計算数理工学論文集 Vol. 19 (2019 年 12 月)，論文 No. 08-191201 JASCOME

SPH 法による動弾性解析を用いたトポロジー最適化における随伴変数法に基づく感度解析

SENSITIVITY ANALYSIS BASED ON THE ADJOINT VARIABLE METHOD IN TOPOLOGY OPTIMIZATION USING ELASTODYNAMICS ANALYSIS BY SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS METHOD

野口　悠暉 [1)]，平田 敦 [2)]

Yuki NOGUCHI and Atsushi HIRATA

1) 東京工業大学　工学院　(〒 152-8550　東京都目黒区大岡山 2-12-1,　E-mail: noguchi.y.ah@m.titech.ac.jp)
2) 東京工業大学　工学院　(〒 152-8550　東京都目黒区大岡山 2-12-1,　E-mail: hirata.a.aa@m.titech.ac.jp)

This paper presents a derivation method for design sensitivities in topology optimization with the use of SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) analysis. First, we give a brief explanation of SPH analysis for elastodynamics system. Next, toplogy optimization problem is formulated. The characteristic function is defined at each particle, and it is used in source terms of governing equation in SPH method. Then, a sensitivity analysis is conducted using the adjoint variable method. Numerical examples are provided to show the validity of the setting of characteristic function and obtained design sensitivity.

Key Words: Sensitivity Analysis, Adjoint Variable Method, Smoothed Particle Hydrodynamics Method, Topology Optimization, Elastodynamics

1. 緒言

近年，粒子法(1) と呼ばれる連続体を対象とした離散化手法に基づく数値解析法が流体問題や構造問題を中心に広く展開されており，その有用性が示されている．粒子法は，空間に配置された有限個の粒子を用いて支配方程式を離散化し，各粒子の運動を追跡することで連続体の表現を行うラグランジュ記述に基づく解析手法である．固定された計算格子を用いて離散化を行うオイラー記述に基づく有限差分法や有限要素法等と比較して，粒子法は大変形問題を容易に取り扱えるという特徴を持つ．このため，流体問題における自由表面流の解析や，構造問題における接触解析や破壊現象の解析等，様々な適用例が存在する．さらに粒子法は，離散動力学を対象とした解析手法である個別要素法や分子動力学法等と，粒子群の運動を解析するという点で類似しており，これらの手法との連成解析や，連続体近似では表せない現象に対する粒子法によるモデリングが期待されている(2)．

他方，構造物の最適な形状及び形態を求めるトポロジー最適化(3) は，構造問題のみならず，流体問題，電磁波伝搬問題等様々な分野への展開がなされている．トポロジー最適化は，構造最適化問題を材料分布問題に置き換える点を特徴としており，設計指針である設計感度を基に材料分布を最適化することで，構造物の最適な形態を得る．これまでは主に，有限要素法を始めとするオイラー記述に基づく数値解析手法を用いた例が多かったが，近年では粒子法による数値解析手法を用いたトポロジー最適化も行われつつある．粒子法に基づくトポロジー最適化法では，オイラー記述に基づく表現が難しい物理現象の取り扱いが可能であるため，様々な分野での工学的応用が期待されるが，現状では設計指針である設計感度が適切に導出されていないという問題がある．

例えば Lin ら(4) は，代表的な粒子法の一つである SPH 法 (Smoothed Particle Hydrodynamics Method) による弾性体解析を用いて，静弾性問題における構造物の剛性最大化を行っている．有限要素法を用いたトポロジー最適化を行った場合と同様の最適構造が得られているものの，設計感度の導出方法については明らかにされていない．また Sasaki ら(5) は，流体問題を対象とし，SPH 法同様に代表的な粒子法である MPS 法 (Moving Particle Semi-implicit Method) に基づくトポロジー最適化手法を提案している．Sasaki らはオイラー記述に基づく随伴変数法を用いた感度解析を行っているが，導出される随伴方程式がオイラー記述に基づく形式となり，随伴場の解析に直接 MPS 法を導入できないという問題

2019 年 9 月 10 日受付，2019 年 10 月 17 日受理

がある．このため，導出された随伴方程式を解釈し，ラグランジュ記述に基づく形式に変換する必要があるが，解析対象となる系が複雑になればその解釈が難しく，オイラー記述に基づく感度解析手法の適用が困難となると考えられる．また，Yamada ら[6] は，連続系でラグランジュ記述に基づいた感度解析を行い，構造問題における MPS 法を用いたトポロジー最適化法を提案している．しかし，このような感度解析手法は，粒子法の解析対象として今後の展開が期待される連続体近似が成り立たない系においては有効ではない．

そこで本研究では，粒子法の枠組みでラグランジュ記述に基づく感度解析手法を提案する．ここでは，基礎検討として動弾性解析を用いたトポロジー最適化を対象に，随伴変数法に基づく感度解析を行う．本研究では，粒子法の中でも陽解法に基づき系の時間発展を求める SPH 法を用いる．まず，SPH 法を用いた動弾性解析について述べ，次に SPH 法を用いたトポロジー最適化問題の定式化について述べる．設計変数である特性関数の設定方法について述べ，随伴変数法に基づく感度解析を行う．そして数値例によって，設計変数の設定方法と得られた設計感度について妥当性を示す．

2. SPH 法を用いた動弾性解析

2.1. 弾性体の支配方程式

本研究では，Gray ら[7] が提唱した弾性体解析手法を導入する．等方線形弾性体を仮定すると，弾性体の変形挙動は以下の運動方程式と連続の式によって記述される．

$$\dot{v}^{\alpha} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + f^{\alpha}, \tag{1}$$

$$\dot{\rho} = -\rho\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}, \tag{2}$$

ただし $\dot{a} = \frac{Da}{Dt}$ は時間 t に関するラグランジュ微分を表す．また，上付きの添字はベクトルやテンソルの成分を表し，総和規約を適用する．$\boldsymbol{x}$ は位置ベクトルを，$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$ は速度ベクトルを，ρ は弾性体の質量密度を，$\boldsymbol{f}$ は物体力をそれぞれ表す．$\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルであり，圧力 p と偏差応力テンソル $\boldsymbol{S}$ を用いて以下のように表される．

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}, \tag{3}$$

ただし，$\delta^{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタである．圧力 p は以下の状態方程式を満たす．

$$p = K\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right), \tag{4}$$

ただし K は弾性体材料の体積弾性率を，ρ_0 は基準密度を表し，$\rho_0 = \rho|_{t=0}$ と設定する．また，偏差応力テンソル $\boldsymbol{S}$ の時間発展は，共回転微分を考慮して以下のように表される．

$$\dot{S}^{\alpha\beta} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}^{\gamma\gamma}\delta^{\alpha\beta}\right) + S^{\alpha\gamma}\omega^{\beta\gamma} + S^{\gamma\beta}\omega^{\alpha\gamma}, \tag{5}$$

ただし，μ は弾性体材料の剛性率である．$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ はひずみ速度テンソル，$\boldsymbol{\omega}$ は回転速度テンソルであり，各成分は以下の通り表される．

$$\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right),\ \omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right). \tag{6}$$

2.2. SPH 法を用いた離散化

SPH 法では，位置 $\boldsymbol{x}$ における物理量 $\phi(\boldsymbol{x})$ をカーネル関数 W と呼ばれる連続関数を用いて近似する．この近似された物理量を $\langle\phi(\boldsymbol{x})\rangle$ とすると，以下のように表される．

$$\langle\phi(\boldsymbol{x})\rangle = \int_{\Omega_a}\phi(\boldsymbol{x'})W(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|,h)d\Omega(\boldsymbol{x'}), \tag{7}$$

ただし Ω_a は解析領域を表す．$h > 0$ は smoothing length と呼ばれ，カーネル関数の影響範囲を規定するパラメータである[8]．カーネル関数は以下の性質を満たす．

$$\int_{\Omega}W(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|,h)d\Omega(\boldsymbol{x'}) = 1,\ \lim_{h\to 0}W(|\boldsymbol{x}|,h) = \delta(|\boldsymbol{x}|).$$

この性質を満たすカーネル関数として，通常は 3 次のスプライン関数が用いられる．一方で，本研究では後述する随伴方程式の解析のために，カーネル関数の位置に関する 2 階微分を評価する必要がある．3 次のスプライン関数は，この 2 階微分が不連続となる点が存在し，設計感度の評価に誤差が生じる可能性がある．そこで以下に示すように，より高次な 5 次のスプライン関数を導入する．

$$W(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|,h) = \frac{7}{478\pi h^2}w\left(\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|}{h}\right),$$

$$w(q) = \begin{cases} (3-q)^5 - 6(2-q)^5 + 15(1-q)^5 & (0 \le q < 1) \\ (3-q)^5 - 6(2-q)^5 & (1 \le q < 2) \\ (3-q)^5 & (2 \le q < 3) \\ 0 & (3 < q). \end{cases} \tag{8}$$

この考え方を基に弾性体の支配方程式を離散化すると，以下の通り表される．

$$\dot{\rho}_i = \sum_{j\neq i} m_j v_{ij}^{\alpha}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\alpha}}, \tag{9}$$

$$\dot{v_i^{\alpha}} = \sum_{j\neq i} m_j\left[\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} - \Pi_{ij}\delta^{\alpha\beta} + (f_{ij})^n R_{ij}^{\alpha\beta}\right]\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} + f_i^{\alpha}, \tag{10}$$

$$\dot{S}_i^{\alpha\beta} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_i^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_i^{\gamma\gamma}\delta^{\alpha\beta}\right) + S_i^{\alpha\gamma}\omega_i^{\beta\gamma} + S_i^{\gamma\beta}\omega_i^{\alpha\gamma}, \tag{11}$$

ただし，下付きの添字 i は i 番目の粒子を表す．m_i は粒子の質量を表す．また，$x_{ij}^{\alpha}, v_{ij}^{\alpha}, W_{ij}$ は以下の通り定義される．

$$x_{ij}^{\alpha} = x_i^{\alpha} - x_j^{\alpha},\ v_{ij}^{\alpha} = v_i^{\alpha} - v_j^{\alpha},\ W_{ij} = W(|\boldsymbol{x_{ij}}|,h).$$

同様に，応力テンソル，圧力，ひずみ速度テンソル，回転速度テンソルはそれぞれ以下のように離散化される．

$$\sigma_i^{\alpha\beta} = -p_i\delta^{\alpha\beta} + S_i^{\alpha\beta}, \tag{12}$$

$$p_i = K\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} - 1\right), \tag{13}$$

$$\dot{\varepsilon}_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{m_j}{\rho_j}\left(v_{ji}^{\alpha}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} + v_{ji}^{\beta}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\alpha}}\right), \tag{14}$$

$$\omega_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{m_j}{\rho_j}\left(v_{ji}^{\alpha}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} - v_{ji}^{\beta}\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\alpha}}\right). \tag{15}$$

また，式 (10) 右辺の括弧内第 3,4 項はそれぞれ人工粘性項と人工応力項であり，数値振動を抑えるために導入される．詳細については，文献[7] を参照されたい．

3. SPH 法を用いたトポロジー最適化問題の定式化

3.1. 特性関数の設定方法

トポロジー最適化では，固定設計領域 D を最適化を行う物体領域 Ω を含む領域で設定し，以下に示す材料の有無を表す特性関数 χ を導入する．

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega \\ 0 & \text{if } \boldsymbol{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \tag{16}$$

通常，特性関数は空間的に固定された計算格子上（例えば有限要素解析における節点上）において定義される．一方，ラグランジュ記述に基づく数値解析法である SPH 法にこの定義を用いると，必ずしも特性関数が定義された位置に計算点である粒子が存在するとは限らないため，構造物の表現が困難である上に，最適化に必要な設計感度の導出が難しい．

そこで本研究では，SPH 法における状態変数と同様に，各粒子において特性関数を定義する．すなわち，i 番目の粒子に対して特性関数 χ_i を定義し，$\chi_i = 1$ であれば粒子が存在し，$\chi_i = 0$ であれば粒子が存在しないものとする．この特性関数を支配方程式に導入することで，物体領域 Ω と空洞領域 $D \setminus \Omega$ を表現できる．SPH 法で離散化された支配方程式は，ある粒子 i を中心としたカーネル関数の台に存在する粒子 j の持つ物理量について総和 $\sum_{j \neq i}$ を取ることで，粒子 i に働く合力を算出する構造になっている．また，カーネル関数の台に粒子が存在しなければ粒子 i に働く合力も 0 となる．そこで，特性関数を用いて $\sum_{j\neq i} F_{ij} \to \chi_i \sum_{j\neq i} \chi_j F_{ij}$ のように総和項を置き換え，材料分布を表現する．ただし F_{ij} は粒子 i, j 間で働く相互作用を表す．以上の考え方を離散化された支配方程式に導入することで，特性関数を用いた材料分布表現に基づく構造物を対象とした弾性体解析を行うための支配方程式が得られる．

$$\dot{\rho}_i = \chi_i \sum_{j\neq i} \chi_j m_j v_{ij}^{\alpha} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\alpha}} \equiv D_i, \tag{17}$$

$$\dot{v}_i^{\alpha} = \chi_i \sum_{j \neq i} \chi_j m_j \left[\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} - \Pi_{ij}\delta^{\alpha\beta} + (f_{ij})^n R_{ij}^{\alpha\beta} \right] \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} + f_i^{\alpha} \equiv F_i^{\alpha}, \tag{18}$$

$$\dot{S}_i^{\alpha\beta} = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_i^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_i^{\gamma\gamma}\delta^{\alpha\beta} \right) + S_i^{\alpha\gamma}\omega_i^{\beta\gamma} + S_i^{\gamma\beta}\omega_i^{\alpha\gamma} \equiv A_i^{\alpha\beta}, \tag{19}$$

ここで，後述の感度解析のために上式では右辺をそれぞれ $D_i, F_i^{\alpha}, A_i^{\alpha\beta}$ と置いた．上式中の応力テンソル及び圧力については式 (12),(13) の定義を用いる．ひずみ速度テンソル，回転速度テンソルはそれぞれ以下のように表される．

$$\dot{\varepsilon}_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\chi_i \sum_{j\neq i} \chi_j \frac{m_j}{\rho_j} \left(v_{ji}^{\alpha} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} + v_{ji}^{\beta} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\alpha}} \right), \tag{20}$$

$$\omega_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\chi_i \sum_{j\neq i} \chi_j \frac{m_j}{\rho_j} \left(v_{ji}^{\alpha} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} - v_{ji}^{\beta} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\alpha}} \right). \tag{21}$$

3.2. 随伴変数法に基づく感度解析

ここでは，随伴変数法を用いてトポロジー最適化に必要な設計感度の導出を行う．設計感度とは，目的関数の設計変数についての勾配を表すが，トポロジー最適化における設計変数である特性関数は 0 もしくは 1 の離散的な値を取るため，本来勾配を算出することができない．そこで本研究では，SIMP 法[9] と同様の考え方で，特性関数が $0 \leq \chi_i \leq 1$ の範囲で連続に分布可能であると仮定し，感度解析を行う．

以下では表記を簡潔にするために，粒子 $i = 1, 2, ..., N$ で定義された物理量 a_i の集合を $\{a\}$ と表し，ベクトルとして扱う．目的関数が以下の形式で与えられているものとする．

$$F = g(\{\chi\}; \{\rho\}, \{\boldsymbol{x}\}, \{\dot{\boldsymbol{x}}\}, \{\boldsymbol{S}\})|_{t=t_T} + \int_0^{t_T} h(\{\chi\}; \{\rho\}, \{\boldsymbol{x}\}, \{\dot{\boldsymbol{x}}\}, \{\boldsymbol{S}\}) dt, \tag{22}$$

ただし，t_T は弾性体解析における終端時刻を表す．このとき，最適化問題は以下のように定式化される．

$$\begin{aligned} &\min_{\{\chi\}} \ F \\ &\text{subject to } \{\dot{\rho}\} = \{D\}(\{\chi\}; \{\boldsymbol{x}\}, \{\dot{\boldsymbol{x}}\}), \\ &\qquad \{\ddot{\boldsymbol{x}}\} = \{\boldsymbol{f}\}(\{\chi\}; \{\rho\}, \{\boldsymbol{x}\}, \{\boldsymbol{S}\}), \\ &\qquad \{\dot{\boldsymbol{S}}\} = \{\boldsymbol{A}\}(\{\chi\}; \{\rho\}, \{\boldsymbol{x}\}, \{\dot{\boldsymbol{x}}\}, \{\boldsymbol{S}\}), \\ &\qquad \{\rho\}|_{t=0} = \{\rho_{\mathrm{init}}\},\ \{\boldsymbol{x}\}|_{t=0} = \{\boldsymbol{x}_{\mathrm{init}}\}, \\ &\qquad \{\dot{\boldsymbol{x}}\}|_{t=0} = \{\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{init}}\},\ \{\boldsymbol{S}\}|_{t=0} = \{\boldsymbol{S}_{\mathrm{init}}\}, \end{aligned} \tag{23}$$

ただし，$\{\rho_{\mathrm{init}}\}, \{\boldsymbol{x}_{\mathrm{init}}\}, \{\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{init}}\}, \{\boldsymbol{S}_{\mathrm{init}}\}$ はそれぞれ $\{\rho\}$,$\{\boldsymbol{x}\}$, $\{\dot{\boldsymbol{x}}\}$,$\{\boldsymbol{S}\}$ の初期値を表す．上記の制約付き最適化問題を無制約問題に置き換えるために，以下のラグランジアンを導入する．

$$\begin{aligned} &L(\{\chi\}; \hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\boldsymbol{V}}) \\ &= F + \int_0^{t_T} \Big(\{\dot{\hat{\rho}}\} - \{D\}(\{\chi\}; \{\hat{\boldsymbol{x}}\}, \{\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}\}) \Big) \cdot \{\hat{q}\} dt \\ &+ \int_0^{t_T} \Big(\{\ddot{\hat{\boldsymbol{x}}}\} - \{\boldsymbol{f}\}(\{\chi\}; \{\hat{\rho}\}, \{\hat{\boldsymbol{x}}\}, \{\hat{\boldsymbol{S}}\}) \Big) \cdot \{\hat{\boldsymbol{\xi}}\} dt \\ &+ \int_0^{t_T} \Big(\{\dot{\hat{\boldsymbol{S}}}\} - \{\boldsymbol{A}\}(\{\chi\}; \{\hat{\rho}\}, \{\hat{\boldsymbol{x}}\}, \{\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}\}, \{\hat{\boldsymbol{S}}\}) \Big) \cdot \{\hat{\boldsymbol{T}}\} dt \end{aligned} \tag{24}$$

ただし，$\hat{\boldsymbol{U}} \equiv (\{\hat{\rho}\}, \{\hat{\boldsymbol{x}}\}, \{\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}\}, \{\hat{\boldsymbol{S}}\})$ は状態変数に相当する設計変数であり，$\hat{\boldsymbol{V}} \equiv (\{\hat{q}\}, \{\hat{\boldsymbol{\xi}}\}, \{\hat{\boldsymbol{T}}\})$ はラグランジュ乗数である．ラグランジアンの停留点においては，以下の最適性の条件が成り立つ．

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \hat{\boldsymbol{U}}}, \delta\hat{\boldsymbol{U}} \right\rangle \Big|_{\mathrm{opt}} = 0, \ \left\langle \frac{\partial L}{\partial \hat{\boldsymbol{V}}}, \delta\hat{\boldsymbol{V}} \right\rangle \Big|_{\mathrm{opt}} = 0. \tag{25}$$

ただし上式の左辺は方向微分を表す．また，$|_{\mathrm{opt}}$ はラグランジアンの停留点における関数の値を表す．(25) の第 2 式より，ラグランジアンの停留点においては $\hat{\boldsymbol{U}}|_{\mathrm{opt}} = \boldsymbol{U} \equiv (\{\rho\}, \{\boldsymbol{x}\}, \{\dot{\boldsymbol{x}}\}, \{\boldsymbol{S}\})$ が成り立つことが分かる．一方で，(25) の第 1 式を満たすラグランジュ乗数を $\hat{\boldsymbol{V}}|_{\mathrm{opt}} = \boldsymbol{V} \equiv (\{q\}, \{\boldsymbol{\xi}\},$

$\{\boldsymbol{T}\}$) とすると，$\boldsymbol{V}$ は以下の随伴方程式を満たす．

$$\{\dot{q}\} = \frac{\partial h}{\partial\{\rho\}} - \{\boldsymbol{\xi}\}\left(\frac{\partial\{\boldsymbol{f}\}}{\partial\{\rho\}}\right)^t - \{\boldsymbol{T}\}\left(\frac{\partial\{\boldsymbol{A}\}}{\partial\{\rho\}}\right)^t \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\{\ddot{\boldsymbol{\xi}}\} = &-\frac{\partial h}{\partial\{\boldsymbol{x}\}} + \{q\}\left(\frac{\partial\{D\}}{\partial\{\boldsymbol{x}\}}\right)^t + \{\boldsymbol{\xi}\}\left(\frac{\partial\{\boldsymbol{f}\}}{\partial\{\boldsymbol{x}\}}\right)^t \\ &+ \{\boldsymbol{T}\}\left(\frac{\partial\{\boldsymbol{A}\}}{\partial\{\boldsymbol{x}\}}\right)^t \\ &+ \frac{D}{Dt}\left\{\frac{\partial h}{\partial\{\dot{\boldsymbol{x}}\}} - \{q\}\left(\frac{\partial\{D\}}{\partial\{\dot{\boldsymbol{x}}\}}\right)^t - \{\boldsymbol{T}\}\left(\frac{\partial\{\boldsymbol{A}\}}{\partial\{\dot{\boldsymbol{x}}\}}\right)^t\right\}\end{aligned} \tag{27}$$

$$\{\dot{\boldsymbol{T}}\} = \frac{\partial h}{\partial\{\boldsymbol{S}\}} - \{\boldsymbol{\xi}\}\left(\frac{\partial\{\boldsymbol{f}\}}{\partial\{\boldsymbol{S}\}}\right)^t - \{\boldsymbol{T}\}\left(\frac{\partial\{\boldsymbol{A}\}}{\partial\{\boldsymbol{S}\}}\right)^t \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&\{q\}|_{t=t_T} = -\left.\frac{\partial g}{\partial\{\rho\}}\right|_{t=t_T}, \quad \{\boldsymbol{\xi}\}|_{t=t_T} = -\left.\frac{\partial g}{\partial\{\dot{\boldsymbol{x}}\}}\right|_{t=t_T}, \\ &\{\dot{\boldsymbol{\xi}}\}\Big|_{t=t_T} = \left.\frac{\partial g}{\partial\{\boldsymbol{x}\}}\right|_{t=t_T} + \left.\frac{\partial h}{\partial\{\dot{\boldsymbol{x}}\}}\right|_{t=t_T} \\ &\qquad - \{q\}\left.\left(\frac{\partial\{D\}}{\partial\{\dot{\boldsymbol{x}}\}}\right)^t\right|_{t=t_T} - \{\boldsymbol{T}\}\left.\left(\frac{\partial\{\boldsymbol{A}\}}{\partial\{\dot{\boldsymbol{x}}\}}\right)^t\right|_{t=t_T}, \\ &\{\boldsymbol{T}\}|_{t=t_T} = -\left.\frac{\partial g}{\partial\{\boldsymbol{S}\}}\right|_{t=t_T}.\end{aligned} \tag{29}$$

ここで，$L(\{\chi\};\boldsymbol{U}(\{\chi\}),\hat{\boldsymbol{V}}) = F$ が任意のラグランジュ乗数 $\hat{\boldsymbol{V}}$ について成り立つことから，目的関数の特性関数についての勾配は以下のように表される．

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\{\chi\}} = &\frac{\partial L}{\partial\{\chi\}}(\{\chi\};\boldsymbol{U}(\{\chi\}),\hat{\boldsymbol{V}}) \\ &+ \left\langle\frac{\partial L}{\partial\hat{\boldsymbol{U}}}(\{\chi\};\boldsymbol{U}(\{\chi\}),\hat{\boldsymbol{V}}),\boldsymbol{U}'(\{\chi\})\right\rangle\end{aligned} \tag{30}$$

さらに，ラグランジュ乗数として随伴方程式の解を選ぶと，最適性の条件 (25) の第 1 式より上式の第 2 項は 0 となる．したがって，随伴変数 $\boldsymbol{V} = (\{q\},\{\boldsymbol{\xi}\},\{\boldsymbol{T}\})$ を用いると設計感度は以下の通り表される．

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\{\chi\}} = &\frac{\partial F}{\partial\{\chi\}} \\ &- \int_0^{t_T}\left(\frac{\partial\{D\}}{\partial\{\chi\}}\cdot\{q\} + \frac{\partial\{\boldsymbol{f}\}}{\partial\{\chi\}}\cdot\{\boldsymbol{\xi}\} + \frac{\partial\{\boldsymbol{A}\}}{\partial\{\chi\}}\cdot\{\boldsymbol{T}\}\right)dt\end{aligned} \tag{31}$$

4. 数値実装法

4.1. 壁面境界条件

動弾性解析を行うためには，適切に拘束条件を与える必要があるが，ここでは先行研究[10] で提案されているダミー粒子を用いた方法を導入する．この方法では，弾性体材料を表す粒子の外側に弾性体材料と同じ質量及び材料定数を持つダミー粒子を複数配置することで剛体壁を構成し，ダミー粒子と弾性体を表す粒子との相互作用を考慮することによって，弾性体に反力を与え固定端を表現する．

動弾性解析中，ダミー粒子の位置は初期位置から更新されないが，ダミー粒子では以下に述べる通り速度ベクトル及び応力テンソルが定義されている．弾性体を表す粒子の集合を I_s，ダミー粒子の集合を I_w と表すとする．速度については，弾性体粒子とダミー粒子との境界面において 0 となるように弾性体粒子のもつ速度を外挿する．すなわち，$i \in I_w$ のとき，

$$v_i^\alpha = -\frac{\sum_{j\in I_s} v_j^\alpha W_{ij}}{\sum_{j\in I_s} W_{ij}}, \tag{32}$$

と与えられる．一方応力テンソルについては，弾性体領域からダミー粒子の占める領域にかけて滑らかに分布するように，以下のように外挿する[11]．

$$\sigma_i^{\alpha\beta} = \frac{\sum_{j\in I_s}\sigma_j^{\alpha\beta}W_{ij} - f_i^\gamma\sum_{j\in I_s}\rho_j x_{ij}^\gamma W_{ij}\delta^{\alpha\beta}}{\sum_{j\in I_s}W_{ij}}, \tag{33}$$

ただし，$i \in I_w$ である．上式を満たすように式 (12) と式 (13) を用いて質量密度 ρ_i 及び偏差応力 $\boldsymbol{S}_i$ を設定すればよい．本研究では，上述の壁面境界条件を実装した上で，状態場と随伴場の求解を行う．

4.2. 時間積分法

各粒子の時間発展を求めるために，時間ステップ Δt を用いて時間方向に離散化を行う．時間積分には，SPH 法で広く用いられているリープフロッグ法を導入する．詳細は文献[7] を参照されたい．なお，設計感度の算出のためには，状態場の支配方程式のみではなく，随伴方程式を解く必要がある．随伴方程式は式 (26)–(29) で表される通り，終端時刻での値が規定される Terminal value problem であるが，適切に変数変換を施すことで，状態場の支配方程式と同様の初期値問題に変換できる．したがって本研究では，随伴場求解においても同様にリープフロッグ法を導入する．

5. 数値例

5.1. 特性関数による材料分布の表現の妥当性の検証

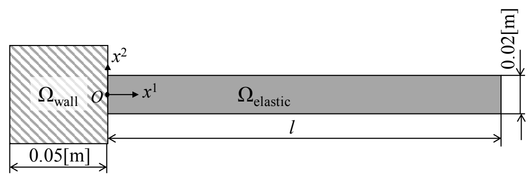

Fig. 1 An analysis model to verify the setting of characteristic function.

まず，3.1 節で示した特性関数の設定方法に基づく材料分布の表現が妥当であることを示すために，2 次元動弾性問題を対象とした数値例を示す．図 1 は，検証のための解析モデルを示す．弾性体領域 $\Omega_{\mathrm{elastic}}$ が，4.1 節で述べたダミー粒子によって表された剛体壁の領域 Ω_{wall} に固定されており，左端が拘束された片持ち梁となっている．外力は付加せず，$\Omega_{\mathrm{elastic}}$ に初速を与え，弾性体の動的な挙動を解析する．$\Omega_{\mathrm{elastic}}$ を占める弾性体材料の材料定数はヤング率が 2.0[MPa]，ポアソン比が 0.3975，質量密度が 1000[kg/m^3] であるとする．各寸法は図中記載の通りであり，(i) $l = 0.1$[m] と (ii) $l = 0.2$[m] の 2 つのモデルを対象とする．モデル (i) では特性関数を用いず，式 (9)–(11) を用いた通常の SPH 法による動弾性解析を行う．一方，モデル (ii) では特性関数を導入した，式 (17)–(19) を用いた動弾性解析を行う．モデル (i) の弾性体を特性関数によって等価的に表し，(i), (ii) の挙動を比較することによって，3.1 節で示した方法論の妥当性を示す．具体的には，弾性体

領域における各粒子に対して特性関数を $x_i^1 \leq 0.1$ において $\chi_i = 1$，$x_i^1 > 0.1$ において $\chi_i = 0$ と設定する．いずれのモデルにおいても，弾性体粒子に対して以下のように初速度を与える[7]．

$$\dot{x}_i^1|_{t=0} = 0,\ \dot{x}_i^2|_{t=0} = \frac{c_0 V_f}{Q}\{MC(x_i^1) - NS(x_i^1)\},$$

ただし，

$$c_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}},$$
$$M = \sin(kL) + \sinh(kL),\ N = \cos(kL) + \cosh(kL),$$
$$C(x_i^1) = \cos(kx_i^1) - \cosh(kx_i^1),\ S(x_i^1) = \sin(kx_i^1) - \sinh(kx_i^1),$$
$$Q = 2\{\cos(kL)\sinh(kL) - \sin(kL)\cosh(kL)\},$$

である．ここで，$V_f = 0.01$，$L = 0.1$，$k = 1.875/L$ と設定した．ただし，モデル (ii) では $\chi_i = 0$ である領域において，$\dot{x}_i^1|_{t=0} = \dot{x}_i^2|_{t=0} = 0$ とした．初期位置は，図 1 に対応するように粒子を正方格子状に配列することで定める．モデル (i) では 527 個の粒子を配列し，モデル (ii) では 758 個の粒子を配列した．初期質量密度は，弾性体材料の質量密度とし，初期偏差応力は，各成分を 0 と設定した．また，時間ステップは $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$[s] とした．

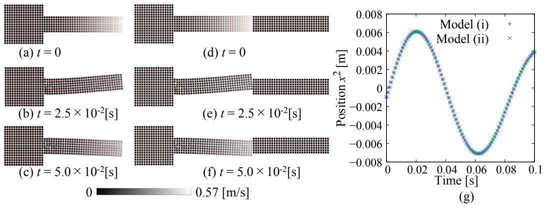

Fig. 2　(a)–(f): Deformation pattern and speed distribution in $\Omega_{\mathrm{elastic}}$. Model (i) is used in (a)–(c), whereas Model (ii) is used in (d)–(f); (g): Comparison of time response of position x_i^2 in Model (i) and Model (ii).

図 2(a)–(f) は，モデル (i),(ii) における弾性体変形挙動及び $\Omega_{\mathrm{elastic}}$ における粒子の持つ速さの分布について時間応答を表す．(a)–(c) はモデル (i) による計算結果であり，(d)–(f) はモデル (ii) によるものである．モデル (ii) では，上述の通り特性関数を用いており，空洞領域に相当する $x^1 > 0.1$ の領域で粒子が静止し続けていることが分かる．これは，支配方程式に特性関数を導入したことで，$\chi_i = 0$ となる領域では運動方程式の右辺が 0 となるためである．(d)–(f) の $\chi_i = 1$ である領域の変形挙動に着目すると，通常の SPH 解析による (a)–(c) に示す弾性体の変形挙動と同様であることが分かる．図 2(g) は，両モデルにおける自由端中央の粒子（初期位置 $(x_i^1|_{t=0}, x_i^2|_{t=0}) = (0.1, -0.001)$）の持つ x_i^2 の時間応答を表す．モデル (ii) による位置とモデル (i) による位置は一致しており，本手法の妥当性が示された．

5.2. 設計感度の妥当性の検証

ここでは，3.2 節で導出した設計感度の妥当性について述べる．図 3 に示す通り，5.1 節同様に Ω_{wall} の剛体壁によって固定された弾性体の片持ち梁を考える．弾性体領域 $\Omega_{\mathrm{elastic}}$ を占める弾性体材料の材料定数はヤング率が 210[GPa]，ポアソン比が 0.33，質量密度が 7980[kg/m^3] であるとする．自由端近傍には $-x^2$ 方向の荷重が課せられ，これによって片持ち梁が変形する．この荷重を物体力 $\boldsymbol{f}_i$ によって表現し，以下のプロファイルを有するとする．

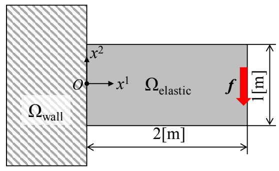

Fig. 3　Design settings for displacement minimization problem.

$$f_k^2(t) = \begin{cases} -\frac{f_y}{t_T/2}t & \text{if } 0 \leq t \leq t_T/2 \\ -f_y & \text{if } t_T/2 < t \leq t_T \end{cases}$$

ただし k は，片持ち梁の自由端に相当する粒子番号であり，離散化された弾性体領域 $\Omega_{\mathrm{elastic}}$ の右端 1 層分の粒子に相当する．f_y は物体力の大きさを表し，$f_y = 10$[N/m^3] とする．また，x^1 方向には荷重を加えず，$f_k^1 = 0$ とする．$\Omega_{\mathrm{elastic}}$ において特性関数を均一に $\chi_i = 1$ と設定し，式 (17)–(19) を用いた離散化を行う．689 個の粒子を用いて離散化を行い，初期位置及び初期質量密度は 5.1 節と同様に設定し，初速度及び初期偏差応力は，各成分を 0 とした．時間ステップを $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$[s]，終端時刻を $t_T = 0.01$[s] とし，$0 \leq t \leq t_T$ において弾性体の変形挙動を解析する．

図 4 は終端時刻 t_T における弾性体領域の変形と圧力分布を示す．ただし，変位は $u_i^\alpha(t) = x_i^\alpha(t) - x_i^\alpha|_{t=0}$ と表され，図 4(a) では変形挙動とともに変位の大きさをコンターで示している．図より，物体力 $\boldsymbol{f}_i$ により自由端が $-x^2$ 方向に変形し，さらに剛体壁による拘束によって，固定端では特に上下端において圧力が大きな値を示していることが分かる．

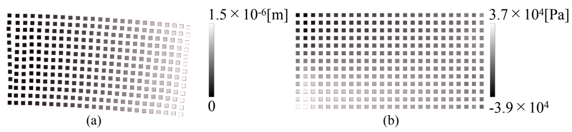

Fig. 4　(a): Distribution of the magnitude of displacement and deformation pattern in $\Omega_{\mathrm{elastic}}$ at $t = t_T$; (b): Distribution of pressure in $\Omega_{\mathrm{elastic}}$ at $t = t_T$.

このような変形を示す系に対して，以下の目的関数によって表される変位最小化問題を考える．

$$F = \sum_{i \in I_s} \int_0^{t_T} (x_i^\alpha(t) - x_i^\alpha|_{t=0})(x_i^\alpha(t) - x_i^\alpha|_{t=0})dt \qquad (34)$$

ただし，I_s は $\Omega_{\mathrm{elastic}}$ に相当する弾性体粒子の集合を表す．この目的関数に対し，随伴変数法を用いて導出した設計感度 (31) と，数値差分によって算出される設計感度を比較し，設計感度の妥当性を検証する．i 番目の粒子における数値差分によって算出される設計感度は以下のように定義される．

$$\frac{dF}{d\chi_i} \approx \frac{F(\chi_i + \Delta\chi_i) - F(\chi_i)}{\Delta\chi_i} \qquad (35)$$

ここで，$\Delta\chi_i = -0.1$ とした．図 5 は，$\Omega_{\mathrm{elastic}}$ における得られた設計感度の分布を示す．(a) は随伴変数法によって得られた設計感度を，(b) は数値差分によって得られた設計感度を示す．また，(c) は $x_i^2 = 0.5$[m] において設計感度の値を随伴変数法と数値差分とで比較したものである．(a),(b) ともに，片持ち梁の固定端の上下端において設計感度の絶対値が周辺に比べて大きい．この領域は，上述の通り圧力が大きな領域であり，χ_i が減少し，空洞領域となった場合に大きな変形が見込まれ，目的関数が大きく悪化することから，設計感度が負の値で，その絶対値が大きくなっていると思われる．また (c) より，設計感度は $\Omega_{\mathrm{elastic}}$ の広い範囲において，随伴変数法により算出された値と数値差分とでほぼ等しいことが分かるが，固定端近傍では差異が見られる．これは，随伴方程式の形式と壁面境界条件の不整合により，得られた随伴場に誤差が含まれているためだと思われる．4.1 節で述べた壁面境界条件を表す式 (33) は，剛体壁領域と弾性体領域の接する境界における力の釣り合い条件に相当するが，これは状態場の支配方程式を前提に導出されている[10]．一方，随伴方程式 (27) は，カーネル関数の位置に関する 2 階微分を右辺に含む等，状態場の方程式と全く異なる表式を有しており，式 (32),(33) による固定端の表現が不十分である可能性がある．これに加えて，固定端近傍では圧力に代表される状態場が特異的な振る舞いを示すことから，数値誤差が生じやすいと考えられる．随伴方程式の求解におけるこれらの取り扱いについては，今後の検討課題である．

以上より，随伴変数法によって得られた設計感度には固定端近傍を中心に差異が見られるものの，それ以外の領域では数値差分で得られた設計感度とほぼ一致しており，SPH 法を用いたトポロジー最適化において有用であると考えられる．

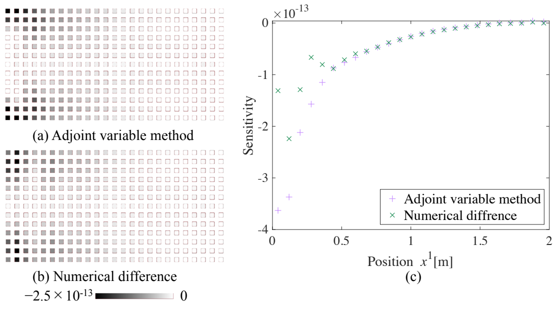

Fig. 5　Distribution of design sensitivity in $\Omega_{\mathrm{elastic}}$: (a) adjoint variable method; (b) numerical differences; (c)1-D plot along $x_i^2 = 0.5$[m].

6. 結言

本研究では，動弾性問題を対象に SPH 法を用いたトポロジー最適化における随伴変数法に基づく設計感度の導出を行った．まず，材料分布の表現のために，SPH 法により離散化された支配方程式に特性関数を導入した．この定式化に基づき動弾性解析を行った結果，通常の SPH 解析と同様の時間応答が得られ，提案手法の妥当性が確認できた．次に，離散化された支配方程式に基づきラグランジアンを定式化し随伴変数法に基づく感度解析を行った．片持ち梁の変位最小化問題を対象に設計感度の算出を行ったところ，随伴変数法により得られた設計感度は，物理的な直感と整合性の取れる分布を示しており，数値差分により得られた設計感度とも分布の傾向が類似していたため，その妥当性が確認できた．

参考文献

(1) Gingold, R. A., Monaghan, J. J.: Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **181**(1977), pp. 375–389.

(2) Liu, M. B., Liu, G. R.: Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments, Archives of Computational Methods in Engineering, **17**(2010), pp. 25–76.

(3) Bendsøe, M.P., Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **71**(2)(1988), pp. 197–224.

(4) Lin, J., Guan, Y., Zhao, G., Naceur, H., Lu, P.: Topology optimization of plane structures using smoothed particle hydrodynamics method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **110**(2017), pp. 726–744.

(5) Sasaki, Y., Sato, Y., Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S.: Topology optimization for fluid flows using the MPS method incorporating the level set method, Computers and Fluids, **188**(2019), pp. 86–101.

(6) Yamada, T., Manabe, M., Izui, K., Nishiwaki, S.: A Topology Optimization Method for Geometrically Nonlinear Problems Incorporating Level Set Boundary Expressions and a Particle Method, Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, **7**(2013), pp. 630–643.

(7) Gray, J.P., Monaghan, J.J., Swift, R.P.: SPH elastic dynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **190**(2001), pp. 6641–6662.

(8) 後藤仁志：粒子法 連続体・混相流・粒状体のための計算科学，(2018)，森北出版．

(9) Bendsøe, M.P., Sigmund, O.: Material interpolation schemes in topology optimization, Archive of Applied Mechanics, **69**(9)(1999), pp. 635–654.

(10) Adami, S., Hu, X.Y., Adams, N.A.: A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics, Journal of Computational Physics, **231**(2012), pp. 7057—7075.

(11) Zhan, L., Peng, C., Zhang, B., Wu, W.: Three-dimensional modeling of granular flow impact on rigid and deformable structures, Computers and Geotechnics, **112**(2019), pp. 257–271.