

# 演算子積分時間領域境界要素法を用いた 粘弾性体中の空洞に対する 3次元順解析および逆散乱解析

## FORWARD AND INVERSE SCATTERING ANALYSES FOR CAVITY IN VISCOELASTIC MEDIA USING CONVOLUTION QUADRATURE TIME-DOMAIN BOUNDARY ELEMENT METHOD

竹田 晴彦<sup>1)</sup>, 斎藤 隆泰<sup>2)</sup>

Haruhiko TAKEDA and Takahiro SAITOH

- 1) 群馬大学大学院理工学府 修士課程 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail:t160c056@gunma-u.ac.jp)  
2) 群馬大学大学院理工学府 准教授 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail:t-saitoh@gunma-u.ac.jp)

In this research, forward and inverse scattering analyses for a cavity in 3-D viscoelastic media are presented. After the formulation for a forward analysis using the convolution quadrature time-domain boundary element method (CQBEM) for 3-D viscoelastodynamics is discussed, a linearized inverse scattering analysis based on the Born approximation for a cavity in 3-D viscoelastic media is introduced. The scattered wave forms in time-domain obtained by the CQBEM with an OpenMP parallelization technique are transformed into those in frequency-domain, and their transformed data are utilized to reconstruct a cavity in 3-D viscoelastic media. Some numerical results for a cavity obtained by these forward and inverse scattering analyses are shown to validate the proposed methods.

**Key Words:** CQBEM, Viscoelastodynamics, Inverse scattering analysis, Born approximation.

### 1. はじめに

本論文では、粘弾性体中の空洞に対する 3次元順解析および逆散乱解析手法の開発について検討する。時間領域境界要素法は、波動解析に有効な数値解析手法として発展してきた。時間方向の離散化に、差分近似を適用する従来の時間領域境界要素法は、数値解の安定性に問題があるとされてきた<sup>(1)</sup>。この点を改善するために、演算子積分法(CQM: Convolution Quadrature Method)<sup>(2)</sup>を用いた新しい時間領域境界要素法である演算子積分時間領域境界要素法(CQBEM: Convolution Quadrature BEM)が提案され<sup>(3)</sup>、様々な波動問題に適用されてきた<sup>(4)</sup>。また、従来の時間領域境界要素法を用いては、安定性の問題で解析が難しい、境界非線形問題<sup>(5)</sup>へも応用されている。一方で、演算子積分時間領域境界要素法の利点は、解の安定性の改善のみならず、基本解が時間領域で陽な形で求まらない問題への適用にある。時間領域基本解を直接必要とせず、ラプラス変換領域の基本解を用いるため、時間領域境界要素法の適用範囲が拡大し、従来の時間領域境界要素法では解法が難しい、粘弾性波動問題<sup>(6)</sup>や飽和多孔質弾性波動問題<sup>(7)</sup>等の様々な問題を解くことが出来るようになってきた。

一方で、境界要素法は、積分方程式と親和性が高い波動の逆問題の分野でも利用されてきた。例えば、Kitahara らにより提案された固体中の欠陥に対する逆散乱解析法は、3次元等方弾性体中の欠陥形状再構成問題へ適用<sup>(8)</sup>されている。近年では、より実用的な問題への応用<sup>(9)</sup>であったり、異方性弾性波動問題への拡張<sup>(10)</sup>も行われている。しかしながら、Kitahara らによる逆散乱解析法を粘弾性体中の欠陥に適用した例は、著者らの知る限り例はない。近年では、炭素繊維強化プラスチック(CFRP: Carbon Fiber Reinforced Plastic)等、粘弾性体の性質を考慮すべき材料も多く使われるようになっており、逆散乱解析の適用範囲を粘弾性体中の欠陥へと拡張することは、意義があると考えられる。

そこで、本研究では、まず、2次元粘弾性波動問題に対する順解析について述べた前論文<sup>(6)</sup>を3次元問題へと拡張し、3次元無限粘弾性体中の空洞に対する粘弾性波動の散乱解析を実施する。次に、粘弾性体中の空洞に対する3次元逆散乱解析法について検討する。その際、空洞からの散乱波形は、ここで実施する順解析の波形を用いることとする。数値解析例として、3次元無限粘弾性体中の空洞に対する逆散乱解析結果を示すことで、提案手法の妥当性や有効性等について検討する。最後に、今後の展望について示すこととする。

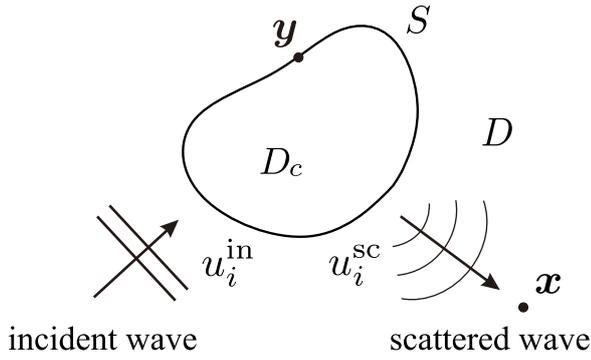


Fig.1 Elastic wave scattering in viscoelastic media.

## 2. 演算子積分時間領域境界要素法を用いた3次元粘弾性体中の空洞に対する順解析の定式化

### 2.1. 解くべき問題

今, Fig.1 で表されるような3次元無限粘弾性体  $D$  内に存在する空洞  $D_c$  による粘弾性波動の散乱問題を考える. 入射波  $u_i^{\text{in}}$  は, 空洞  $D_c$  の境界表面  $S$  により散乱されるとする. このとき入射波が空洞  $D_c$  に到達するまで静かな過去を持つとする. すなわち, 観測点  $\mathbf{x}$ , 時刻  $t$  における変位  $u_i(\mathbf{x}, t)$  に対して, 初期条件  $u_i(\mathbf{x}, t=0) = 0$  および  $\partial u_i(\mathbf{x}, t=0)/\partial t = 0$  を考慮すれば, 支配方程式は次のように表される.

$$\begin{aligned} & \mu(t) * \dot{u}_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + \left( K(t) + \frac{1}{3}\mu(t) \right) * \dot{u}_{i,j}(\mathbf{x}, t) \\ & = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{in } D \end{aligned} \quad (1)$$

ただし,  $\rho$  は密度,  $\mu(t)$ ,  $K(t)$  はそれぞれ, せん断弾性係数, 体積弾性係数に対する緩和関数を表し, 不遡及の公理  $\mu(t) = 0$ ,  $K(t) = 0$ ,  $-\infty < t < 0$  を満足するものとする. また  $*$  は畳込み積分,  $(\cdot)$  および  $(\cdot)_{,i}$  はそれぞれ, 時間および空間に関する微分  $\partial/\partial t$ ,  $\partial/\partial x_i$  を表す.

### 2.2. 演算子積分時間領域境界要素法の定式化

さて, 一般に線形粘弾性波動問題では解析的に閉じた基本解を得ることが出来ない. しかしながら, 仮に基本解が与えられたとし, 空洞表面  $S$  で表面力フリーの境界条件を考えれば, 散乱問題の解は, 次の積分方程式を解くことで求まる.

$$C_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}, t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} \quad (2)$$

ただし, 式(2)において,  $C_{ij}$  は自由項であり,  $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  は3次元粘弾性波動問題における時間領域の二重層核である. 次に, 式(2)の時間領域境界積分方程式に対し, 演算子積分法<sup>(2)</sup>を適用する. 式(2)を  $M$  個の区分一定要素で離散化し, 滑らかな境界  $S$  に対して  $\mathbf{x} \in D \rightarrow \mathbf{x} \in S$  なる極限移行を考慮すれば, 時間増分  $\Delta t$  に対して, 次の第  $n$  ステップにおいて離散化された時間領域境界積分方程式を得ることが出来る.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_{\alpha=1}^M B_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha)u_j(\mathbf{y}^\alpha, n\Delta t) \\ & = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) - \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha)u_j^\alpha(k\Delta t) \end{aligned} \quad (3)$$

ただし, 式(3)において,  $\mathbf{y}^\alpha$  は  $\alpha$  番目の境界要素代表点を表し,  $u_j^\alpha(k\Delta t)$  は第  $k$  ステップにおける  $\mathbf{y}^\alpha$  での変位成分を表す. また,  $B_{ij}^m$  は影響関数であり, 次式で表すことが出来る.

$$B_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_{\mathbf{y}} \quad (4)$$

ただし,  $i$  は虚数単位,  $s_l$  は  $s_l = \delta(z_l)/\Delta t$  で定義され,  $\mathcal{R}$ ,  $L$ ,  $\delta(z_l)$  は演算子積分法のパラメータである<sup>(2)(3)</sup>. ここで, 式(4)はフーリエ変換の形式で表現されているため, 高速フーリエ変換の実行により計算を高速化出来る. また,  $\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  は3次元粘弾性波動問題に対するラプラス変換領域の二重層核であり,

$$\begin{aligned} & \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = n_j(\mathbf{y})\rho(c_L^{*2} - 2c_T^{*2})\hat{U}_{ik,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \\ & + \rho c_T^{*2} \left( \hat{U}_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + \hat{U}_{ik,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \right) n_k(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (5)$$

と表される. ここで,  $n_j(\mathbf{y})$  は境界  $S$  上の点  $\mathbf{y}$  における外向き単位法線ベクトル成分である.  $c_L^*$ ,  $c_T^*$  は複素せん断弾性係数  $\mu^*(s)$ , 複素体積弾性係数  $K^*(s)$  に対応した複素位相速度であり, それぞれ,  $c_L^* = \sqrt{(K^*(s) + (4/3)\mu^*(s))/\rho}$ ,  $c_T^* = \sqrt{\mu^*(s)/\rho}$  で与えられる. また,  $\mu^*(s)$ ,  $K^*(s)$  は, 緩和関数  $\mu(t)$ ,  $K(t)$  のラプラス変換  $\hat{\mu}(s)$ ,  $\hat{K}(s)$  により, それぞれ,  $\mu^*(s) = s\hat{\mu}(s)$ ,  $K^*(s) = s\hat{K}(s)$  で与えられる. 一方,  $\hat{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  は3次元粘弾性波動問題に対するラプラス変換領域の基本解であり,

$$\begin{aligned} & \hat{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \\ & = \frac{1}{4\pi\mu^*(s)} \left\{ \frac{e^{-\frac{s}{c_T^*}r}}{r} \delta_{ik} - \frac{c_T^{*2}}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} \left( \frac{e^{-\frac{s}{c_T^*}r}}{r} - \frac{e^{-\frac{s}{c_L^*}r}}{r} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

と表される. ここで,  $\delta_{ik}$  はクロネッカーのデルタであり,  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  である. 上述の通り, ラプラス変換領域においては, 3次元粘弾性波動問題における基本解は解析的に閉じた形で求めることが出来るため, 式(3)において,  $n=1$  ステップから初期条件および境界条件を与えて逐次的に解き, 全時間ステップにおける境界未知量を求めることで, 3次元粘弾性波動場  $u_i(\mathbf{x}, t)$  を求めることが出来る.

### 3. 粘弾性体中の空洞に対する3次元逆散乱解析の定式化

本節では, 3次元無限粘弾性体  $D$  中の空洞  $D_c$  の位置や形状を推定する Born 近似<sup>(11)</sup> に基づいた逆散乱解析 (Born 逆解析) の定式化を示す. Fig.2 のように, 原点  $O$  から十分に離れた観測点  $\mathbf{x}$  から入射波  $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$  を送信し, 空洞  $D_c$  による散乱波を同一の観測点  $\mathbf{x}$  で取得する. この問題設定は, 超音波非破壊評価法におけるパルスエコー法を想定したものである. なお, 本論文における逆散乱解析では, 中畑ら<sup>(12)</sup> に倣い, 縦波散乱波成分のみを考慮し, 欠陥形状再構成を実施する. なお, 本節では周波数領域の積分方程式を起点とし, 粘弾性体中の空洞に対する Born 逆解析の定式化を行う. その場合, 通常の等方弾性体に対する Born 逆解析との相違点は, 弾性波動問題における弾性定数や基本解の計算を, 粘弾性波動問題で扱

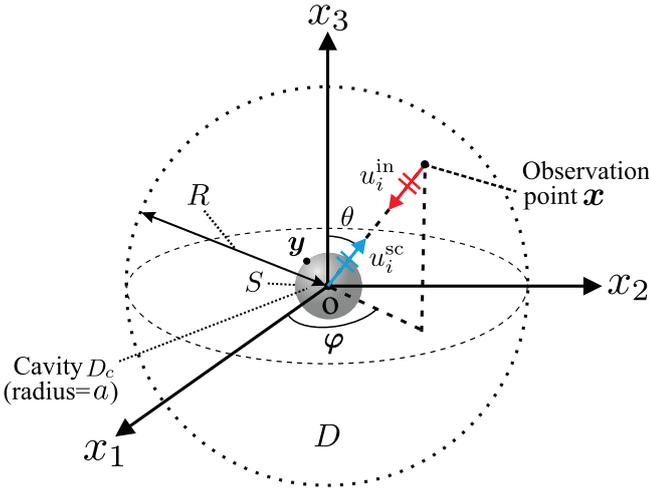


Fig. 2 Inverse scattering analysis model.

う複素緩和関数や基本解を用いて計算することが必要となる点に注意する。

### 3.1. 逆散乱解析の定式化

式 (1) のフーリエ変換を取れば、粘弾性波動問題に対する周波数領域での支配方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^*(\omega)\tilde{u}_{i,jj}(\mathbf{x},\omega) + \left(\tilde{K}^*(\omega) + \frac{1}{3}\tilde{\mu}^*(\omega)\right)\tilde{u}_{j,ij}(\mathbf{x},\omega) \\ = -\rho\omega^2\tilde{u}_i(\mathbf{x},\omega) \quad \text{in } D \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $\omega$  は角周波数、 $\tilde{\mu}^*(\omega)$ 、 $\tilde{K}^*(\omega)$  は周波数領域におけるせん断弾性係数および体積弾性係数に対する複素緩和関数である。ここで、空洞表面  $S$  において表面力フリーを仮定し、さらに、全変位  $\tilde{u}_i(\mathbf{x},\omega)$  を入射波  $\tilde{u}_i^{\text{in}}(\mathbf{x},\omega)$  と散乱波  $\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x},\omega)$  の重ね合わせ ( $\tilde{u}_i(\mathbf{x},\omega) = \tilde{u}_i^{\text{in}}(\mathbf{x},\omega) + \tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x},\omega)$ ) で表現すると、3次元粘弾性波動問題における散乱波  $\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x},\omega)$  に関する積分方程式は、周波数領域において次式で表される。

$$\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x},\omega) = -\int_S \tilde{T}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\tilde{u}_j(\mathbf{y},\omega)dS_{\mathbf{y}} \quad (8)$$

ここで、 $\tilde{T}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)$  は3次元粘弾性波動問題における周波数領域の二重層核であり、複素緩和関数  $\tilde{G}_{j k p q}^*(\omega)$  を用いると、

$$\tilde{T}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = n_k(\mathbf{y})\tilde{G}_{j k p q}^*(\omega)\frac{\partial}{\partial y_q}\tilde{U}_{ip}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) \quad (9)$$

と表される。ここで、等方・均質な粘弾性体の場合、複素緩和関数  $\tilde{G}_{j k p q}^*(\omega)$  は周波数領域において

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{j k p q}^*(\omega) \\ = \left(\tilde{K}^*(\omega) - \frac{2}{3}\tilde{\mu}^*(\omega)\right)\delta_{jk}\delta_{pq} + \tilde{\mu}^*(\omega)(\delta_{jp}\delta_{kq} + \delta_{jq}\delta_{kp}) \end{aligned} \quad (10)$$

と表される。また、 $\tilde{U}_{ip}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)$  は3次元粘弾性波動問題に対する周波数領域の基本解であり、次式で表される。

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{ip}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) \\ = \frac{1}{4\pi\tilde{\mu}^*(\omega)} \left\{ \frac{e^{i\tilde{k}_T r}}{r}\delta_{ip} + \frac{1}{\tilde{k}_T^2}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_p} \left( \frac{e^{i\tilde{k}_T r}}{r} - \frac{e^{i\tilde{k}_L r}}{r} \right) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\tilde{k}_L$ 、 $\tilde{k}_T$  は粘弾性波動問題における縦波および横波の複素波数である。さて、通常、波動の計測において散乱波は欠陥の寸法に比べて十分遠方で計測されることが多い。そのため、本研究では、空洞  $D_c$  より発生する散乱波の縦波成分と横波成分は分離可能であり、さらに、遠方場近似が適用できると仮定する。式 (11) に対し、縦波成分のみを考慮し、さらに  $r \approx |\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}$  なる遠方場近似を導入し整理すると、式 (8) の散乱波に対する積分方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x},\omega) = -\frac{i\tilde{k}_L\hat{x}_i\hat{x}_j\hat{x}_k}{4\pi|\mathbf{x}|}e^{i\tilde{k}_L|\mathbf{x}|} \\ \times \int_S n_k(\mathbf{y})e^{-i\tilde{k}_L\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}}\tilde{u}_j(\mathbf{y},\omega)dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{x}}$  は  $\mathbf{x}$  の単位ベクトル成分である。さて、式 (12) では境界  $S$  上の点  $\mathbf{y}$  における未知変位  $\tilde{u}_j(\mathbf{y},\omega)$  を含んでいる。そこで、Born 近似を用いることで未知変位  $\tilde{u}_j(\mathbf{y},\omega)$  を入射波  $\tilde{u}_j^{\text{in}}(\mathbf{y},\omega)$  で近似する。なお、ここでは入射波  $\tilde{u}_j^{\text{in}}(\mathbf{y},\omega)$  を次のように与える。

$$\tilde{u}_j^{\text{in}}(\mathbf{y},\omega) = F^v(\tilde{k}_L)\hat{d}_je^{-i\tilde{k}_L\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} \quad (13)$$

ここで、 $\hat{d}_j$  は偏向方向ベクトルであり、 $F^v(\tilde{k}_L)$  は次式で与える。

$$F^v(\tilde{k}_L) = \frac{u_0\omega_0^2(1 - e^{i\omega T_0})}{2i\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (14)$$

ただし、 $u_0$  は変位振幅、 $\omega_0$  は中心周波数であり、対応する入射波の周期  $T_0$  に対し、 $\omega_0 = 2\pi/T_0$  で与えられる。さて、Born 近似を施した式 (12) に対し、Gauss の発散定理を適用することで式変形を行い、さらに空洞  $D_c$  内部でのみ 1 の値とり、その他の領域ではゼロとなる次の特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$

$$\Gamma(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{y} \in D_c) \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

を導入することで、式 (12) の積分を全領域  $A$  へと拡張することが出来る。実際に、式 (15) を用いて、式 (12) を整理すると、散乱波の積分方程式は以下ようになる。

$$\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x},\omega) = -\frac{\tilde{k}_L^2\hat{d}_iF^v(\tilde{k}_L)}{2\pi|\mathbf{x}|}e^{i\tilde{k}_L|\mathbf{x}|}\int_A \Gamma(\mathbf{y})e^{-2i\tilde{k}_L\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}}dV_{\mathbf{y}} \quad (16)$$

ここで、式 (16) に対し、 $\mathbf{K} = 2\tilde{k}_L\hat{\mathbf{x}}$  なる  $\mathbf{K}$  空間を考える。 $\hat{\mathbf{x}}$  に対する変数変換を施し、式 (16) に対し、逆フーリエ変換を行うことで、特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$  を以下のように導出することが出来る。

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{y}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{2|\mathbf{x}|\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x},\omega)\sin\theta}{\pi^2F^v(\tilde{k}_L)\hat{d}_i} \\ \times e^{-i\tilde{k}_L(|\mathbf{x}|-2\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y})}d\tilde{k}_Ld\theta d\varphi \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、 $\theta$ 、 $\varphi$  はそれぞれ、Fig.2 に示すような、天頂角と方位角である。さて、式 (17) は空洞内部でのみ値を持つ関数であるため、式 (17) の右辺を精度よく計算することで、粘弾性体中の空洞  $D_c$  の位置や形状を再構成できる。なお、式 (17) の右辺に含まれる周波数領域の散乱波  $\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x},\omega)$  は、2節の演算子積

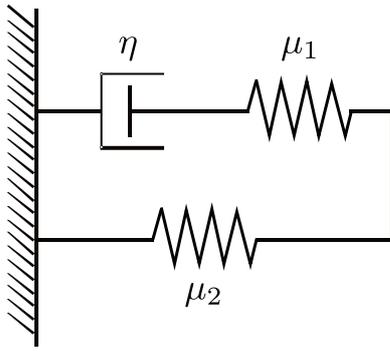


Fig.3 Three-element standard linear viscoelastic model.

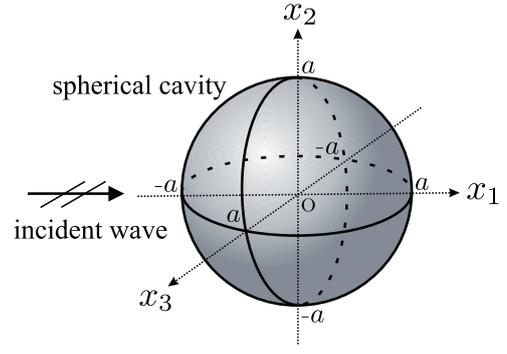


Fig.4 Elastic wave scattering by a cavity.

分時間領域境界要素法を用いて求められる時間領域の散乱波  $u_i^{sc}(\mathbf{x}, t)$  に対し、時間に関するフーリエ変換を行うことで求める。

#### 4. 数値解析例

以下、数値解析例を示す。まず、数値解析で用いた粘弾性モデルについて簡単に示す。その後、演算子積分時間領域境界要素法を用いた、3次元粘弾性波動問題に対する順解析を実行し、その数値解析例を示す。順解析では比較のため等方弾性体に対する数値解析例も示す。その後、順解析によって得られた散乱波形を用いて3次元無限粘弾性体中の空洞に対する逆散乱解析を実行する。

##### 4.1. 三要素標準モデル

粘弾性波動問題を扱う場合、そのモデル化はいくつか存在するが、以下の解析においては、Fig.3のように粘弾性体を粘性係数  $\eta$  のダッシュポットと、ばね定数  $\mu_1, \mu_2$  の二つのばねにより表す三要素標準モデル<sup>(13)</sup>を用いて解析を行った。ここで扱う三要素標準モデルの場合、その複素せん断弾性係数はラプラス変換領域で次のようになる。

$$\mu^*(s) = \frac{1 + s\tau_\sigma}{1 + s\tau_\epsilon} \mu_R \quad (18)$$

ただし、 $\tau_\sigma$  および  $\tau_\epsilon$  はそれぞれ、応力緩和時間、ひずみ緩和時間であり三要素標準モデルのパラメータを用いて

$$\tau_\sigma = \eta \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right), \quad \tau_\epsilon = \frac{\eta}{\mu_1} \quad (19)$$

と表される。また、 $\mu_R = \mu_2$  は緩和弾性係数であり、 $t \rightarrow \infty$  におけるせん断弾性定数になる。 $t \rightarrow 0$  における弾性定数は初期弾性定数  $\mu_0$  であり、応力緩和時間  $\tau_\sigma$  とひずみ緩和時間  $\tau_\epsilon$  を用いて次式で表される。

$$\mu_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \mu^*(s) = \mu_R \frac{\tau_\sigma}{\tau_\epsilon} \quad (20)$$

以下の数値解析例では、2次元粘弾性波動問題における前論文<sup>(6)</sup>同様、せん断弾性係数にだけ粘弾性的性質を持たせて解析を行った。

##### 4.2. 順解析結果

演算子積分法時間領域境界要素法を用いて、Fig.4に示す、半径  $a$  の空洞に対する3次元粘弾性波動における入射波の散乱問題を解析する。空洞は384個の四角形要素で分割・離散化

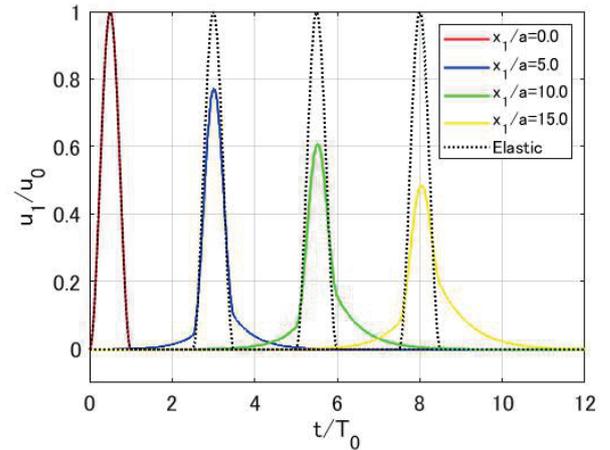


Fig.5 Time variations of  $u_1/u_0$  of the incident wave calculated by eq.(21) at  $x_1/a = 0.0, 5.0, 10.0$  and  $15.0$ .

し、総ステップ数  $N = L = 128$  として式(4)を計算した。また、解析に用いる粘弾性パラメータは、緩和弾性係数と初期弾性係数の比を  $\mu_R/\mu_0 = 0.85$ 、体積弾性係数と初期弾性係数の比を  $K/\mu_0 = 5/3$ 、初期弾性縦波速度  $c_{L0} = \sqrt{(K + (4/3)\mu_0)/\rho}$  の波が1つの空洞を通過する時間を  $T_0 = 2a/c_{L0}$ 、 $\tau_\sigma = 0.5T_0$ 、 $\tau_\epsilon = 17T_0/40$  とした。なお、従来の時間領域境界要素法では、時間増分  $c_{L0}\Delta t/a$  の大きさを要素長程度とする必要がある<sup>(1)</sup>。しかしながら、演算子積分時間領域境界要素法では、 $c_{L0}\Delta t/a$  を十分小さく設定でき、ここでは  $c_{L0}\Delta t/a = 0.08$  とした。順解析で用いる  $x_1$  方向に進行する時間領域の入射波は、式(13)、(14)に対し、逆フーリエ変換  $\mathcal{F}^{-1}$  を用いて、

$$u_i^{in}(\mathbf{x}, t) = u_0 \delta_{i1} \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\omega_0^2 (1 - e^{i\omega T_0})}{2i\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} e^{i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}_1} \right] \quad (21)$$

のように与える。Fig.5は、入射波の  $x_1/a = 0, 5, 10, 15$  における時刻歴波形を示している。比較のため、粘弾性の性質を持たない等方弾性体の場合の入射波も点線で示している。Fig.5より、入射波は減衰していることを確認できる。また、Fig.6とFig.7(a)-(d)にはそれぞれ等方弾性体および粘弾性体中の空洞周辺の、異なる無次元化時刻  $t/T_0$  における変位の絶対値  $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$  を変位振幅  $u_0$  で除した結果を示している。Fig.6(a)-(d)における等方弾性体に対する順解析結果

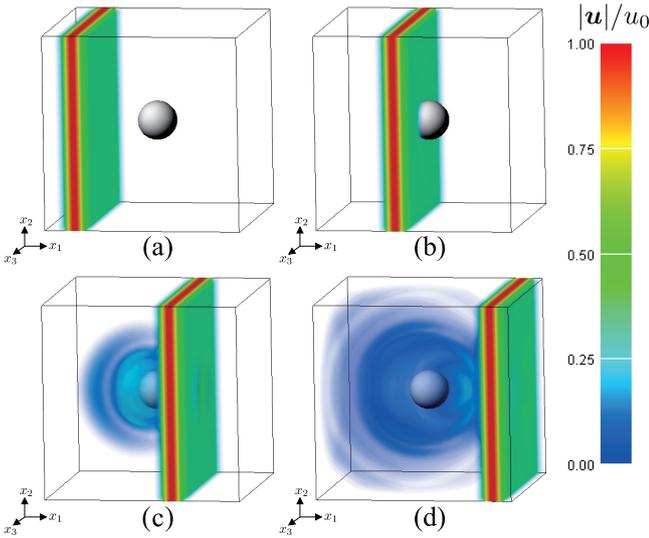


Fig. 6 Total wave fields  $|u|$  around the cavity in an isotropic elastic medium (a) $t/T_0 = 1.28$ , (b) $t/T_0 = 2.56$ , (c) $t/T_0 = 3.84$ , (d) $t/T_0 = 5.12$ .

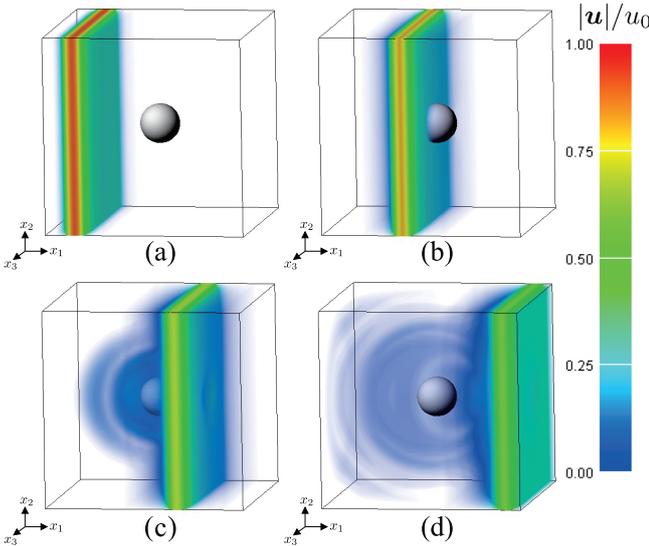


Fig. 7 Total wave fields  $|u|$  around the cavity in a viscoelastic medium (a) $t/T_0 = 1.28$ , (b) $t/T_0 = 2.56$ , (c) $t/T_0 = 3.84$ , (d) $t/T_0 = 5.12$ .

では、入射波は減衰することなく伝搬している様子が確認できる。一方、Fig.7 (a) - (d)における粘弾性体に対する順解析結果では、入射波および散乱波は Fig.6 (a) - (d) に比べて、時間とともに減衰しており、粘弾性効果を確認できる。

### 4.3. 逆散乱解析結果

次に、逆散乱解析の結果を示す。逆散乱解析において再構成の対象となる空洞は、Fig.2 に示される領域  $D$  内の半径  $a$  の空洞  $D_c$  とする。演算子積分時間領域境界要素法を用いて計算された、空洞からの散乱波形を用いて、逆散乱解析を実行する。ただし、Fig.2 における空洞中心  $O$  から  $R = 12a$  離れた空洞を取り囲む円周上に、角度  $\varphi$  および  $\theta$  に対し、それぞれ  $10^\circ$  刻みで送受信点を設けて逆散乱解析を行った。

#### 4.3.1. 逆散乱解析で用いる散乱波の計算

逆散乱解析で用いる散乱波の計算では、空洞を 384 個の四角要素で分割・離散化し、総ステップ数  $N = L = 1024$ 、時間増分を  $c_{L0}\Delta t/a = 0.08$  として散乱波を求めた。また、粘弾性パラメータを  $\mu_R/\mu_0 = 0.85$ ,  $K/\mu_0 = 5/3$ ,  $\tau_\sigma = 0.5T_0$ ,  $\tau_\epsilon = 0.25T_0$  と設定している。ここで用いる粘弾性のパラメータは、4.2 節の順解析よりも、やや粘弾性効果を大きくして逆散乱解析に用いる散乱波の計算を行った。

なお、逆散乱解析で用いる散乱波の計算では、遠方において散乱波の観測を行うため、総ステップ数  $N$  を大きく設定する必要がある、比較的計算負荷が大きくなる。そこで本解析では、OpenMP を利用したスレッド並列を行うことで計算時間を低減させた。

#### 4.3.2. 粘弾性体中の逆散乱解析結果

粘弾性体中の空洞に対する逆散乱解析結果を、Fig.8, 9 に示す。Fig.8 (a), (b) では、空洞の全周方向 ( $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$ ,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) において得られた散乱波形を用いた場合の  $x_2 - x_3$  断面および 3 次元空間における逆散乱解析結果を示している。一方、Fig.9 (a), (b) では、空洞の 1/4 周方向 ( $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ ,  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ) において得られた散乱波形を用いた場合の  $x_2 - x_3$  断面および 3 次元空間における逆散乱解析結果を示している。なお、Fig.8, 9 のいずれにおいても、一辺が  $10a$  の可視化領域に対し、特性関数  $\Gamma(\mathbf{y})$  の値をその最大値  $\Gamma_{\max}$  で除した値をプロットしていることに注意されたい。また、Fig.8, 9 (a) 中の白色点線は、実際の空洞の境界位置を表している。Fig.8 (a), (b) より、全周方向において得られる散乱波形を用いた場合、空洞の形状が概ね再構成されている事が確認できる。一方、Fig.9 (a), (b) より、散乱波形の取得位置が限定されている場合、入射波が直接当たる部分の特性関数  $\Gamma/\Gamma_{\max}$  は比較的大きい値を示すものの、空洞の形状を完全には再構成できていない。よって、散乱波形データが不十分な場合、空洞を完全には再構成できないが、十分なデータが揃えば、粘弾性の影響下であっても、空洞を概ね再構成できることがわかる。

## 5. おわりに

本論文では、演算子積分時間領域境界要素法を用いた粘弾性体中の空洞に対する 3 次元順解析および逆散乱解析を行った。順解析では、粘弾性体中の空洞に対する入射波の散乱解析を行うことで本手法の有効性を確認した。その後、順解析で得られた散乱波形を用いて、粘弾性体中の空洞に対する逆散乱解析を行い、粘弾性の影響下でも空洞を概ね再構成できることを示した。今後は、粘弾性体中のき裂や介在物等の欠陥、ならびに異方性の影響を考慮した異方性粘弾性波動問題に対する順解析および逆散乱解析手法の開発を検討する。また、高速多重極法<sup>(14)</sup> や  $\mathcal{H}$  行列法<sup>(15)</sup> を順解析に適用し、逆散乱解析に必要な散乱波形を効率的に取得しつつ、複数空洞の再構成を実施する予定である。

### 謝辞

本研究の一部は、令和 2 年度学際大規模情報基盤共同利用・

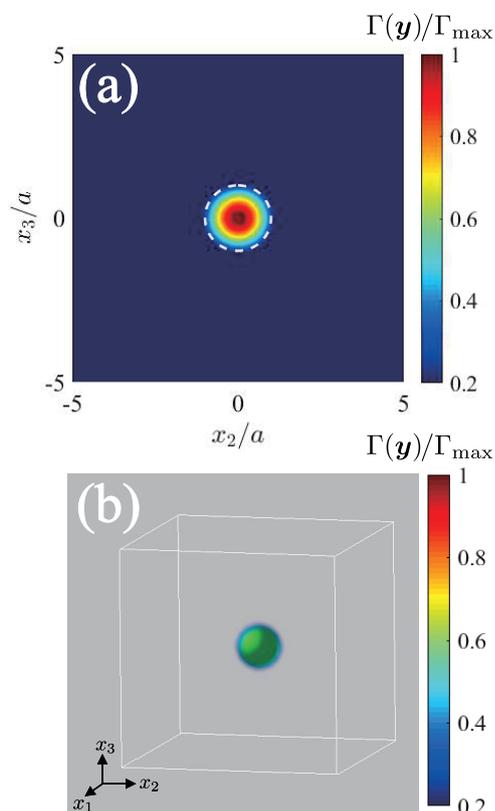


Fig.8 Shape reconstruction of the cavity in a viscoelastic material (a)  $x_2 - x_3$  plane, (b) 3-D space ( $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ, 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ).

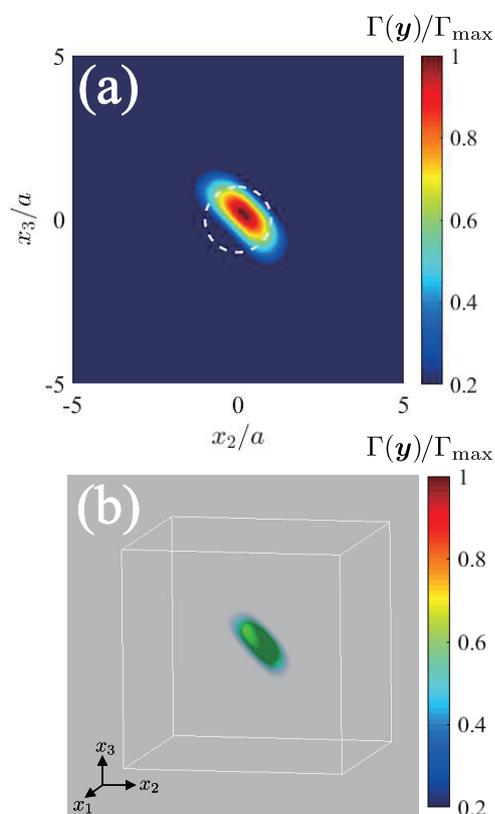


Fig.9 Shape reconstruction of the cavity in a viscoelastic material (a)  $x_2 - x_3$  plane, (b) 3-D space ( $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ, 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ).

共同研究拠点(課題番号:jh200052, 拠点共同研究先:京都大学), の支援の下, 実施されました。

### 参考文献

- (1) 福井卓雄: 境界要素法の研究-高速・高精度計算法の開発と応用-京都大学学位論文, (1998).
- (2) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 129–145.
- (3) 福井卓雄, 岡山美央, 石田貴之: 2次元波動伝播問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算数理工学論文集, **6** (2006), pp. 153–158.
- (4) 斎藤隆泰, 石田貴之, 福井卓雄, 廣瀬壮一: 演算子積分法および高速多重極法を用いた新しい二次元時間領域動弾性境界要素法について, 応用力学論文集, 土木学会, **11** (2008), pp. 193–200.
- (5) Maruyama, T., Saitoh, T. and Hirose, S.: Numerical study on sub-harmonic generation due to interior and surface breaking cracks with contact boundary conditions using time-domain boundary element method, *Int. J. Solids Struct.*, **126-127** (2017), pp. 74–89.
- (6) 斎藤隆泰, 石田貴之, 福井卓雄, 廣瀬壮一: 粘弾性面外波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, 論文番号No.20080011, (2008)
- (7) Li, P. and Schanz, M.: Time domain boundary element formulation for partially saturated poroelasticity, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **37**(11) (2013), pp. 1483–1498.
- (8) Kitahara, M., Nakahata, K. and Hirose, S.: Elastodynamic inversion for shape reconstruction and type classification of flaws, *Wave motion*, **36** (2002), pp. 443–455.
- (9) 角田貴也, 鈴木啓悟: 鋼コンクリート界面の剥離部分可視化の試み, 構造工学論文集, **63A** (2017), pp. 581–587.
- (10) 斎藤隆泰, 稲垣祐生, 下田瑞斗: 異方性弾性体中の欠陥に対する2次元逆散乱解析, 非破壊検査, **66**(2) (2017), pp. 84–89.
- (11) Schmerr, L. W.: Fundamentals of ultrasonic nondestructive evaluation, (1998), Plenum Press.
- (12) 中畑和之, 北原道弘: 多点受信波形を用いた逆散乱解析の高精度化, 土木学会論文集, No.745 / I-65 (2003), pp. 143–153.
- (13) ファン, Y. C. (大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀生 共訳): 固体の力学 / 理論, 培風館, (1970).
- (14) Greengard, L. and Rokhlin, V.: A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.*, **73** (1987), pp. 325–348.
- (15) Bebendorf, M.: Hierarchical Matrices: A Means to Efficiently Solve Elliptic Boundary Value Problems, (2008), Springer-Verlag.