ゲル膜のリンクル解析に及ぼす軟質基盤厚さの影響

EFFECT OF SOFT SUBSTRATE THICKNESS ON WRINKLE ANALYSIS OF A GEL FILM

三好 宏明¹⁾, 奥村 大²⁾

Hiroaki MIYOSHI and Dai OKUMURA

1) 名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区, E-mail: miyoshi.hiroaki@b.mbox.nagoya-u.ac.jp)

2) 名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603名古屋市千種区, E-mail: dai.okumura@mae.nagoya-u.ac.jp)

In this study, we investigate the effect of soft substrate thickness on wrinkle analysis of a gel film. The film is assumed to be bonded on a soft substrate, which in turn is bonded on a rigid support. Finite element analysis is performed using the Flory–Rehner model for polymeric gels. The thickness ratio of the substrate to the gel film is parameterized. Buckling and postbuckling are analyzed using a step-by-step eigenvalue buckling procedure. Buckling analysis provides sinusoidal wrinkles and its dominant wavelength, which are in good agreements with the predictions by the von Karman elastic nonlinear plate theory. The sinusoidal wrinkles consist of in-plane and out-of-plane deformations. The in-plane contribution increases rapidly as the thickness ratio is smaller than about 5. Postbuckling analysis demonstrates that the increase of the in-plane contribution causes surface creasing of the film.

Key Words: Wrinkles, Swelling, Buckling, Finite element analysis, Gels, Thin film

1. 緒 言

軟質基盤上の硬質膜に面内圧縮応力が作用すると膜表面 にはリンクルと呼ばれるしわが生じる⁽¹⁾⁻⁽³⁾.この現象は面内 圧縮応力を駆動力とする分岐座屈現象として知られている. 近年では、ゲル膜を用いた実験が盛んに行われており、リン クルによって、ディンプルやラビリンス、ヘリンボンといっ た多様な三次元パターンが形成され⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾、膜の自己接触を伴 うクリースやフォールディングへの発達についても報告さ れている^{(7),(8)}.軟質基盤上の硬質膜という二層構造は、自然 界だけでなく工業的にも頻出する基本構造であるから、この ような表面不安定現象の機構や影響因子を理解することは 重要である.

リンクルの発生や優先波長は、板の大たわみ理論を用いて 解析される^{(1),(2)}. 簡単のため、膜厚に対して軟質基盤は無限 に厚いことを想定することが多い.しかしながら,Huangら ⁽³⁾は軟質基盤が剛体基盤に接着されていると仮定し、軟質基 盤厚さの影響を調べたところ、軟質基盤が薄くなるに従って、 剛体基盤の効果が強く表れるようになり、リンクルの座屈応 力や優先波長、振幅に顕著に影響することを示している⁽³⁾. このような研究は、リンクルの波形を仮定し、解析的に行わ れる点において優れている⁽⁹⁾.しかし、線形弾性体を仮定し ており、パターンの発達や分化を追跡することもできないな ど制約も多い. ゲル材料のための自由エネルギー関数として, Flory-Rehnerモデルが良く知られている^{(10),(11)}. Hong ら⁽¹²⁾は この自由エネルギー関数に基づく境界値問題が圧縮性のあ る超弾性体のための境界値問題と等価であることを示した. したがって,例えば有限要素解析ソフト Abaqus⁽¹³⁾では,超 弾性体用のユーザー材料サブルーチン UHYPER を用いての 実装が可能であり,Okumura ら⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁶⁾はこのサブルーチンを 用いて,円孔ゲル膜に生じる膨潤誘起パターン変態の有限要 素解析を行った.さらには疑似負荷変数を用いた逐次的な座 屈固有値解析の手法も考案しており^{(17),(18)},これらの手法を 組み合わせれば,軟質基盤上のゲル膜に生じる表面不安定問 題に対して,系統的な座屈点の探索と分岐経路の追跡が可能 となる.

そこで本研究では、ゲル膜のリンクル解析に及ぼす軟質基 盤厚さの影響に着目して、有限要素法に基づき座屈・座屈後 解析を行う.2章ではFlory-Rehnerモデル^{(10),(11)}の有限要素解 析ソフトへの実装⁽¹²⁾について述べる.3章では代替的な摂動 負荷パターンを用いた座屈固有値解析の手法^{(17),(18)}について 述べる.4章では解析モデルについて述べる.本研究では二 次元問題として正弦波リンクルを解析する.5章では解析結 果を示す.優先波長の結果はHuangら⁽³⁾の結果とよく一致す ることが示される.さらには、軟質基盤が薄くなるに従って、 剛体基盤の拘束効果によって、リンクルの変形形態は変化し、 座屈後にはクリースへの発達が容易になることが明らかに される.最後に6章では結言を述べる.

²⁰¹⁹年9月11日受付, 2019年10月19日受理

2. Flory-Rehner モデルの実装

この章では、Flory-Rehner モデルの有限要素解析ソフトへの実装方法⁽¹²⁾について概略を述べる.

はじめに, Flory–Rehnerモデルの自由エネルギー関数Wは, 高分子の弾性ひずみエネルギーと高分子と溶媒分子の混合 エネルギーの和として,次のように表される.

$$W = \frac{E_{\rm d}}{6} (I - 3 - 2\log J) - \frac{kT}{\nu} \left[\nu C \log \left(1 + \frac{1}{\nu C} \right) + \frac{\chi}{1 + \nu C} \right]$$
(1)

ここで、 E_d は高分子の溶媒分子を含まない、すなわち乾燥状態のヤング率と見なされる.また、k, Tはボルツマン定数、絶対温度であり、 v, C, χ はそれぞれ溶媒1分子当たりの体積、ゲル材料中での溶媒分子の濃度、高分子と溶媒の相互作用係数である.また、 $I \ge J$ は変形勾配 F_{ij} の不変量 $I = F_{ij}F_{ij} \ge J = \varepsilon_{ijk} F_{i1} F_{j2} F_{k3}$ である(ε_{ijk} は交代記号を表す).この自由エネルギー関数Wは、ゲル材料の力学挙動に対する基礎を与えることが知られており^{(10),(11)}、変形勾配 $F_{ij} \ge$ 溶媒の濃度Cの関数として表される.

外部溶媒分子の化学ポテンシャルをµとするとき、ゲル内 部の溶媒分子の化学ポテンシャルとのつり合いは、

$$\mu = \frac{\partial W}{\partial C} \tag{2}$$

と表される.したがって、ルジャンドル変換によって、変形 勾配 F_{ij} と溶媒濃度 Cの関数である Wは、 F_{ij} と μ の関数 \hat{W} に 変換される.

$$\hat{W} = W - \mu C \tag{3}$$

式(1)に仮想仕事の原理を適用すると、外部仮想仕事には、 一般的な物体力項と表面力項だけでなく、 $C \ge \mu$ で構成され る追加項が現れる.しかし、式(3)の変換形式を自由エネルギ 一関数として用いると、 μ の値を状態変数とする一般的な仮 想仕事の原理式となる⁽¹²⁾.したがって、式(1)と(2)より、乾 燥状態(C = 0)では $\mu = -\infty$ となり、膨潤平衡状態では $\mu = 0$ であるから^{(10),(11)}、 μ の値を0まで増加させることによって、 膨潤過程は再現される^{(12),(15)}.

高分子と溶媒分子の非圧縮性を仮定するとき、ゲルの体積 は乾燥状態の高分子と吸収している溶媒分子の体積の和と して次のように表される⁽¹⁰⁾⁻⁽¹²⁾.

$$1 + \upsilon C = J \tag{4}$$

したがって, *J* は体積膨潤比である.式(1)と(3),(4)を用いる と, Flory–Rehner モデルの自由エネルギー関数は,次のよう に書き換えられる.

$$\hat{W} = \frac{E_d}{6} (I - 3 - 2\log J) - \frac{kT}{\upsilon} \left[(J - 1)\log \frac{J}{J - 1} + \frac{\chi}{J} \right] - \frac{\mu}{\upsilon} (J - 1)$$
(5)

上式は、変形勾配 F_{ij}と化学ポテンシャルμの関数として陽な 形式を取っており、溶媒吸収による体積変化を含んでいるた め、圧縮性のある超弾性体のための自由エネルギー関数と同 じ形式となる.本研究では、有限要素解析ソフト Abaqus⁽¹³⁾ で解析することを考え、式(5)を超弾性体用のユーザーサブル ーチン UHYPER に実装する.

3. 座屈固有值解析

2章に述べたように、膨潤過程は化学ポテンシャルの増加 によって再現される.しかし、このような追加された状態変 数を負荷パラメータとして、座屈固有値解析を実行するため の枠組みは、一般的な有限要素解析ソフトでは提供されてい ない(例えば Abaqus では BUCKLE オプション⁽¹³⁾).そこで、 この章では、代替的な摂動負荷を用いた座屈固有値解析の手 法について述べる^{(17),(18)}.

座屈固有値解析では,座屈点及び座屈モードを評価するため,次の有限要素方程式が解析される.

$$\{\mathbf{K}_{0}(P) + \kappa_{i}\mathbf{K}_{\Lambda}(P,Q)\}\boldsymbol{\varphi}_{i} = \mathbf{0}$$
(6)

ここで、 K_0 は基準状態での剛性マトリックスであり、予負 荷 Pの影響を含むことができる.一方、 K_{Δ} は摂動負荷 Qを 用いた線形摂動解析によって求められる剛性マトリックス であり、基準状態に基づくため予負荷 Pの影響を受けるが、 予負荷 P と摂動負荷 Q は同じである必要はない.また、 κ_i と φ_i は固有値と固有ベクトル(座屈モード)である.なお、 最小固有値に対応する座屈モードが優先的であるため、本研 究では κ_i に対応する φ_i に着目する.

式(6)は、Pに基づく基準状態からの座屈点までの変形を、 Qに基づく線形摂動解によって外挿し、非自明解が生じると きの固有値 κ_1 を探索するために用いられる.したがって、優 先的な座屈モード φ_1 が生じるときの座屈荷重は $P + \kappa_1 Q$ と 表される.もしP = 0であれば、座屈荷重は $\kappa_1 Q$ と表され、 未変形状態を基準として負荷パラメータをQとする古典的 な座屈固有値解析となる.一方、予負荷Pの大きさを調整す ることによって、基準状態として座屈点を探索することがで きれば、このとき $\kappa_1 = 0$ であることから、式(6)は

と書き換えられる. すなわち, Qを伴わず, よく知られているように Det $K_0(P) = 0$ が座屈点の判定条件である.

式(7)を用いる場合には、各増分ステップにおいて、座屈点の判定が必要となる.したがって、式(6)を用いた方が効率的に座屈点を予測することができる.ただし、基準状態から座屈点までの変形を、基準状態での線形摂動解で外挿しており、 外挿区間において、材料もしくは幾何学的に強い非線形性が現れる問題に対しては、予測精度に劣化が生じ得る.

本研究では、膨潤過程における化学ポテンシャルの変化は 予負荷 P として導入できるが、摂動負荷 Q としては導入で きない.したがって、Q に導入するための代替的な摂動負荷 として、温度増加に伴う熱膨張を考える.化学ポテンシャル の増加による体積膨張(膨潤)は、内部応力に依存するため、 温度増加に伴う熱膨張と等価ではない.このため,代替的な 摂動負荷に基づく外挿区間では,この近似要素も予測精度を 低下させることになる.この問題を解決するため,化学ポテ ンシャルを段階的に増加させ,基準状態を変化させながら, 段階的に座屈固有値解析を実施することを考える.最小固有 値が零に近づくにつれて,外挿区間の誤差は解消され,最終 的に式(7)の判定条件に基づく座屈点と座屈モードを評価す ることができる^{(17),(18)}.

4. 解析モデル

2章と3章に述べた手法を組み合わせ、ゲル膜のリンクル 解析に及ぼす軟質基盤厚さの影響を Abaqus を用いて解析す る. Fig.1 は解析対象を示しており、ゲル膜と軟質基盤の二 層構造は、軟質基盤底面で剛体基盤と完全固定され、層間剥 離を生じないとする (Fig.1(a)). 軟質基盤厚さを H、ゲル膜 厚さを h と表す.ゲル膜厚さは膨潤過程において増加するた め、化学ポテンシャルの関数として $h = h(\mu)$ と表す(ただし 均一に増加するのは座屈前の主経路上のみ). 初期値を μ_0 と するとき、 $H/h(\mu_0) = 1 \sim 15$ と変化させて影響を調べる.



Fig.1 Schematic illustrations of wrinkle analysis of a gel film, which is bonded on a soft substrate, which in turn is bonded on a rigid support. (a) initial state at $\mu = \mu_0$, (b) critical state at $\mu = \mu_c$ and (c) sinusoidal wrinkle as critical buckling mode.

予負荷として化学ポテンシャル μ の値を増加させ,段階的 に座屈固有値解析を実施することによって,優先的な座屈点 及び座屈モードを解析する (Fig.1(b),(c)). 簡単のため,二次 元問題を考え,正弦波リンクルを解析する (Fig.1(c)). 優先 的な座屈点は波長に依存するため,周期長さLの値を変化さ せることによって,効率的に解析を実施する.境界条件の段 落にて後述するように,リンクル波形が1波長分だけ生じる ようにLの値を変化させる.なお,波長は実数として連続的 に生じ得るが, $L/h(\mu_0) = 4 \sim 14$ の自然数に制約して変化させ る.したがって,優先波長は離散化された状況で近似的に評 価され,このときの化学ポテンシャルの値を μ_c とする (Fig.1(b),(c)).なお,3章で述べたように,代替的な摂動負 荷として熱膨張を用いる.したがって,座屈固有値解析において,ゲル膜の線膨張係数を0.01と設定し,座屈に必要な温 度増加を固有値と対応付ける.

Fig.2 に解析対象の要素分割を示す. この図は H / h(μ₀) = 15, $L/h(\mu_0) = 10$ の場合である. ゲル膜と軟質基盤は厚さ方向に それぞれ 10 分割と 75 分割している. また, 波長方向には 30 分割している.波長方向については、長さLに対して1波長 が現れる解析モデルであることから,周期長さLの大きさに よらず同じ要素分割数を用いる. 解析対象は二次元問題であ るが(Fig.1),簡単のため三次元ソリッド要素(Abaqus にお ける C3D8RH 要素⁽¹³⁾)を用いて三次元解析する(Fig.2).奥 行方向にも長さ Lを考えるが、3 節点、2 要素で要素分割す る.この結果として、奥行き方向には座屈現象は生じず、二 次元的な正弦波リンクルを解析できる.したがって、解析モ デルの節点数は 5,100, 要素数は 7,998 となる. 境界条件とし て, ゲル膜表面は自由, 軟質基盤底面は変位の拘束, これら を除く全側面には周期境界条件を課し, 巨視的ひずみを拘束 することによって(14)~(18),剛体基盤からの拘束効果を再現す る. なお,軟質基盤厚さ H / h(μ₀) = 15 の要素分割を用い,軟 質基盤底面から一定厚さの領域について,変位を全方向に拘 束することによって、 $H/h(\mu_0) = 1 \sim 15$ の場合を解析する.



Fig.2 Finite element meshes of a representative cell with $H / h(\mu_0) = 15$ and $L / h(\mu_0) = 10$ as an example.

材料定数について, ゲル膜には 2 章で述べた Flory–Rehner モデルを適用する. したがって, 無次元化されたヤング率 $E_d \omega'(3kT)$ と相互作用係数 χ が定数となる. 論文^{(15),(16)}を参考に して $E_d \upsilon'(3kT) = 0.022$, 相互作用係数については, 良溶媒を 想定して $\chi = 0.1$ の値を与える. 化学ポテンシャルの初期値と して, $J(\mu_0) = (1.001)^3$ となる自由膨潤状態を考え, このとき初 期値は $\mu_0/(kT) = -4.70$ と求められる^{(12),(14)-(17)}. 軟質基盤は Neo-Hookean型の超弾性体であるとし,非圧縮性を仮定する. したがって, 材料定数はヤング率 E_s のみとなり, ゲル膜と のヤング率比を $E_d/E_s = 6.54$ とする.

最後に、座屈後解析について、座屈固有値解析によって得られる座屈モード φ_1 は成分の最大値が 1 とスケーリングされている⁽¹³⁾. 座屈後解析を実行するため、初期不整として、 ゲル膜厚さ $h(\mu_0)$ で有次元化し、微係数c = 0.01を乗じた値、 すなわち $c h(\mu_0) \varphi_1$ を初期形状の座標に追加する.

5. 解析結果

Fig.3(a),(b)は座屈点の軟質基盤厚さ依存性を示す. どちら も化学ポテンシャルの関数としてプロットされており, Fig.3(a)はゲル膜の面内圧縮応力の公称値(x_1, x_2 方向にそれ ぞれ S_{11}, S_{22} とする)の変化, Fig.3(b)は体積膨潤比(式(4)) の変化をそれぞれ示している. ゲル膜は面内拘束を受けてお り(4章),体積膨潤比の変化は面外方向のゲル膜厚さの変化 に対応する.すなわち, $J(\mu_0)$ =(1.001)³ ≈ 1 とすれば, $h(\mu) = J(\mu)$ $h(\mu_0)$ と評価できる(ただし主経路上に限る).



Fig.3 Dependence of buckling points on soft substrate thickness. (a) in-plane compressive stress, $(S_{11}+S_{22})\nu/(kT)$, and (b) volume swelling ratio, J, as a function of chemical potential, μ .

Fig.3 は、座屈前の主経路上において、軟質基盤厚さの変化によって、ゲル膜に生じる面内圧縮応力や体積膨潤比(すなわちゲル膜厚さ)には影響は生じず、座屈点にはその影響が顕著に現れることを示しており、解析モデルは妥当であるといえる。座屈点は、 $H/h(\mu_0) = 8, 10, 15$ の場合にはほとんど同じ点となるが、これより小さくなるに従って、座屈の発生には追加の膨潤が必要となり、座屈点は遅くなる。とりわけ、 $H/h(\mu_0) = 1$ の場合に顕著な影響を示す。これらの結果は、剛体基盤による拘束効果は軟質基盤厚さが $H/h(\mu_0) = 8$ 以上になれば無視できるのに対して、それより小さくなるに従って顕著に現れることを示している。

Fig.4 は,軟質基盤厚さの関数として, $\mu = \mu_c$ で生じる優先 波長をプロットしたものである.軟質基盤厚さ及び優先波長 をゲル膜厚さで無次元化するとき,初期値 $h(\mu_0)$ と座屈点で の値 $h(\mu_c)$ を用いることができる.図中では,Huang ら⁽³⁾の板 の大たわみ理論に基づく理論解析の結果も示されている.ど の結果も優先波長に対して,軟質基盤が十分に厚い場合には 一定であるのに対して,薄くなるに従って急激に短くなるこ とを予測している.さらに,この図は,ゲル膜の厚さとして, 初期値,すなわち公称値ではなく座屈点の値を用いれば,解 析解との良い一致が得られることを示している.若干のずれ は,4章で述べたように, $L/h(\mu_0)$ を自然数化して解析を行 っていることによると考えられ,本研究における数値解析の 妥当性を示しているといえる⁽¹⁹⁾.なお,Fig.3(b)よりゲル膜 の厚さは座屈点において,軟質基盤厚さに依存して1.3~1.7 倍程度増加していることがわかる.



Fig.4 Comparison of critical wavelength, $L_c / h(\mu_i)$, as a function of soft substrate thickness, $H / h(\mu_i)$. Here $h(\mu_i)$ is estimated using μ_0 or μ_c in finite element analysis.



Fig.5 Sinusoidal wrinkles expressed as critical buckling modes.

Fig.5 には優先波長の座屈モード, すなわち正弦波リンク ルの座屈モードを示す. 図中の半透明な部分は, 軟質基盤厚 さを変更するため節点の変位を拘束した領域を表している. 座屈モードの面外成分**q**_{1,3} でコンター図は描かれており, 軟 質基盤厚さが大きい場合には, ゲル膜の座屈が軟質基盤内に も影響を及ぼしているのに対して, 薄くなるに従ってその影 響は抑制されていることがわかる.

さらに詳細な検討のため、Fig.6 には座屈モードのゲル膜 表面でのプロファイルを正規化してプロットしている.この 図が示すように、ゲル膜表面での座屈モードは、面外成分が cos 関数, 面内成分が sin 関数に従っており, この特徴には軟 質基盤厚さの影響は表れないことがわかる.一方, Fig.7 に は正規化に用いた面外及び面内成分の最大値の比をプロッ トしており、軟質基盤厚さが十分に厚くなれば、この比は 0.04 程度の比較的小さな一定値を示すのに対して、薄くなる に従って、面内成分が急激に増加することがわかる.この知 見を基にして Fig.5 の正弦波リンクルの形状を比較する. リ ンクルモードの中央部をくぼみとして考えるとき, $H/h(\mu_0)$ =1の場合において、くぼみの幅がほかの場合と比較して狭 くなっていることがわかる.この現象は、軟質基盤厚さの減 少に伴う. 剛体基盤効果と見なすことができ、本研究におい てソリッド要素を用いて解析することによって得られた成 果である (cf. 文献(1)~(3),(9)).



Fig.6 Profiles of buckling modes on gel film surface; (a) out-of-plane component and (b) in-plane component.

Fig.8 と Fig.9 は座屈後解析の結果を示す. Fig.8 の面内圧縮 応力の変化は,座屈モードを初期不整として座屈後解析を行った結果として、座屈点のすこし前からの分岐経路への誘導 に成功していることを示す.ここで, $H/h(\mu_0) = 1$ の応答は, その他の応答と比較して応力軟化を示しており特徴的である.また,この場合に限り,途中で自動増分が急激に小さく なり,増分解析が事実上進まなくなり,膨潤平衡状態 ($\mu = 0$)まで解析することはできなかった.



Fig.7 Ratio of in-plane component to out-of-component using maximum values.



Fig.8 Relations of in-plane compressive stress and chemical potential in postbuckling analysis.



Fig.9 Deformed configurations at $\mu/(kT) = -0.1$ for $H/h(\mu_0) = 1$, 2, 3, 5, 10 in postbuckling analysis.

Fig.9 は, $\mu/(kT) = -0.1$ での変形状態を示しており, $H/h(\mu_0)$ = 1の場合を除けば,化学ポテンシャルの増加,すなわち膨 潤の進行に伴って,正弦波リンクル形状が単純に発達してい ることがわかる.一方, $H/h(\mu_0) = 1$ の場合には,正弦波リ ンクルの中央部分は V 字型の特徴的な形状となり,ゲル膜表 面の自己接触を伴うクリース⁽⁷⁾が発生している.クリースの 発生によって,Fig.8 の面内応力には軟化現象が現れたと対 応付けられ,この接触問題が増分計算を不安定にさせる原因 になることがわかった.このような現象は,先行研究⁽¹⁴⁾でも 観察されており,人工粘性を導入するなど増分計算安定化の 工夫が必要であることが知られている⁽¹⁵⁾.なお,リンクルか らのクリースの発生は,実験でも観察されており,本研究で は軟質基盤厚さに依存して生じ得ることを示した.また,こ のような現象の解析はゲル膜の単層構造に対して先駆的に 行われてきた^{(20),(21)}.

6. 結 言

本研究では、ゲル膜のリンクル解析に及ぼす軟質基盤厚さ の影響に着目して座屈・座屈後解析を行い、以下のことがわ かった.まず、軟質基盤が薄くなるに従って、剛体基盤の拘 束効果が顕著に表れ、座屈点は遅くなり(Fig.3)、正弦波リ ンクルの波長は短くなる (Fig.4). ここまでの結果は Huang ら⁽³⁾の理論解析の結果と整合しており、解析モデルの妥当性 を示している. さらに本研究では、座屈モードを詳細に解析 することによって,正弦波リンクルモードのゲル膜表面での プロファイルは、単純な三角関数で表され(Fig.6)、軟質基 盤が薄くなるに従って,座屈モードには面内成分が強く表れ るようになることがわかった (Fig.7). すなわち, 座屈モー ドは中央のくぼみ部に面内変形が集中するような特徴が現 れる (Fig.5). この結果として,座屈後解析では, $H/h(\mu_0)$ = 1 の場合について、応力軟化が生じ(Fig.8)、ゲル膜表面の 自己接触を伴い、くぼみの中心部にクリースが形成される (Fig.9). したがって、クリースの発生は、剛体基盤効果が 強く表れる場合に誘起され易いことがわかった. このような 知見の集積によって,実際には三次元的に生じるリンクルや クリースといった表面不安定現象の理解は深化し、応用に発 展することが期待される.

謝 辞

本研究はJSPS 科研費 JP19H00739の助成を受けて行われた. ここに記して謝意を表する.

参考文献

- E. Cerda, L. Mahadevan: Geometry and physics of wrinkling, Physical Review Letters, **90**(2003), No.074302.
- (2) X. Chen, J.W. Hutchinson: Herringbone buckling patterns of compressed thin films on compliant substrates, Journal of Applied Mechanics, 71(2004), pp.597–603.
- (3) Z.Y. Huang, W. Hong, Z. Suo: Nonlinear analyses of wrinkles in a film bonded to a compliant substrate, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 53(2005), pp.2101–2118.
- (4) D. Breid, A.J. Crosby: Surface wrinkling behavior of finite circular plates, Soft Matter, 5(2009), pp.425–431.
- (5) D. Breid, A.J. Crosby: Effect of stress state on wrinkle morphology, Soft Matter, 7(2011), pp.4490–4496.
- (6) M. Guvendiren, S. Yang, J.A. Burdick: Swelling-induced surface patterns in hydrogels with gradient crosslinking density, Advanced Functional Materials, 19(2009), pp.3038–3045.

- (7) M. Diab, T. Zhang, R. Zhao, H. Gao, K.S., Kim: Ruga mechanics of creasing: from instantaneous to setback creases, Proceedings of the Royal Society A, 469(2013), No.20120753.
- (8) R. Al-Rashed, F.L. Jimenez, J. Martthelot, P.M. Reis: Buckling patterns in biaxially pre-stretched bilayer shells: wrinkles, creases, folds and fracture-like ridges, Soft Matter, 13(2017), pp.7969–7978.
- (9) S. Cai, D. Breid, A.J. Crosby, Z. Suo, J.W. Hutchinson: Periodic patterns and energy states of buckled films on compliant substrates, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **59**(2011), pp.1094–1114.
- (10) P.J. Flory: Principles of Polymer Chemistry, 1953, Cornell University Press, NY.
- (11) L.R.G. Treloar: The Physics of Rubber Elasticity, 1975, Oxford University Press, Oxford.
- (12) W. Hong, Z.S. Liu, Z. Suo: Inhomogeneous swelling of a gel in equilibrium with a solvent and mechanical load, International Journal of Solids and Structures, 46(2009), pp.3282–3289.
- (13) Abaqus 6.14 User Documentation, 2014, Dassault Systems SIMULIA Coorporation.
- (14) D. Okumura, T. Kuwayama, N. Ohno: Effect of geometrical imperfections on swelling-induced buckling patterns in gel films with a square lattice of holes, International Journal of Solids and Structures, **51**(2014), pp.154–163.
- (15) D. Okumura, T. Inagaki, N. Ohno: Effect of prestrains on swelling-induced buckling patterns in gel films with a square lattice of holes, International Journal of Solids and Structures, 58(2015), pp.288–300.
- (16) D. Okumura, A. Sasaki, N. Ohno: Swelling-induced buckling patterns in gel films with a square lattice of holes subjected to in-plane uniaxial and biaxial pretensions, Advanced Structured Materials, 64(2015), pp.319–334.
- (17) 奥村大,春日井彰志: ポーラスゲル膜に生じる膨潤誘起 パターン変態の座屈固有値解析,日本計算工学会論文集, 2016(2016), No.20160020.
- (18) D. Okumura, J. Sugiura, H. Tanaka, Y. Shibutani: Buckling and postbuckling of etching-induced wiggling in a bilayer structure with intrinsic compressive stress, International Journal of Mechanical Sciences, 141(2018), pp.78–88.
- (19) S.D. DuPont Jr., R.S. Cates, P.G. Stroot, R. Toomey: Swelling-induced instabilities in microscale, surface-confined poly(*N*-isopropylacryamide) hydrogels, Soft Matter, 6(2010), pp.3876–3882.
- (20) K. Sekimoto, K. Kawasaki: Elastic instability of gels upon swelling, Journal of the Physical Society of Japan, 56(1987), pp.2997–3000.
- (21) A. Onuki: Theory of pattern formation in gels: Surface folding in highly compressible elastic bodies, Physical Review A39(1989), pp.5932–5948.