBP では $\mathcal{D}$ のうち $\omega_n \in [0, \pi)$ の範囲の観測値を用いるが，これで得られる断層画像を Fig. 4 に示す．ここでは Shepp-Logan フィルタを用い，バンド幅には，標本化定理の許す ω 方向と s 方向のそれぞれから決まるバンド幅の上限 [10] である 30 と $2296\pi/2 \approx 3607$ の相乗平均である約 329 を利用した．結果では細部の構造が良好に得られるとともに，FBP に特徴的な streak artifact が現れていることがわかる．

一方，提案する境界積分の数値計算においては (3) に現れる単位円周上の数値積分や ξ 方向の Fourier 変換のために，

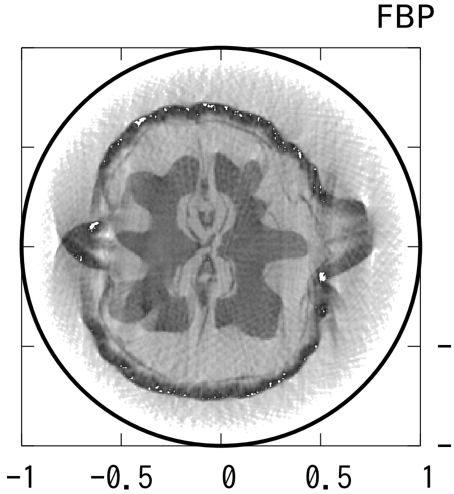


Fig. 4: Reconstruction by Filtered Back Projection

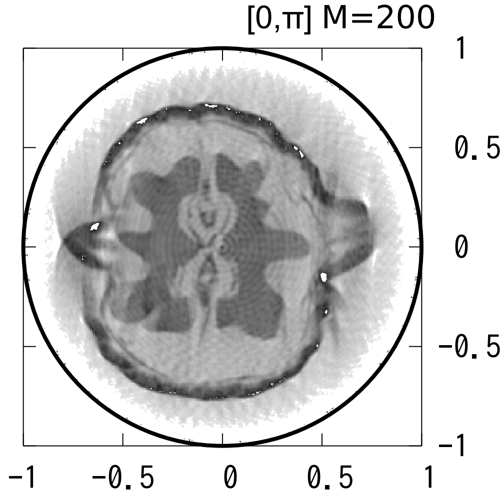


Fig. 5: Reconstruction by the Boundary Integral Formula with $M = 200$ Using $\omega \in [0, \pi)$

ζ, ξ を等間隔で離散化する [7]．しかし一般的な平行ビーム投影では $\mathcal{D}$ と同様に，(ω, s) について格子点上で $R\mu$ の観測値が与えられるため，(1) の設定では補間が必要となる．まず ξ 方向の分割幅を $\Delta\xi = 2\pi/N_\omega$ として $\xi_k = k\Delta\xi$ とする．このとき N_ω が 4 の倍数ならば $\xi_k^\perp = \omega_{k+N_\omega/4}$ である．さらに (5) を利用して FBP の場合と同様に $\omega \in [0, \pi)$ の範囲を用いることを考えて，$\omega_{k+N_\omega/4} \geq \pi$ の場合は $\omega_{k+N_\omega/4} - \pi = \omega_{k-N_\omega/4}$ を用いる．また $\Delta\zeta$ については，ζ の投影面への正射影と s 方向の解像度とを考慮して (Fig. 1)

$$\sin\frac{2\pi}{N_\zeta} < \Delta s$$

を満たす最小の 4 の正の倍数 N_ζ を用いて 2π を N_ζ 等分して $\Delta\zeta = 2\pi/N_\zeta$ とし，これで得られる等分点を $\zeta_i = i\Delta\zeta$, $0 \leq i < N_\zeta$ とする．なお $\mathcal{D}$ に対しては $N_\zeta = 7216$ であった．

以上で設定する格子点 (ζ_i, ξ_k), $0 \leq i < N_\zeta$, $0 \leq k < N_\omega$ 上で

$$u(\zeta_i, \xi_k) \approx \begin{cases} R\mu(\omega_k + \pi/2, s_j), & \zeta_i \cdot \xi_k > 0 \text{ かつ } \xi_k < \pi/2,\ 3\pi/2 \leq \xi_k; \\ R\mu(\omega_k - \pi/2, -s_j), & \zeta_i \cdot \xi_k > 0 \text{ かつ } \pi/2 \leq \xi_k < 3\pi/2; \\ 0, & \zeta_i \cdot \xi_k \leq 0 \end{cases}$$

と近似する．ただし $j\Delta s \leq \zeta_i \cdot \xi_k^\perp < (j+1)\Delta s$ となる $j \in \mathbb{Z}$ がただひとつ存在するので，この j により $u(\zeta_i, \xi_k) \approx R\mu(\xi_k^\perp, s_j)$ とする．すなわち，$s = \zeta_i \cdot \xi_k^\perp$ での Radon 変換に対しては，本研究では $R\mu$ を s 方向に区分定数で補間した．さらに (5) を利用して $\omega \in [0, \pi)$ に対応するデータを利用している．

以上のもとで，打ち切りパラメータ $M = 200$ での再構成結果を Fig. 5 に示す．結果より，streak artifact も含めて既存の FBP と同等の結果が得られていることがわかる．

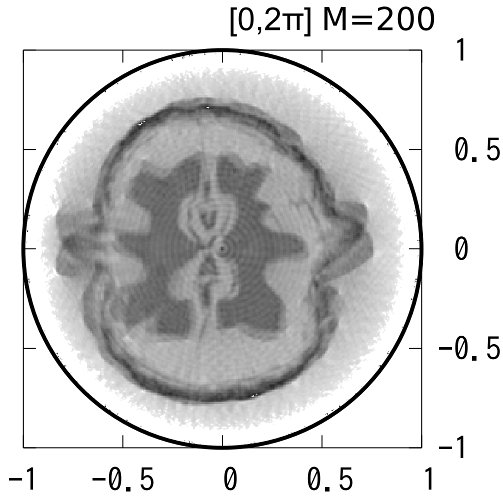


Fig. 6: Reconstruction by the Boundary Integral Formula with $M = 200$ Using $\omega \in [0, 2\pi)$

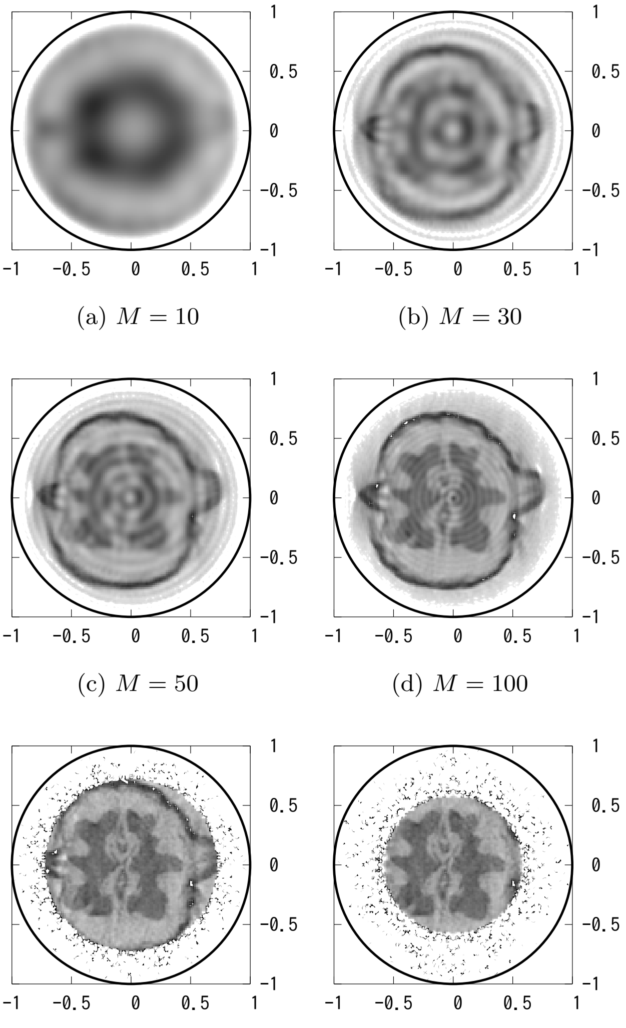
また提案する境界積分による方法では，(5) を利用せずに

$$u(\zeta_i, \xi_k) \approx \begin{cases} R\mu(\omega_k + \pi/2, s_j), & \zeta_i \cdot \xi_k > 0; \\ 0, & \zeta_i \cdot \xi_k \leq 0 \end{cases}$$

として，$\mathcal{D}$ を測定した $\omega \in [0, 2\pi)$ の全体を利用することもできる．この場合の再構成結果が Fig. 6 であり，streak artifact が解消されていることがわかる．

さらに打ち切り項数 M の正則化への寄与を調べるため，$M = 10, 30, 50, 100, 2000, 3000$ と変化させたときの再構成の結果を Fig. 7 に示す．M が小さいときは，D の殆どの位置で再構成された値は適当な範囲に含まれるものの，結果は大域的な構造のみ再現しており，局所的な構造が再現されているとはいえない．一方 M を大きくすると，細部の形状の情報を含む高周波成分が反映されて結果は鮮明になるが，特に ∂D の近傍では絶対値が極端に大きい値となり，図示した範囲の値が得られない．これは不安定性による計算誤差の増

大のためと考えられる．すなわち M は典型的な正則化パラメータと同様の役割を果たしており，適当に選択することによって Fig. 5, Fig. 6 に示す信頼性の高い再構成結果が得られる．



(a) $M = 10$　(b) $M = 30$

(c) $M = 50$　(d) $M = 100$

(e) $M = 2000$　(f) $M = 3000$

Fig. 7: Comparison of Reconstructions with Various Truncation Numbers M

5. 結言

本論文では Cauchy 型の境界積分公式にもとづく X 線 CT 手法に対して正則化を提案した．またこの手法を実測値に適用し，従来の FBP と同等の結果が得られることを示した．トモグラフィの実用化では，観測誤差や数値計算の誤差に起因する摂動が不可避であり，それらの影響に適切に設定する必要がある．本研究で用いた測定データ $\mathcal{D}$ に対応しては，観測点数に相当する数値積分の離散化による数値的不安定性の影響は認められず，人工的に導入される打ち切り項数が正則化パラメータの役割を果たしていることがわかった．安定性と精度を両立させるためにその適切な選択が重要であり，実用化においてはそのための指標の提案が望まれる．

謝辞　本研究の遂行にあたり，Alexandru Tamasan 教授 (University of Central Florida) に有益なご助言を頂きました．本研究は JSPS 科研費 JP16H02155, JP18K07712, JP20H01821 の助成を受けたものです．

参考文献

(1) A. L. Bukhgeim : *Inversion Formulas in Inverse Problems*, Linear Operators and Ill-Posed Problems by M. M. Lavrentiev and L. Ya. Savalev, (1995), Plenum, New York, pp. 323–378.

(2) D. V. Finch : *The Attenuated X-ray Transform: Recent Developments*, in Inside Out: Inverse Problems and Applications, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **47** (2003), Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 47–66.

(3) Finnish Inverse Problems Society : `https://zendo.org/record/1254206/files/FullSizeSinograms.mat` in *Open X-ray Tomographic Datasets*, `https://doi.org/10.5281/zendo.1254206` または `https://www.fips.fi/dataset.php`

(4) H. Fujiwara, K. Sadiq, and A. Tamasan : *A Fourier Approach to the Inverse Source Problem in an Absorbing and Non-weakly Scattering Medium*, Inverse Problems, **36** (2020), 015005 (33pages)

(5) H. Fujiwara, K. Sadiq, and A. Tamasan : *Numerical Reconstruction of Radiative Sources in an Absorbing and Non-diffusing Scattering Medium in Two Dimensions*, SIAM J. Imagin Sci., **13** (2020), pp.535–555.

(6) H. Fujiwara and A. Tamasan : *Numerical Realization of a New Generation Tomography Algorithm Based on Bukhgeim-Cauchy Integral Formula*, Adv. Math. Sci. Appl., **28** (2019), pp. 413–424.

(7) 藤原宏志，A. Tamasan : Cauchy 型積分によるメッシュレス X 線計算機断層撮影法, 計算数理工学論文集, **19**(2019) pp. 1–6.

(8) K. Hämäläinen, L. Harhanen, A. Kallonen, A. Kujanpää, E. Niemi, and S. Siltanen : *Tomographic X-ray data of a Walnut* arXiv:1502.04064v1 [physics.data-an] (2015)

(9) A. C. Kak and M. Slaney : *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, (1988), IEEE Press, New York.

(10) F. Natterer and F. Wübbeling : *Mathematical Methods in Image Reconstruction*, (2001), SIAM, Philadelphia.

(11) J. Radon : *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Kl., **69** (1917), pp. 262–277.

(English translation : *On the Determination of Functions from Their Integral Values Along Certain Manifolds*, in IEEE Trans. Med. Imaging, **MI-5**(1986), pp. 170–176.)