等熱流束条件に対する温度場拡張型埋め込み境界–格子ボルツマン法

A THERMAL IMMERSED BOUNDARY–LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR ISO-HEAT-FLUX CONDITION USING AN EXTENDED TEMPERATURE FIELD

仁科　柊[1)]，鈴木　康祐[2)]，吉野　正人[3)]

Shu NISHINA, Kosuke SUZUKI and Masato YOSHINO

1) 信州大学大学院 総合理工学研究科 工学専攻　(〒 380-8553　長野市若里 4-17-1,　E-mail: 19w4047k@shinshu-u.ac.jp)
2) 信州大学学術研究院 工学系　(〒 380-8553　長野市若里 4-17-1,　E-mail: kosuzuki@shinshu-u.ac.jp)
3) 信州大学学術研究院 工学系　(〒 380-8553　長野市若里 4-17-1,　E-mail: masato@shinshu-u.ac.jp)

We propose a thermal immersed boundary–lattice Boltzmann method for the iso-heat-flux condition using an extended temperature field. Although our previous method [Suzuki et al., Int. J. Heat Mass Transfer, **121** (2018), pp.1099–1117] can accurately compute the temperature field for the iso-heat-flux condition by using a physically appropriate heat flux on the boundary, the resultant temperature gradient on the boundary has a large error. In the present method, in order to reduce the error of the temperature gradient on the boundary, ghost points are set inside the boundary, and the desired temperatures at the boundary point and these ghost points are enforced by applying appropriate values of heat source/sink to these points. We validate the present method through many benchmark problems including stationary and moving boundaries, and we find that the present results have good agreement with other numerical results and the exact solution of the temperature field and that the present method can reduce the error of the temperature gradient on the boundary.

Key Words: Immersed Boundary Method, Lattice Boltzmann Method, Neumann Condition

1. はじめに

近年，熱流体解析の数値計算手法の一つとして，格子ボルツマン法 [1–3]（以下，LBM）が注目されている．LBM は，アルゴリズムが簡潔で，並列計算に適していることが特長であり，これまでに多孔質内流れなどの，複雑な境界をもつ熱流動に適用され成功を収めている．しかし，LBM は空間を一様に格子分割しているので，多孔質などの複雑な境界を LBM で表現する際には階段状に近似することが多く，境界を正確に捉えることができるとは言い難い．それに対し，デカルト格子上でも任意形状の境界を簡単に扱える手法として，熱を考慮した埋め込み境界法 [4,5]（以下，熱 IBM）が注目されている．熱 IBM の特徴として，複雑なメッシュ生成がなく，アルゴリズムが簡潔であることが挙げられる．そこで，両者の利点を生かし，組み合わせた計算手法として，熱を考慮した埋め込み境界–格子ボルツマン法（以下，熱 IB–LBM）が，Suzuki ら [6] によって提案されている．熱 IB–LBM は，等温条件や等熱流束条件などの境界条件を複雑な境界に対しても適用できる手法であり，等温条件，等熱流束条件ともに境界上での温度に対して良い結果を示している．しかし，等熱流束条件において，境界上での温度勾配の誤差が大きくなってしまうことが確認されている．

本研究では，境界上での温度勾配の誤差を減らすことにより，等熱流束条件をより強く強制することを検討する．新たに提案する手法は，Suzuki and Inamuro [7] の手法を参考にする．この手法では，流れ場にすべりなし条件を強制する際，境界上の速度勾配の不連続を防ぐために，境界の内部に仮想的な点を設け，境界点および仮想的な点に外力を加えている．この計算方法中の速度と外力をそれぞれ，温度と熱量に置き換えることにより適切な温度勾配を強制できるのではないかと考えられる．

そこで，本研究では，Suzuki and Inamuro [7] と同様に，

2019 年 9 月 10 日受付，2019 年 10 月 24 日受理

境界の内部に仮想的な点（内部点）を定義し，境界点および内部点に適切な熱量を加え，等熱流束条件から与えられる温度勾配を満たすような温度を強制する．さらに，物体内部に仮想的な境界を定義し，超過した熱量をその仮想的な境界から吸熱することにより，等熱流束条件をより強く強制する手法を提案する．また，様々な問題を通してその妥当性を検証する．

2. 計算手法

本研究では，等熱流束条件に対する新しい温度場の計算手法を提案する．流れ場の計算手法および等温条件に対する温度場の計算手法は，Suzuki ら [(6)] の熱 IB–LBM と共通のため，本論文では割愛する．以下に，温度場に対する LBM を説明した後に，本計算手法を説明する．

以下，使用する物理量はすべて，代表長さ $\hat{L}$，粒子の代表速さ $\hat{c}$，時間スケール $\hat{t}_0 = \hat{L}/\hat{U}$（$\hat{U}$: 流れの代表速さ），密度 $\hat{\rho}_{\mathrm{f}}$， 基準温度 $\hat{T}_0$， 定圧比熱 $\hat{c}_{\mathrm{pf}}$ を用いて無次元化したものである．また，$\Delta t, \Delta x$ をそれぞれ，時間刻み，格子間隔とする．ストローハル数 Sh を $Sh = \hat{U}/\hat{c}$ と定義すると，$Sh = \Delta t/\Delta x$ である．

2.1. 温度場に対する LBM

本研究では Suzuki ら [(6)] と同様の 2 次元 9 速度モデルを用いる．この速度モデルの粒子速度を $\boldsymbol{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, 9)$ とする．流体の温度 $T(\boldsymbol{x}, t)$ を表現するために，座標 $\boldsymbol{x}$ および時刻 t における速度 $\boldsymbol{c}_i$ をもつ仮想粒子の速度分布関数 $g_i(\boldsymbol{x}, t)$ を用いる．速度分布関数 $g_i(\boldsymbol{x}, t)$ の時間発展式は次式で与えられる．

$$g_i\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i \Delta x, t + \Delta t\right) = g_i(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{\tau_g}\left[g_i(\boldsymbol{x}, t) - g_i^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x}, t)\right], \quad (1)$$

ここで，τ_g は無次元緩和時間である．なお，局所平衡分布関数 g_i^{eq} は次式のように与えられる [(3)]．

$$g_i^{\mathrm{eq}} = E_i T\left(1 + 3\boldsymbol{c}_i \cdot \boldsymbol{u}\right), \quad (2)$$

ここで，$E_1 = 4/9, E_2 = \cdots = E_5 = 1/9, E_6 = \cdots = E_9 = 1/36$ であり，$T, \boldsymbol{u}$ はそれぞれ温度，流速である．巨視的変数である温度 T は速度分布関数 g_i を用いて次式で求めることができる．

$$T = \sum_{i=1}^{9} g_i. \quad (3)$$

上式は，$O[(\Delta x)^2]$ で温度 T の移流–拡散方程式に帰着し [(3)]，熱流束 $\boldsymbol{h}$，温度伝導係数 α および熱伝導係数 λ はそれぞれ，次式で与えられる．

$$\boldsymbol{h} = \sum_{i=1}^{9} g_i(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}), \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\left(\tau_g - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad \lambda = \frac{1}{3}\tau_g \Delta x, \quad (5)$$

ここで，式 (4) の右辺は $O[(\Delta x)^2]$ で熱流束に帰着することが，漸近展開によって示されている [(3)]．なお，熱量を考慮する場合では，以下のように時間発展する．Q を熱量とすると，

1. 熱量なしで時間発展する．

$$g_i^*\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i \Delta x, t + \Delta t\right) = g_i(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{\tau_g}\left[g_i(\boldsymbol{x}, t) - g_i^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x}, t)\right], \quad (6)$$

2. g_i^* を熱量によって補正する．

$$g_i(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) = g_i^*(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) + \Delta x \frac{\alpha}{\lambda} E_i Q(\boldsymbol{x}, t + \Delta t), \quad (7)$$

ここで，λ/α は単位体積当たりの見かけの熱容量を表す．

2.2. 温度場拡張型埋め込み境界法

等熱流束条件に対する新しい埋め込み境界法として，温度場拡張型埋め込み境界法を提案する．本計算手法は，満たすべき温度勾配から，境界上と内部点における温度を求め，その温度になるように，反復的に求めた熱量を加えた後，超過した熱量を仮想的な境界から吸熱する手法である．なお，内部点が物体内部領域を貫通してしまうほど厚みが薄い場合や，解像度が低いために内部点と境界点を結ぶ線分が交わってしまう場合などには，本計算手法の適用は難しいことに注意されたい．式 (6) から得られた一時的な速度分布関数 $g_i^*(\boldsymbol{x}, t)$ から求められた一時的な温度を $T^*(\boldsymbol{x}, t)$ とする．以下に温度場拡張型埋め込み境界法の計算手順を示す．

はじめに，図 1 に示すように，境界を N 個の境界点に離散化し，任意の境界点の座標を $\boldsymbol{X}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, N)$ と定義する．次に，境界点から境界の外側の法線方向に一格子間隔だけ離れた点を流体点 $\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{f}}$，境界の内側の法線方向に格子間隔ずつ離れた点を内部点 $\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}m}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots, N_{\mathrm{g}})$ として以下のように定義する．

$$\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{f}} = \boldsymbol{X}_k + \Delta x \boldsymbol{n}_k, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}m} = \boldsymbol{X}_k - m\Delta x \boldsymbol{n}_k, \quad (9)$$

ここで，$\boldsymbol{n}_k$ は境界上の外向きの単位法線ベクトルである．境界点上，流体点上，内部点上の一時的な温度 T^* は，それぞれ以下のように内挿される．

$$T^*(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t) = \sum_{\boldsymbol{x}} T^*(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_k)(\Delta x)^2, \quad (10)$$

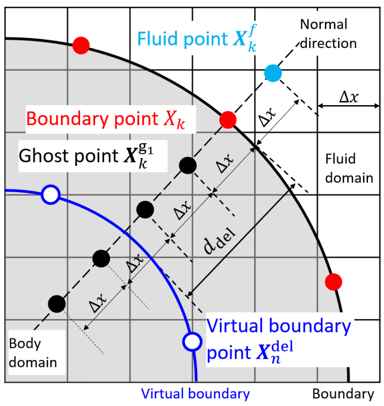

Fig. 1 Definitions of boundary points $\boldsymbol{X}_k$, fluid points $\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{f}}$, ghost points $\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}m}$, and virtual boundary points inside the body domain $\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{del}}$.

$$T^*(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{f}}, t+\Delta t) = \sum_{\boldsymbol{x}} T^*(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_k^{\mathrm{f}})(\Delta x)^2, \tag{11}$$

$$T^*(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t) = \sum_{\boldsymbol{x}} T^*(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m})(\Delta x)^2, \tag{12}$$

ここで，W は重み関数を表し，格子点 $\boldsymbol{x} = (x, y)$ の関数として以下のように表される [8]．

$$W(x, y) = \frac{1}{\Delta x} w\Big(\frac{x}{\Delta x}\Big) \cdot \frac{1}{\Delta x} w\Big(\frac{y}{\Delta x}\Big), \tag{13}$$

また，w は任意の実数 r の関数として以下のように表される [8]．

$$w(r) = \begin{cases} \frac{1}{8}(3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2}), & (|r| \le 1), \\ \frac{1}{8}(5 - 2|r| + \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2}), & (1 \le |r| \le 2), \\ 0, & (2 \le |r|). \end{cases} \tag{14}$$

境界上に強制する熱流束 $H_k^{\mathrm{d}}(t+\Delta t)$ より，法線方向の満たすべき温度勾配 $\partial T/\partial n(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t)$ は以下のように計算される．

$$\frac{\partial T}{\partial n}(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) = -\frac{H_k^{\mathrm{d}}(t+\Delta t)}{\lambda}. \tag{15}$$

求めた満たすべき温度勾配より，境界点上，内部点上での満たすべき温度 T^{d} は，流体点上に内挿された温度 $T^*(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{f}}, t+\Delta t)$ を基準として，それぞれ以下のように計算される．

$$T^{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) = T^*(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{f}}, t+\Delta t) - \frac{\partial T}{\partial n}(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t)\Delta x, \tag{16}$$

$$T^{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t) = T^*(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{f}}, t+\Delta t) - (m+1)\frac{\partial T}{\partial n}(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t)\Delta x. \tag{17}$$

これらの温度を強制するために，以下のように反復計算を行う．

Step 0-1. はじめに反復初期における境界点，内部点での熱量 Q_0 を求める．

$$Q_0(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) = \frac{\lambda}{\alpha} Sh \frac{T^{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) - T^*(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t)}{\Delta t}, \tag{18}$$

$$Q_0(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t) = \frac{\lambda}{\alpha} Sh \frac{T^{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t) - T^*(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t)}{\Delta t}. \tag{19}$$

Step 0-2. 格子点に熱量を分配する．

$$Q_0(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) = \sum_{k=1}^{N} Q_0(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_k)\Delta V_{\mathrm{b}} + \sum_{m=1}^{N_{\mathrm{g}}} \sum_{k=1}^{N} Q_0(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m})\Delta V_{\mathrm{g}_m}, \tag{20}$$

ここで，ΔV_{b} は境界点近傍で熱量を作用させる小さな体積であり，境界面の面積を S_{b} とすると，$S_{\mathrm{b}}/N \times \Delta x$ で表される．内部点でも同様に考え，内部点近傍の微小な領域の体積を ΔV_{g_m} とする．ΔV_{g_m} は，内部点によって作られる面の面積を S_{g_m} とすると，$S_{\mathrm{g}_m}/N \times \Delta x$ で表される．

Step 1. 格子点上の温度を補正する．

$$T_l(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) = T^*(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) + \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\Delta t}{Sh} Q_l(\boldsymbol{x}, t+\Delta t). \tag{21}$$

Step 2. 境界点上，内部点上の温度を内挿する．

$$T_l(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) = \sum_{\boldsymbol{x}} T_l(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_k)(\Delta x)^2, \tag{22}$$

$$T_l(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t) = \sum_{\boldsymbol{x}} T_l(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m})(\Delta x)^2. \tag{23}$$

Step 3. 境界点，内部点での熱量を補正する．

$$Q_{l+1}(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) = Q_l(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) + \frac{\lambda}{\alpha} Sh \frac{T^{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) - T_l(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t)}{\Delta t}, \tag{24}$$

$$Q_{l+1}(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t) = Q_l(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t) + \frac{\lambda}{\alpha} Sh \frac{T^{\mathrm{d}}(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t) - T_l(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t)}{\Delta t}. \tag{25}$$

Step 4. 格子点での熱量を補正する．

$$Q_{l+1}(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) = \sum_{k=1}^{N} Q_{l+1}(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_k)\Delta V_{\mathrm{b}} + \sum_{m=1}^{N_{\mathrm{g}}} \sum_{k=1}^{N} Q_{l+1}(\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m}, t+\Delta t) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}_m})\Delta V_{\mathrm{g}_m}. \tag{26}$$

以下，この **Step 1** から **Step 4** までを反復することによって，残差を減らしていく．

予備計算により反復回数は 5 回，内部点数は 4 点で十分な精度を持っていることが確認できているため，本研究では反復回数は $l = 5$，内部点数は $N_{\mathrm{g}} = 4$ とする．こうして得られた格子点上の熱量により $g_i(\boldsymbol{x}, t+\Delta t)$ を式 (7) により補正する．

しかし，境界点からだけでなく，内部点からも熱量を分配しているため，本来与えられるべき総熱量を超過してしまうことがある．そこで，本計算手法では物体内部の仮想的な境界から吸熱を行い，本来与えられるべき総熱量を超過しないようにする．境界点 $\boldsymbol{X}_k$ から，d_{del} だけ離れた点によって作られる境界を仮想的な境界とし，この境界を N_{del} 個の仮想境界点で離散化し，任意の仮想境界点の座標を $\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{del}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, N_{\mathrm{del}})$ で表す（図 1）．本研究では，d_{del} は以下のように設定する．

$$d_{\mathrm{del}} = \frac{N_{\mathrm{g}} + 1}{2}\Delta x. \tag{27}$$

なお，$N_{\mathrm{g}}=4$ の場合，$d_{\mathrm{del}}=2.5\Delta x$ である．以下に吸熱を行うための計算手順を示す．

反復計算で最終的に求めた格子点での熱量の総和と，本来与えられるべき総熱量の差から，吸熱する熱量 $Q^{*}_{\mathrm{del}}(t+\Delta t)$ を求める．

$$Q^{*}_{\mathrm{del}}(t+\Delta t)=\sum_{k=1}^{N}\frac{S_{\mathrm{b}}}{N}H^{\mathrm{d}}_{k}(t+\Delta t)-\sum_{\boldsymbol{x}}Q(\boldsymbol{x},t+\Delta t). \quad (28)$$

N_{del} 個の仮想境界点 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{del}}_{n}$ に吸熱する熱量 $Q^{*}_{\mathrm{del}}(t+\Delta t)$ を等分配する．

$$Q_{\mathrm{del}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{del}}_{n},t+\Delta t)=\frac{Q^{*}_{\mathrm{del}}(t+\Delta t)}{N_{\mathrm{del}}}, \quad (29)$$

ここで，$Q_{\mathrm{del}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{del}}_{n},t+\Delta t)$ は仮想境界点に等分配した熱量を表す．これらの熱量を格子点に分配する．

$$Q_{\mathrm{del}}(\boldsymbol{x},t+\Delta t)=\sum_{n=1}^{N_{\mathrm{del}}}Q_{\mathrm{del}}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{del}}_{n},t+\Delta t)W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{del}}_{n})(\Delta x)^{2}. \quad (30)$$

こうして得られた熱量によって，速度分布関数を式 (7) でさらに補正する．

3. 妥当性検証

3.1. 一様流中に置かれた静止発熱円柱まわりの熱流動解析

3.1.1. 計算対象および計算条件

はじめに，本計算手法の静止境界問題における妥当性を確認するため，一様流中に置かれた静止発熱円柱まわりの熱流動解析を行う．計算領域は長方形領域 $1360\Delta x\times1200\Delta x$ とする．直径 $D=40\Delta x$ の円柱を $(560\Delta x,600\Delta x)$ にその中心に一致させて配置する．

まず，計算領域の左端（入口）における境界条件として，流れ場に流速 $(u_0,0)$ を与え，温度場には等温条件 [3]（$T=0$）を用いる．右端（出口）における境界条件として，流れ場，温度場ともに，non-reflecting 条件 [9] を用いる．また，上下の境界条件については，流れ場に slip 条件 [1] を，温度場には断熱条件 [3] を用いる．埋め込み境界法により，静止円柱表面にはすべりなし条件と等熱流束条件を与える．

無次元数について，レイノルズ数およびプラントル数を $Re=u_0D/\nu$, $Pr=\nu/\alpha$ と定義する．本計算では，$Pr=0.7$ とし，$Re=10,20,40$ の三つの計算を行う．また，無次元熱流束 $h^{*}=H^{\mathrm{d}}_{k}/(\lambda\Delta T/D)=1$ とする．この際，$u_0=0.04$, $N=164$, $N_{\mathrm{del}}=144$, $\Delta T=1$ と設定する．

3.1.2. 円周上の局所ヌッセルト数

本計算手法の妥当性を定量的に評価するために，円周上の局所ヌッセルト数を，Bharti ら [10]，Wang ら [11] の計算結果と比較する．本計算で用いた局所ヌッセルト数は次式で計算される．

$$Nu(\boldsymbol{X}_{k})=\frac{H^{\mathrm{d}}_{k}D}{\lambda T(\boldsymbol{X}_{k})}. \quad (31)$$

図 2 は円周上の局所ヌッセルト数をプロットした図である．図 2 から，本計算手法が，Suzuki ら [6] の計算結果と同様に，どのレイノルズ数でも，Bharti ら [10]，Wang ら [11] の計算結果とよく一致することがわかる．レイノルズ数の大きい計算において，上流側の局所ヌッセルト数が既往の計算結果に比べて小さくなっているのは，解像度が低いために，薄い温度境界層を表現しきれていないためと考えられる．

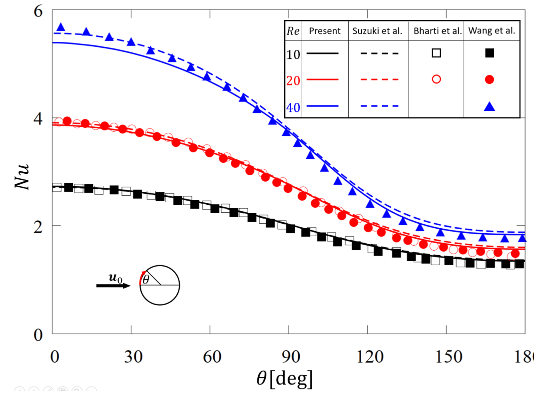

Fig. 2 The present results of the local Nusselt number on the cylinder surface compared with other numerical results by Suzuki et al.[6], Bharti et al.[10], and Wang et al.[11] for thermal flows around an iso-heat-flux circular cylinder.

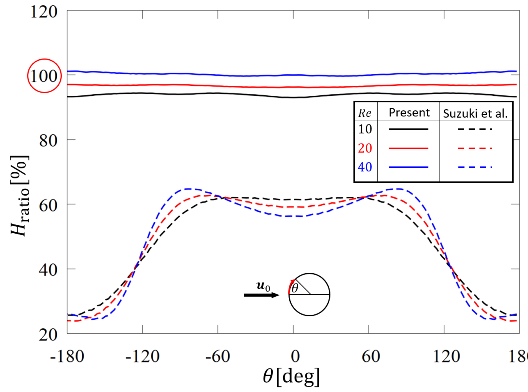

Fig. 3 The present results of the heat flux on the cylinder surface compared with numerical results by Suzuki et al.[6] for thermal flows around an iso-heat-flux circular cylinder.

3.1.3. 円周上の熱流束

円周上での熱流束を本計算手法に対して確認する．図 3 の縦軸は円周上の熱流束と強制する熱流束の比である H_{ratio} を示している．また，縦軸の ◯ は $H_{\mathrm{ratio}}=100[\%]$，つまり強制すべき値を示している．$H_{\mathrm{ratio}}$ は以下のように計算される．

$$H_{\mathrm{ratio}}=\frac{h(\boldsymbol{X}_{k})}{H^{\mathrm{d}}_{k}}\times100[\%], \quad (32)$$

ここで，$h(\boldsymbol{X}_{k})$ は円周上での法線方向の熱流束を表している．図 3 から，本計算手法が，Suzuki ら [6] の計算結果に比べてより正確に熱流束が強制できていることが確認できる．また，H_{ratio} が 100 を超えるもしくは満たない値となる場合も見られるが，解像度を高くすることにより 100 に近づくのではないかと考えられる．

3.2. 一様流中に置かれた振動発熱円柱まわりの熱流動解析

3.2.1. 計算対象および計算条件

次に，本計算手法の移動境界問題における妥当性を確認するため，一様流中に置かれた振動発熱円柱周りの熱流動解析を行う．計算領域は長方形領域 $1024\Delta x\times512\Delta x$ とする．直径

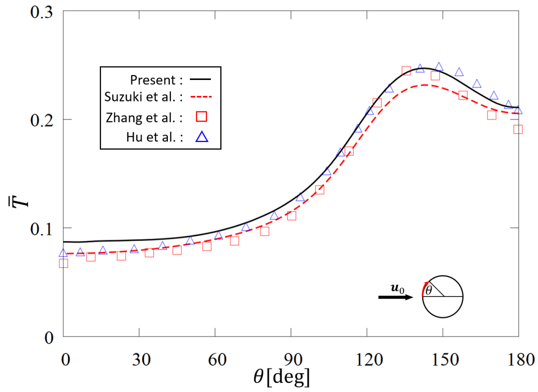

Fig. 4　The present result of the time-averaged temperature on the cylinder surface compared with other numerical results by Suzuki et al.[(6)], Zhang et al.[(12)], and Hu et al.[(13)] for the flow over an oscillating circular cylinder with a constant heat flux.

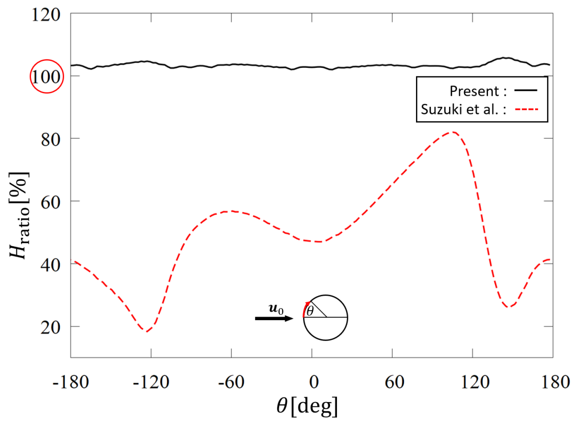

Fig. 5　The present result of the heat flux on the cylinder surface compared with a numerical result by Suzuki et al.[(6)] for the flow over an oscillating circular cylinder with a constant heat flux.

$D = 40\Delta x$ の円柱を初期中心 $(x_{c0}, y_{c0}) = (256\Delta x, 256\Delta x)$ にその中心に一致させて配置する．また，円柱中心位置 (x_c, y_c) は以下のように振動する．

$$x_c(t) = x_{c0}, \quad y_c(t) = y_{c0} + A\sin(2\pi f t), \qquad (33)$$

ここで A は振幅であり，f は振動数を表す．境界条件は 3.1 節と同じとする．

無次元数について，レイノルズ数，プラントル数，Keulegan–Carpenter 数およびストローハル数をそれぞれ，$Re = u_0 D/\nu$, $Pr = \nu/\alpha$, $KC = 2\pi A/D$, $St = fD/u_0$ と定義する．本計算では $Re = 200$, $Pr = 0.7$, $KC = 0.3\pi$, $St = 0.2$ の条件で計算を行う．また，無次元熱流束 $h^* = H_k^{\mathrm{d}}/(\lambda\Delta T/D) = 1$ とする．この際，$u_0 = 0.04$, $N = 164$, $N_{\mathrm{del}} = 144$, $\Delta T = 1$ と設定する．

3.2.2. 円周上の周期平均温度

本計算手法の妥当性を定量的に評価するために，円周上の周期平均温度を Zhang ら [(12)]，Hu ら [(13)] の計算結果と比較する．図 4 は円周上の周期平均温度をプロットしたものである．図 4 から，本計算手法が，Suzuki ら [(6)] の計算結果と同様に，Zhang ら [(12)]，Hu ら [(13)] の結果とよく一致していることがわかる．上流側の周期平均温度が既往の計算結果に比べて大きくなっているのは，3.1.2 節の局所ヌッセルト数に対する考察と同様である．

3.2.3. 円周上の熱流束

円周上での熱流束を本計算手法に対して確認する．図 5 は，50 周期目の円周上の熱流束の値を用いてプロットしたものである．図 5 の縦軸は円周上の熱流束と強制する熱流束の比である H_{ratio} を示している．また，縦軸の ◯ は $H_{\mathrm{ratio}} = 100$[%]，つまり強制すべき値を示している．図 5 から，本計算手法が，Suzuki ら [(6)] の計算結果に比べてより正確に熱流束が強制できていることが確認できる．また，3.1.3 節と同様に，H_{ratio} が 100 を超えるもしくは満たない値となる場合も見られるが，解像度を高くすることにより 100 に近づくのではないかと考えられる．

3.3. テイラー・クエット流れの熱流動解析

3.3.1. 計算対象および計算条件

最後に，本計算手法の精度を調べるために，厳密解のあるテイラー・クエット流れの熱流動解析，誤差評価を行う．内円筒直径 D_0 を $48\Delta x$, $72\Delta x$, $96\Delta x$, $120\Delta x$ と変化させて計算を行う．また，外円筒半径 D_1 を $D_1 = 2D_0$ とする．計算領域は一辺が $D_1 + 4\Delta x$ の正方形領域とする．内円筒には一定の円周方向の速度 u_0 と等熱流束条件 $(h^* = H_k^{\mathrm{d}}/(\lambda\Delta T/D_0) = 1)$ を与え，外円筒には速度 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ と等温条件 $(T_1 = 0)$ を与える．内外円筒を埋め込み境界として扱い，計算領域の境界にはすべて周期境界条件を用いる．また，内外円筒は同心円であり，円の中心を計算領域の中心に一致させる．

無次元数について，レイノルズ数およびプラントル数を $Re = u_0 D_0/\nu$, $Pr = \nu/\alpha$ と定義する．本計算では，$Re = 10$, $Pr = 0.73$ の条件で計算を行う．この際，$\tau_g = 0.8945$, $\Delta T = 1$ と設定する．また，内円筒境界点数 N_0，外円筒境界点数 N_1，および仮想曲面点数 N_{del} は，$D_0 = 48\Delta x$ の場合，$N_0 = 196$, $N_1 = 388$, $N_{\mathrm{del}} = 176$ と設定する．

3.3.2. 数値解と厳密解の比較

図 6 は $D_0 = 48\Delta x, 96\Delta x$ での温度場における数値解と厳密解との比較と，円周上での熱流束について Suzuki ら [(6)] の計算結果との比較を示す．図 6 の縦軸は，温度および円周上の熱流束と強制する熱流束の比である H_{ratio} を示している．また，横軸の R_0 は，$R_0 = D_0/2$ である．この図より温度場に対して，本計算手法が，どちらの解像度においてもよく厳密解と一致しており，さらに解像度の高い方がより良く厳密解と一致していることがわかる．また，円周上の熱流束についても，本計算手法が，Suzuki ら [(6)] の計算結果と比べてより正確に熱流束を強制できていることが確認でき，さらに解像度の高い方がより正確に熱流束を強制できていることがわかる．

図 7 に，温度場と円周上の熱流束の誤差評価について Suzuki ら [(6)] の計算結果との比較を示す．図中の e_{mean}, e_{max} はそれぞれ平均誤差，最大誤差を表す．この図より，温度場

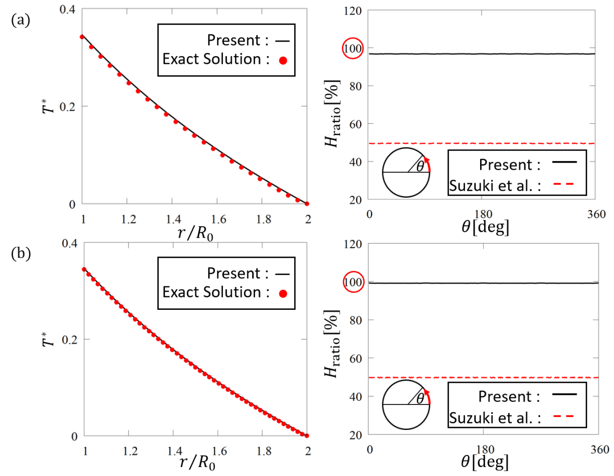

Fig. 6　The present results of the temperature (left) and the heat flux (right) on the cylinder surface compared with the exact solution: (a) $D_0 = 48\Delta x$; (b) $D_0 = 96\Delta x$.

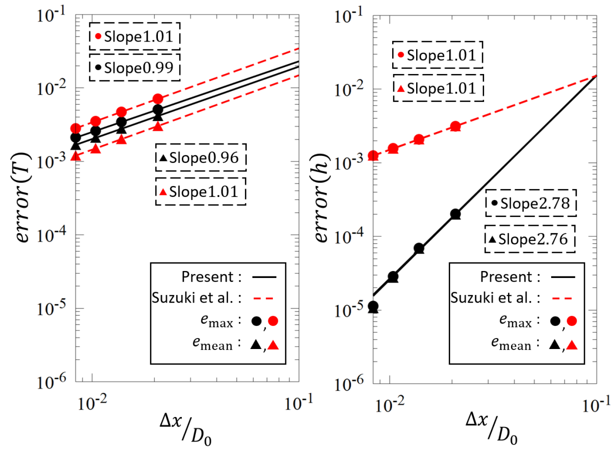

Fig. 7　The present results of the temperature error and the heat flux error on the inner cylinder surface compared with numerical results by Suzuki et al.[6]

に対しては，Suzuki ら [6] の計算結果と同程度の誤差量であることがわかるが，円周上の熱流束に対しては，大きく誤差量が減少していることがわかる．つまり，境界での温度勾配の誤差があまり温度場に対して影響しないことがわかる．また，誤差評価の結果，本計算手法が，最大誤差および平均誤差両方について，温度場に対して 1 次精度，円周上の熱流束に対しては 2 次以上の精度であることがわかる．

4. 結言

本論文では等熱流束条件に対する新しい埋め込み境界法として，温度場拡張型埋め込み境界法を提案した．本計算手法では，境界の内部の仮想的な点を定義し，境界点および仮想的な点に適切な熱量を加え，等熱流束条件から与えられる温度勾配を満たすような温度を強制することにより，等熱流束条件をより強く強制している．

本計算手法は，どの妥当性検証においても，温度場について定量的な一致が確認でき，境界上の熱流束に対しても精度の向上が確認できた．また，誤差評価の結果，本計算手法が温度場の誤差量に対しては Suzuki ら [6] の計算結果と同程度であるが，境界上の熱流束の誤差量に対しては大きく減少することが確認できた．さらに本計算手法が，温度場に対して 1 次精度，境界上の熱流束に対しては 2 次以上の精度であることがわかった．

本研究では円形境界にのみ本計算手法を適用しているので，今後の課題として円形以外の境界への適用が挙げられる．

参考文献

(1) 稲室隆二：格子ボルツマン法 —新しい流体シミュレーション法—，物性研究，**77** (2001), pp.197–232.

(2) T. Inamuro: Lattice Boltzmann methods for viscous fluid flows and for two-phase fluid flows, Fluid Dyn. Res., **38** (2006), pp.641–659.

(3) M. Yoshino and T. Inamuro: Lattice Boltzmann simulations for flow and heat/mass transfer problems in a three-dimensional porous structure, Int. J. Numer. Methods Fluids, **43** (2003), pp.183–198.

(4) Z.L. Wang, J.R. Fan, and K. Luo: Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles, Int. J. Multiphase Flow, **34** (2008), pp.283–302.

(5) Z.L. Wang, J.R. Fan, K. Luo, and K. Cen: Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer, Int. J. Heat Mass Transfer, **52** (2009), pp.4510–4518.

(6) K. Suzuki, T. Kawasaki, N. Furumachi, Y. Tai, and M. Yoshino: A thermal immersed boundary–lattice Boltzmann method for moving-boundary flows with Dirichlet and Neumann conditions, Int. J. Heat Mass Transfer, **121** (2018), pp.1099–1117.

(7) K. Suzuki and T. Inamuro: A higher-order immersed boundary–lattice Boltzman method using a smooth velocity field near boundaries, Comput. Fluids, **76** (2013), pp.105–115.

(8) C.S. Peskin: The immersed boundary method, Acta Numer., **11** (2002), pp.479–517.

(9) I. Orlanski: A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, J. Comput. Phys., **21** (1976), pp.251–269.

(10) R.P. Bharti, R.P. Chhabra, and V. Eswaran: A numerical study of the staedy forced convection heat transfer from an unconfined circular cylinder, Heat Mass Transfer, **43** (2007), pp.639–648.

(11) Y. Wang, C. Shu, and L.M. Yang: Boundary condition-enforced immersed boundary–lattice Boltzmann flux solver for thermal flows with Neumann boundary conditions, J. Comput. Phys., **306** (2016), pp.237–252.

(12) N. Zhang, Z.C. Zheng, and S. Eckels: Study of heat-transfer on the surface of a circular cylinder in flow using an immersed-boundary method, Int. J. Heat Fluid Flow, **29** (2008), pp.1558–1566.

(13) Y. Hu, D.C. Li, S. Shu, and X.D. Niu: An efficient immersed boundary–lattice Boltzmann method for the simulation of thermal flow problems, Commun. Comput. Phys., **20** (2016), pp.1210–1257.