非定常一様粘性流中に置かれた孤立物体の揚力を制御する形状設計

SHAPE DESIGN TO CONTROL LIFT OF AN ISOLATED BODY LOCATED IN UNSTEADY UNIFORM VISCOUS FLOW FIELD

片峯 英次 [1)]，山口 智也 [2)]，村山 大騎 [3)]

Eiji KATAMINE, Tomoya YAMAGUCHI, and Daiki MURAYAMA

1) 岐阜工業高等専門学校 機械工学科 (〒 501-0495 岐阜県本巣市上真桑 2236-2, E-mail: katamine@gifu-nct.ac.jp)
2) 金沢大学 機械創造工学コース 学生 (〒 920-1192 金沢市角間町)
3) 名古屋工業大学 電気・機械工学科 学生 (〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

This paper presents numerical analysis method of shape design problems for controlling lift of an isolated body in unsteady uniform viscous flow fields. The shape design problems for maximizing the lift and controlling the lift for the isolated body are studied. Shape gradients of these shape design problems are derived theoretically using the Lagrange multiplier method, adjoint variable method, and the formulae of the material derivative. Reshaping is carried out by the traction method proposed as an approach to solving shape optimization problems. Numerical analysis programs for the shape design problems are developed by using FreeFEM, and the validity of proposed method is confirmed by results of 2D numerical analyses.

Key Words: Inverse Problem, Optimum Design, Computer Aided Design, Finite Element Method, Viscous Flow Field, Adjoint Method

1. はじめに

粘性流れ場問題における形状最適設計は，流体力学，自動車工学，海洋工学等の多くの工学分野における重要課題である．実際，粘性流体を輸送する内部流れ場問題では，エネルギーロスを最小化するための流路形状設計，また外部流れ場問題では，一様流中に置かれた孤立物体に生じる抗力最小化，あるいは揚力最大化を目的とした孤立物体の形状設計等が行われている．本研究では，非定常一様粘性流中に置かれた孤立物体の揚力に対して，その揚力の大きさを制御するための孤立物体の形状設計について検討する．

粘性流れ場の形状最適化に関する研究は，Pironneau[(1)(2)] によって始められ，多くの研究者が検討を行ってきた．その詳細は文献 [(3)-(6)] に譲る．非定常一様粘性流中に置かれた孤立物体に対する抗力規定問題では，松本 [(7)]，Yagi ら [(8)(9)] が解析をしている．また揚力規定問題では，Srinath ら [(10)(11)] が孤立物体表面の設計境界を B-spline 関数で表現して，設計変数を極力少なく制限したパラメトリックな解析を行っている．しかしながら，これらの研究において，孤立物体に生じる抗力あるいは揚力の計算法には，孤立物体表面で評価される応力の境界積分による解析法が用いられた．

これに対して，著者ら [(6)] は抗力の計算法において，物体表面で評価される応力の境界積分でなく，田端ら [(12)(13)] によって提案された流れ場全体の領域積分による解析方法を用いて，孤立物体の抗力を規定する形状設計問題を解析した．この領域積分による解析法は，境界積分に比較して，高精度な数値解析が実現できることが知られている．また，この抗力規定の形状最適化には，力法 [(14)]（あるいは H^1 勾配法 [(15)]）が用いられた．力法は，形状最適化のための一解法として提案され，理論的に導出された分布系の感度を直接利用した手法であり，設計境界を表すための設計変数を制限することなく，ノンパラメトリックな形状最適化手法により滑らかな形状設計が実現できる．

本論文では，前報 [(6)] の拡張として，孤立物体に生じる揚力の大きさを制御するための孤立物体の形状設計に着目し，揚力最大化を目指した形状設計問題，および揚力規定を目的とする一つの逆問題としての形状設計問題を取り上げる．この二つの形状設計問題の定式化を行い，随伴変数法を用いて形状修正の感度となる形状勾配密度関数を導出する．次に，導出した形状勾配密度関数に基づいて，力法を適用した数値解析例を示す．なお，本研究における数値解析では，FreeFEM[(16)] を利用してプログラム開発を行い，本論文では 2 次元問題の簡単な解析結果を紹介する．

2020 年 10 月 7 日受付，2020 年 11 月 15 日受理

2. 一様粘性流れ場の支配方程式と揚力の解析法

2.1. 非定常粘性流れ場の支配方程式

Fig.1 に示すように，$\mathbb{R}^d(d=2,3)$ の領域 Ω，時間 $[0,T]$ における非定常粘性一様流中に置かれた孤立物体について考える．領域 Ω の境界 $\mathit{\Gamma}$ は 全て Dirichlet 型境界であり，流速ゼロの孤立物体境界 $\mathit{\Gamma}_B$ と，一様流速 $u=\hat{u}(u_1=\hat{u},\ u_2=0,\ u_3=0)$ を有する孤立物体から十分に離れた境界 $\mathit{\Gamma}_U$ から構成されている．n は境界における単位法線ベクトルを表す．

流速 $u=\{u_i\}_{i=1}^d \in U$ は次の関数空間の要素であり，境界 $\mathit{\Gamma}$ において $\hat{u}\in H^{1/2}(\mathit{\Gamma}\times[0,T])$ が既知関数として与えられている．

$$
\begin{aligned}
U = \{u(\vec{x},t) \in H^1(\Omega\times[0,T]) \mid \\
u_i(\vec{x},t) = \hat{u}_i(\vec{x},t),\ t\in[0,T],\ \vec{x}\in\Gamma, \\
u_i(\vec{x},0) = u_{i_{ini}}(\vec{x}),\ \vec{x}\in\Omega\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

また圧力 $p(\vec{x},t)\in Q$ は次の関数空間の要素である．

$$
Q = \{q(\vec{x},t)\in L^2\ (\int_\Omega q\ dx = 0)\} \tag{2}
$$

ここで，$H^m(\Omega\times[0,T])$ は m 階の導関数まで領域 $\Omega\times[0,T]$ で 2 乗可積分な関数空間，$L^2(\Omega\times[0,T])$ は有界可積分なスカラー関数空間を表す．

無次元化された Navier-Stokes 方程式と連続の式の弱形式は，試験関数 $w=\{w_i\}_{i=1}^d\in W$:

$$
\begin{aligned}
W = \{w_i(\vec{x},t) \in H^1(\Omega\times[0,T]) \mid \\
w_i(\vec{x},t) = 0,\ t\in[0,T],\ \vec{x}\in\Gamma, \\
w_i(\vec{x},T) = 0,\ \vec{x}\in\Omega\}
\end{aligned} \tag{3}
$$

と試験関数 $q\in Q$ を用いて，次のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \Big\{ t^V(u_{,t},w) + a^V(u,w) + b^V(u,u,w) + c(w,p) \Big\}\, dt \\
= 0 \quad \forall w\in W
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\int_0^T \Big\{ c(u,q) \Big\}\, dt = 0 \quad \forall q\in Q \tag{5}
$$

ただし，$t^V(u_{,t},w)$, $a^V(u,w)$, $b^V(v,u,w)$, $c(w,p)$ は次のように定義されている．

$$
\begin{aligned}
&t^V(u_{,t},w) = \int_\Omega w_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\, dx, \quad a^V(u,w) = \int_\Omega \frac{1}{Re} w_{i,j}u_{i,j}dx, \\
&b^V(v,u,w) = \int_\Omega w_i v_j u_{i,j}dx, \quad c(w,p) = -\int_\Omega w_{i,i}p dx
\end{aligned} \tag{6}
$$

また，Re はレイノルズ数を表す．ここで，本論文のテンソル表示では Einstein の総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用し，$(\cdot)_{,t}$ は時間の導関数を表している．また初期条件は，次のように定義されている．

$$
u_i(\vec{x},0) = u_{i_{ini}}(\vec{x}), \quad \vec{x}\in\Omega \tag{7}
$$

$$
p(\vec{x},0) = p_{ini}(\vec{x}), \quad \vec{x}\in\Omega \tag{8}
$$

ただし，$u_{i_{ini}}$ は初期流速，p_{ini} は初期圧力を表し，また $(\hat{\cdot})$ は境界における既知関数を表している．

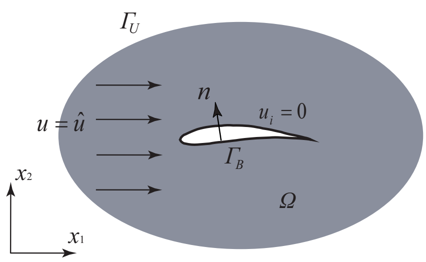


Fig. 1　Isolated body in uniform flow

2.2. 領域積分による抗力および揚力の解析法

田端ら [12][13] は，物体に作用する抗力 F_D あるいは揚力 F_L を物体表面で評価される応力の境界積分によって解析するのではなく，流れ場領域全体の領域積分による解析法を提案している．この領域積分による解析法に従うと，抗力 F_D は前述の弱形式の領域積分を用いることによって，次のように表すことができる．

$$
F_D = t^V(u_{,t},v^D) + a^V(u,v^D) + b^V(u,u,v^D) + c(v^D,p) \tag{9}
$$

ただし，v^D は次のように定義されている．

$$
v^D = (e,0,0), \qquad e = \begin{cases} 1 \text{ on } \Gamma_B \\ 0 \text{ on } \Gamma_U \end{cases} \tag{10}
$$

この方法では，有限要素解析のために既に構築されている $a^V(u,v^D)$ などの弱形式の各項に，数値解析された解 u,p を代入する演算によって抗力が解析できる．また境界積分による解析法に比較して，高精度な数値解析が実現できることが知られている． 同様にして，揚力 F_L は $v^L=(0,e,0)$ とおいて，

$$
F_L = t^V(u_{,t},v^L) + a^V(u,v^L) + b^V(u,u,v^L) + c(v^L,p) \tag{11}
$$

として表すことができる．

3. 揚力最大化問題

3.1. 問題の定式化

孤立物体に対して，時間 $t=t_1\in[0,T]$ から $t=t_2\in[0,T]$ における揚力 F_L の時間積分を最大化する問題を定式化する．この粘性流れ場領域 $\mathit{\Omega}$ の領域変動を $\vec{T}_s$ (s は領域変動の履歴) で定義し，領域 $\mathit{\Omega}$ は変動して $\mathit{\Omega}_s = \vec{T}_s(\mathit{\Omega})$ になると仮定する．$\vec{T}_s(\mathit{\Omega})$ は，領域変動の制約を満たす適当に導関数が連続な許容関数空間 D の要素とする．このとき，時間 $t=t_1$ から $t=t_2$ におけるこの問題は次のように定式化される．

$$
\begin{aligned}
&\text{Given} && \mathit{\Omega} \\
&\text{find} && \mathit{\Omega}_s \text{ or } \vec{T}_s(\mathit{\Omega})\in D && (12)\\
&\text{that maximizes} && \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ t^V(u_{,t},v^L) + a^V(u,v^L) + b^V(u,u,v^L) \\
& && \quad + c(v^L,p) \Big\}\, dt && (13)
\end{aligned}
$$

$$\text{subject to} \quad \int_0^T \Big\{ t^V(u_{,t}, w) + a^V(u, w) + b^V(u, u, w) + c(w, p) \Big\} dt = 0 \quad \forall w \in W \tag{14}$$

$$\int_0^T \Big\{ c(u, q) \Big\} dt = 0 \quad \forall q \in Q \tag{15}$$

$$\int_\Omega dx \leq M \tag{16}$$

ここで，式 (14)，式 (15) は状態方程式における Navier-Stokes 方程式，連続の式の弱形式を表し，M は領域の大きさの制限値の上限を表す．なお，時間区間 $[t_1, t_2]$ については，揚力最大化を試みる区間に応じて，全時間区間 $[0, T]$ の中で任意に選定できると仮定している．

3.2. 随伴方程式と形状勾配密度関数

この問題は Lagrange 乗数法によって，Lagrange 関数の停留化問題に書き換えることができる．この場合の Lagrange 汎関数 $L(u, p, w, q, \Lambda)$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} L = &-\Big[\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ t^V(u_{,t}, v^L) + a^V(u, v^L) + b^V(u, u, v^L) + c(v^L, p) \Big\} dt \Big] \\ &- \int_0^T \Big\{ t^V(u_{,t}, w) + a^V(u, w) + b^V(u, u, w) + c(w, p) \Big\} dt \\ &- \int_0^T \Big\{ c(u, q) \Big\} dt + \Lambda\Big(\int_\Omega dx - M\Big) \end{aligned} \tag{17}$$

ここで，$w \in W$, $q \in Q$ は非定常粘性流れ場の支配方程式に関する Lagrange 乗関数（または随伴変数）になっている．また，Λ は領域の大きさの制約条件式に対する Lagrange 乗数である．

領域変動に対する L の導関数 $\dot{L}$ を速度場 $\vec{V}(\Omega_s) = \partial \vec{T}_s / \partial s(\Omega) = \partial \vec{T}_s / \partial s(\vec{T}_s^{-1}(\Omega_s))$ を用いて計算 (14) して，Lagrange 関数 L の停留条件を考慮すると，この揚力最大化問題に対する随伴方程式は次のように導出できる．

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big\{ t^V(u'_{,t}, w) + a^V(u', w) + b^V(u', u, w) + b^V(u, u', w) + c(u', q) + c(w, p') \Big\} dt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ t^V(u'_{,t}, v^L) + a^V(u', v^L) + b^V(u', u, v^L) + b^V(u, u', v^L) + c(v^L, p') \Big\} \; dt \end{aligned} \tag{18}$$

また，設計境界での条件 $(w_i = 0)$，支配方程式および随伴方程式における連続の式などを考慮すると，形状更新の感度を表す形状勾配密度関数 G は，次のように導出できる．

$$G = \int_0^T \{ -\frac{1}{Re} w_{i,j} u_{i,j} \} dt + \Lambda \tag{19}$$

このようにして形状勾配密度関数を導出できれば，力法を適用することが可能になる．

4. 揚力規定問題

孤立物体に対して，時間 $t_1 \in [0, T]$ から $t_2 \in [0, T]$ における揚力 F_L を目標値 $F_{Ltarget}$ に規定する形状設計問題を定式化する．この問題は，実際の揚力 F_L の時間履歴と目標値 $F_{Ltarget}$ との二乗誤差積分を最小化させる形状設計問題として捉えれば，一つの形状最適化問題として取り扱うことができる．

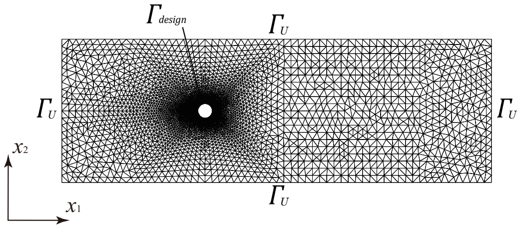


Fig. 2 Numerical model for 2D isolated body

揚力規定問題は次のように定式化できる．

$$\begin{aligned} &\text{Given} \quad \Omega \\ &\text{find} \quad \Omega_s \text{ or } \vec{T}_s(\Omega) \in D \\ &\text{that minimizes} \quad \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ F_L - F_{Ltarget} \Big\}^2 dt \end{aligned} \tag{20}$$

$$\text{subject to} \quad \int_0^T \Big\{ t^V(u_{,t}, w) + a^V(u, w) + b^V(u, u, w) + c(w, p) \Big\} dt = 0 \quad \forall w \in W \tag{21}$$

$$\int_0^T \Big\{ c(u, q) \Big\} dt = 0 \quad \forall q \in Q \tag{22}$$

$$\int_\Omega dx \leq M \tag{23}$$

前述と同様の手順によって，この問題に対する随伴方程式は次のように導出できて，

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big\{ t^V(u'_{,t}, w) + a^V(u', w) + b^V(u', u, w) + b^V(u, u', w) + c(u', q) + c(w, p') \Big\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} 2\Big\{ F_L - F_{Ltarget} \Big\} \Big\{ t^V(u'_{,t}, v^L) + a^V(u', v^L) + b^V(u', u, v^L) + b^V(u, u', v^L) + c(v^L, p') \Big\} \; dt \end{aligned} \tag{24}$$

また，この問題の形状勾配密度関数は，前述の揚力最大化問題における式 (19) と同様になる．

5. 解析手順

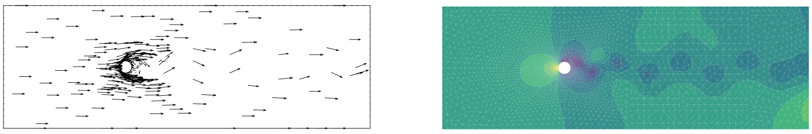
提案した形状決定解析は，次のステップを繰り返すことによって解析できる．

Step 1. 初期形状を与える．

Step 2. 状態方程式 (14), (15) に基づいて，時間 $t = 0$ から $t = T$ の方向へ，流速分布 $u_i(\vec{x}, t)$，圧力分布 $p(\vec{x}, t)$ を解析する．

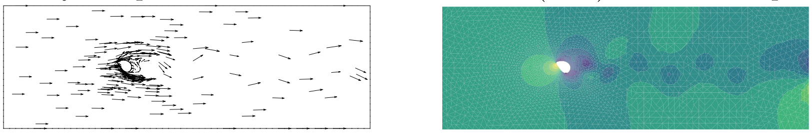
Step 3. 目的汎関数が停留したと判断されれば解析を終了する．

Step 4. 得られた流速分布 $u_i(\vec{x}, t)$ を用いて，随伴方程式 (18)，あるいは (24) に基づいて，時間 $t = T$ から $t = 0$ の方向へ，随伴流速分布 $w_i(\vec{x}, t)$, 随伴圧力分布 $q(\vec{x}, t)$ を解析する．



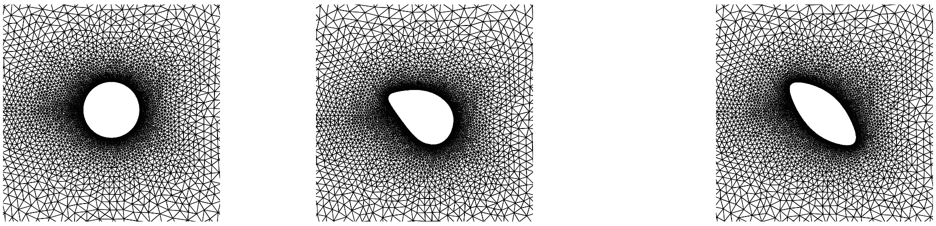
Flow velocity　　　　Pressure

(a) Flow velocity and pressure distribution at final time (t=T) for initial shape (Re=100)

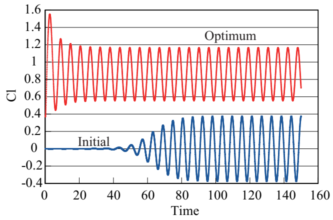


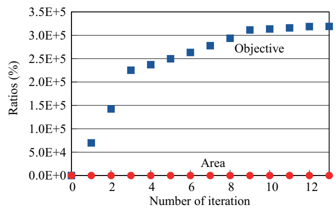
Flow velocity　　　　Pressure

(b) Flow velocity and pressure distribution at final time (t=T) for optimum shape (Re=100)



(c)Initial shape　(d)Optimum shape (Re=100)　(g)Optimum shape (Re=0.1)





(e)Time history of lift coefficient (Re=100)　(f)Iterative history of objective functional (Re=100)

Fig. 3　Numerical results for lift maximization (Re=100 and 0.1)

Step 5. これらの結果を用いて，式 (19) から形状勾配密度関数 G を計算する．

Step 6. 力法に基づいて，形状更新量の速度場 $\vec{V}$ を計算して，形状を更新し，**Step.2** に戻る．

6. 解析例

導出した形状勾配密度関数を用いて，力法を適用した簡単な解析例を紹介する．FreeFEM[16] を用いて 2 次元問題のプログラム開発を行い，そのプログラムを用いて数値解析した．

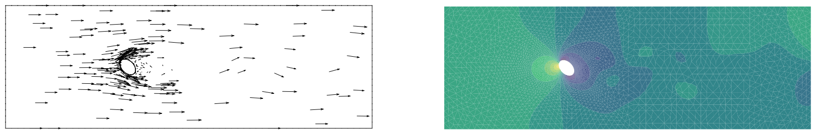
Fig.2 を解析モデルとした一様流中に置かれた円形孤立物体について解析を行った．孤立物体まわりの境界を 200 分割，左右境界および上下境界をそれぞれ 20 分割および 60 分割して FreeFEM を用いてメッシュ生成した．流速に対して 2 次，圧力に対して 1 次，形状更新の際に用いる速度場の計算に対しては 2 次の三角形要素を用いた．流れ場解析における境界条件を次のように与えた．外部境界 Γ_U 全てに流速 $u_1 = 1.0$ および $u_2 = 0$，それ以外の境界は壁面を想定し $u_i = 0$ とした．初期条件は, 領域全体において $u_{ini} = 0$ とした．孤立物体境界を設計境界 Γ_{design} とした．

本研究における支配方程式は，レイノルズ数を考慮した無次元化方程式として支配方程式 (14), (15) によって定式化されている．全ての数値解析例では，代表長さは初期形状における流れに対する投影長さを 1 と設定して，支配方程式におけるレイノルズ数に基づいて解析を行った．したがって，実際にはわずかではあるが，形状最適化後における投影長さが変化した場合には，その投影長さの変化に対応したレイノルズ数の変化が生じることになる．

6.1. 揚力最大化の形状決定 (Re=100)

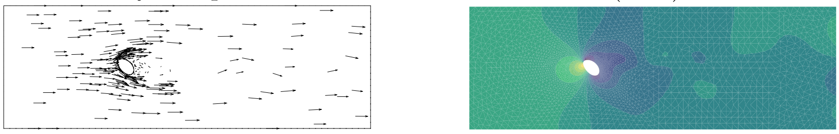
Re=100 の場合に対して，揚力最大化の解析を行った．時間積分では，$t = 0$ から $t = T = 150$ まで，時間刻み $\delta t = 0.03$ で分割した．初期時刻 $t = 0$ 近傍の時間域では，状態変数（流速，圧力など）の時間的変化が著しく，その状態変数の関数として計算される揚力の精度もやや低下する可能性があるために，Srinath ら [10][11] の解析同様に初期状態近傍の時間域を除去し，目的汎関数の時間域を t_1=15 から t_2=150 に設定した．本解析では形状更新において面積一定とした．

解析結果を Fig.3 (a)〜(f) に示す．(a) および (b) に円形の初期形状および最適形状における終端時刻 (t=T) での流速分布および圧力分布を示す．初期形状における流速および圧力分布の様子から，孤立物体の後流部にカルマン渦が発生し



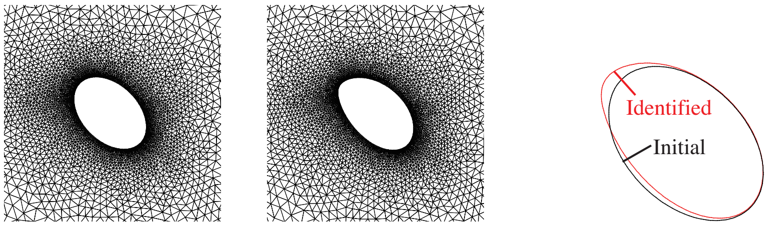
Flow velocity　　　　　　　　Pressure

(a) Flow velocity and pressure distribution at final time (t=T) for initial shape

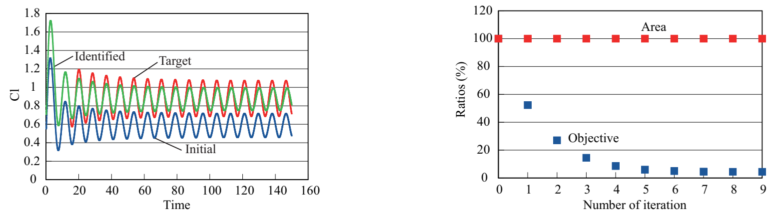


Flow velocity　　　　　　　　Pressure

(b) Flow velocity and pressure distribution at final time (t=T) for identified shape



(c)Initial shape　　(d)Identified shape　　(e)Shape comparison



(f)Time history of lift coefficient　　(g)Iterative history of objective functional

Fig. 4　Numerical results for lift control (Re=40)

ていることが確認できる．(c) および (d) に初期形状および最適形状での孤立物体近傍の有限要素分割を示す．滑らかな最適形状が得られていることが確認できる．

式 (11) の揚力 F_L，孤立物体直径 $d=1$，一様流速 $\hat{u}_1=1.0$ に基づいて，次式を用いて揚力係数 C_l を計算し，

$$C_l = \frac{2F_L}{\hat{u}_1^2 d} \tag{25}$$

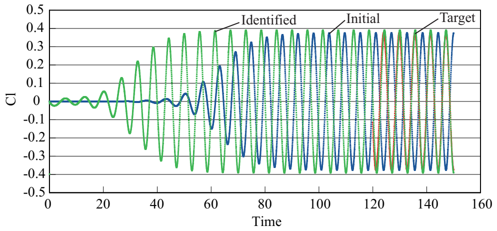
(e) に初期形状と最適形状に対するその揚力係数 C_l の時間履歴を示す．この初期形状における揚力係数 C_l の結果は，孤立物体表面における応力の境界積分による解析結果 [17] と同様な結果となっており，開発したプログラムによる揚力の計算結果が妥当であることが確認できる．また式 (25) の関係から，孤立物体直径 d および一様流速 $\hat{u}_1$ の値を定数とすれば，上記の揚力最大化問題は揚力係数最大化問題としても捉えることができる．そのため，本解析結果では，揚力係数 C_l の時間履歴で示している．

Fig.3 (f) は初期値を 100%とした形状更新の繰り返しに対する目的汎関数の推移を示す．(e),(f) の結果から，最適形状における揚力係数 C_l が上昇して，目的汎関数は最大化している．また参考までに，(g) に Re=0.1 の場合の最適形状を示しており，Re 数に応じて最適形状が異なることが確認できる．以上により，提案した形状決定問題の解法の妥当性が確認できた．

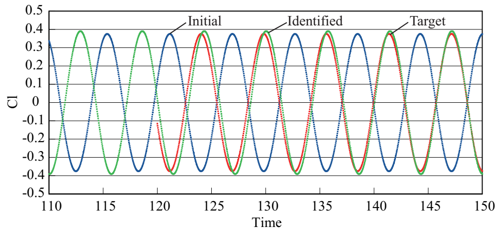
6.2. 揚力規定の形状同定 (Re=40, 揚力 1.5 倍設定)

流れに対して 45° 傾いた長短軸比 1.5 の楕円形状を初期形状に設定し，Re=40 においてその初期形状における揚力の 1.5 倍を目標の揚力 $F_{Ltarget}$ に設定した揚力規定の形状同定問題の解析を行った．時間域の設定については，前述の揚力最大化と同様であり，また今回の解析では，形状更新において面積制約を設定しなかった．

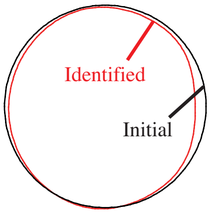
解析結果を Fig.4 (a)〜(g) に示す．前述の揚力最大化問題と同様に，(a),(b) に初期形状，最適形状における終端時刻 (t=T) での流速分布および圧力分布，(c),(d) に孤立物体近傍の有限要素分割，(e) に形状比較を示す．(f) は揚力係数 C_l の時間履歴，(g) は目的汎関数の変化を示している．(f) の結果から，得られた同定形状における揚力係数 C_l の時間履歴は，目標値にほぼ一致していることが確認でき，その結果として，(g) の形状更新に対する目的汎関数の値は減少してほぼゼロ近くに収束していることが確認できる．



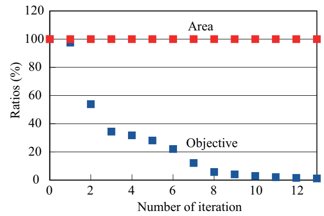
(a)Time history of lift coefficient



(b)Time history of lift coefficient in zoomed view



(c)Shape comparison



(d)Iterative history for objective functional

Fig. 5　Numerical results for lift inverse phase (Re=100)

6.3. 揚力規定の形状同定 (Re=100, 逆位相設定)

Fig.3 (a) の初期形状より計算された揚力の時間履歴に対して，t_1=120.0 から t_2=150.0 の時間域において，逆位相となる揚力値を目標の揚力 $F_{Ltarget}$ に設定した形状同定問題を解析した．本解析では形状更新において面積制約は設けなかった．

解析結果を Fig.5 (a)〜(d) に示す．Fig.5 (a) では，目標とする C_l 値の時間履歴に対して，初期形状，得られた同定形状の C_l 値を比較して示し，(b) はその拡大図を示している．また (c) は初期形状と同定形状の形状比較，(d) は形状更新に対する目的汎関数の変化を表している．Fig.5 (a),(b) より，時間 t_1=120.0 から t_2=150.0 の時間域において，その同定形状の揚力係数 C_l 値は，初期形状と逆位相の値になっていることが確認できる．また (d) において形状更新に対する目的汎関数の値は減少し，ほぼゼロの値に収束している．

以上の解析結果から提示した手法の妥当性が確認できた．

7. まとめ

本論文では，非定常粘性流れ場に置かれた孤立物体に生じる揚力を最大化，また揚力の時間履歴が目標値となるように孤立物体形状を設計する問題を取り上げて，その数値解析法を提案した．これらの形状設計問題の定式化を行い，随伴変数法を利用してその問題に対する形状勾配密度関数を導出し，それらの形状勾配関数に基づいて力法を適用した簡単な二次元問題の解析例から，提案した手法の妥当性を示した．なお，本研究における形状設計では，制約条件として孤立物体の領域の大きさ制約を設定して，定式化および数値解析を行った．今後の課題として，流れにおける孤立物体の投影面制約を用いた定式化および数値解析について検討する必要がある．

本研究の一部は JSPS 科研費 JP18K03996 の助成を受けて行われた．記して深く謝意を表する．

参考文献

(1) Pironneau, O.: On optimum profiles in Stokes flow, Journal of Fluid Mechanics, **59**(1973), Part 1, pp. 117-128.

(2) Pironneau, O.: On optimum design in fluid mechanics, Journal of Fluid Mechanics, **64**(1974), Part 1, pp. 97-110.

(3) Jameson, A.: Optimum aerodynamic design using control theory, Computational Fluid Dynamics Review 1995, edited by M. Hafez and K. Oshima (1995), John Wiley & Sons, pp.495-528.

(4) Gunzburger, M. D.: Perspective in flow control and optimization (2003), SIAM.

(5) Mohammadi, B. and Pironneau, O.: Applied Shape Optimization for Fluids (2001), Oxford University Press.

(6) 片峯英次，尾関優汰: 非定常粘性流れ場における形状同定問題の解法, 日本機械学会論文集, **84**(2018), No. 868, DOI:10.1299/transjsme.18-00323, 17pages.

(7) 松本純一: 安定化気泡有限要素法を用いた非圧縮粘性流れにおける形状同定解析，応用力学論文集, **6** (2003), pp.267-274.

(8) Yagi, H. and Kawahara, M.: Shape optimization of a body located in low Reynolds number flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **48** (2005), pp.819-833.

(9) Yagi, H. and Kawahara, M.: Optimal shape determination of a body located in incompressible viscous fluid flow, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **196** (2007), pp.5084-5091.

(10) Srinath, D.N. and Mittal, S.: An adjoint method for shape optimization in unsteady viscous flows, Journal of Computational Physics, **229** (2010a), pp.1994-2008.

(11) Srinath, D.N. and Mittal, S.: Optimal aerodynamic design of airfoils in unsteady viscous flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **199** (2010b), pp.1976-1991.

(12) 田端正久: 流体問題の有限要素解析，数理科学, No. 417 (1998), pp.13-19.

(13) Tabata, M. and Itakura, K.: A precise computation of drag coefficients of a sphere, International Journal of Computational Fluid Dynamics, **9** (1998), pp. 303-311.

(14) 畔上秀幸: 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A 編, **60**(1994), No. 574, pp. 1479-1486.

(15) 畔上秀幸: 形状最適化問題の正則化解法, 日本応用数理学会論文誌, **24** (2014), No. 2, pp. 83-138.

(16) Hecht, F.: New development in FreeFem++, Journal of Numerical Mathematics, **20**(2012), , No. 3-4, pp.251-265.

(17) Tabata, M. and Fujima, S.: An upwind finite element scheme for high-Reynolds-number flows, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **12**(1991), pp. 305-322.