計算数理工学論文集 Vol. 19 (2019 年 12 月)，論文 No. 04-191201 JASCOME

流速時間履歴を規定する非定常自然対流場の形状設計

SHAPE DESIGN OF UNSTEADY NATURAL CONVECTION FIELDS TO CONTROL TIME HISTORY OF FLOW VELOCITY

片峯　英次 [1)]，青木　崇 [2)]

Eiji KATAMINE and Takashi AOKI

1) 岐阜工業高等専門学校 機械工学科 教授　(〒 501-0495　岐阜県本巣市上真桑 2236-2,　E-mail: katamine@gifu-nct.ac.jp)
2) 長岡技術科学大学 修士課程　(〒 940-2188　新潟県長岡市上富岡町 1603-1,　E-mail: s195009@stn.nagaokaut.ac.jp)

This paper presents numerical solution to shape design problems of unsteady natural convection fields to control time history of flow velocity. The square error integral between the actual time history of flow velocity and a target time history of flow velocity on the prescribed sub-domain during the specified period of time is used as the objective functional. Shape gradient of the shape design problem is derived theoretically using the Lagrange multiplier method, adjoint variable method, and the formulae of the material derivative. Reshaping is carried out by the traction method proposed as an approach to solving shape optimization problems. Numerical analyses program for the shape design is developed based on FreeFem++, and the validity of proposed method is confirmed by results of 2D numerical analyses.

Key Words: Inverse Problem, Optimum Design, Computer Aided Design, Finite Element Method, Natural Convection Field, Adjoint Method

1. はじめに

熱対流を伴う機器設計において，性能改善を目的とした機器の形状設計は工学的に重要な課題の一つである．例えば，太陽からの熱エネルギー利用によるソーラータワーと呼ばれる熱対流式発電プラントに対して，本山ら [(1)] は，発電効率向上を目的として，ソーラータワー内のタービン位置での流速が増大するように，ソーラータワー境界形状の設計を実験的に試みている．計算力学が発展した現代工学において，数理設計の観点に基づけば，このような問題は，熱対流場の部分領域において，流速が最大化するように，あるいは流速が目標値となるように，境界形状を決定する自然対流場の形状決定問題として捉えることができる．本研究では，このような非定常自然対流場の形状設計について取り上げ，これらは電子機器・デバイスにおけるヒートシンク等の冷却機器の形状設計に対しても応用が可能であると考えられる．

自然対流場における形状最適化やトポロジー最適化に関する研究を振り返ると，形状最適化では，桃瀬ら [(2)] が，随伴変数法を用いて，自然対流場の部分領域における速度の最大化を設計目標としたときの形状感度解析法を提案しているが，定常問題の解法に限られている．Park ら [(3)] は，随伴変数法を用いて非定常自然対流場の形状同定問題の解析法を提案し，数値解析では，定常問題に対して，境界形状を表現する設計変数を極力少なく制限したパラメトリックな解析法を用いた．Aounallah ら [(4)] は，非定常自然対流場の支配方程式を流れ関数・渦度で表現し，二次元問題の解析に限定した解析法を提案し，Park ら [(3)] と同様に，極力少ない設計変数で滑らかな境界形状を表現することのできる Bezier 曲線を利用して解析を行っている．一方，トポロジー最適化では，随伴変数法を利用して Alexandersen ら [(5)] が幾つかの最適化問題に対する定常解析を行い，Coffin ら [(6)] は指定した領域における平均温度を最小化するための非定常問題の解析を行っている．

これに対して，著者らは領域の境界形状を分布系の設計変数で表現した形状最適化に対して検討してきた．これまでに，定常の強制熱対流場に対して，部分領域における温度分布を規定する形状同定問題 [(7)]，さらに非定常の強制熱対流場 [(8)] や自然対流場 [(9)] に対して，温度分布時間履歴を規定する形状設計問題の拡張を試みてきた．これらの解析では随伴変数法を利用し，また実際の形状最適化手法には力法 [(10)] を用いた．この方法では，まず形状更新のための感度を領域変動に対する分布系感度で評価する．実際の領域変動の解析には，その領域変動の支配方程式を楕円型方程式の一つであり，H^1 空間で定義された線形弾性場の境界値問題に置き

2019 年 9 月 12 日受付，2019 年 10 月 8 日受理

換えて解く方法を用いる．その意味で力法は H^1 勾配法 (11) とも呼ばれる．形状変動を分布系の領域変動によって表現しているために，設計境界を表すための設計変数の数を制限することなくノンパラメトリックな解析が実現でき，また変動した後の境界は滑らかさを保持できることが確認されている (11)．しかしながら，著者らがこれまでに取り扱った熱対流場問題 (8)(9) は，Coffin ら (6) と同様に温度分布に基づく目的汎関数を対象とした温度規定問題であった．

本研究では，流速分布と温度分布が相互に連成しあう非定常自然対流場において，部分領域における流速時間履歴を規定する，あるいは流速分布を最大化する形状設計問題の解法を取り上げる．

本論文では，最初に非定常自然対流場の支配方程式について述べる．その後で，部分領域において実際の流速時間履歴と指定された流速時間履歴の 2 乗誤差積分を最小化する問題 (流速時間履歴規定問題) を定式化し，Lagrange 乗数法あるいは随伴変数法および物質導関数を利用して形状修正の感度となる形状勾配密度関数を導出する．最後に，導出された形状勾配密度関数に基づいて，力法 (10) を適用し，2 次元問題の簡単な解析結果を紹介する．

2．非定常自然対流場の支配方程式

$\mathbb{R}^d(d=2,3)$ の領域 Ω，時間 $[0,T]$ における非定常自然対流場を考える．空間 $\vec{x}\in\Omega$，時間 $t\in[0,T]$ における流速分布 $u_i(\vec{x},t)$，圧力分布 $p(\vec{x},t)$，温度分布 $\theta(\vec{x},t)$ を解析することを考える．非定常自然対流場の支配方程式として，Boussinesq 近似および無次元化された Navier-Stokes 方程式，連続の式，およびエネルギー方程式を考え (12)，それらの支配方程式の弱形式は，任意の試験関数 $w_i(\vec{x},t), q(\vec{x},t), \xi(\vec{x},t)$ を用いて，次のように表すことができる．

$$\int_0^T \Big\{ t^V(u_{,t},w) + a^V(u,w) + b^V(u,u,w) + c(w,p) + f^f(w,\theta) - l(w) \Big\}\, dt = 0 \tag{1}$$

$$\int_0^T \Big\{ c(u,q) \Big\}\, dt = 0 \tag{2}$$

$$\int_0^T \Big\{ t^H(\theta_{,t},\xi) + a^H(\theta,\xi) + b^H(u,\theta,\xi) + f_q^H(\xi) \Big\}\, dt = 0 \tag{3}$$

ただし，各項 $t^V(u_{,t},w)$，$a^V(u,w)$，$b^V(u,u,w)$，$c(w,p)$，$f^f(w,\theta)$，$l(w)$，$t^H(\theta_{,t},\xi)$，$a^H(\theta,\xi)$, $b^H(u,\theta,\xi)$，$f_q^H(\xi)$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
&t^V(u_{,t},w) = \int_\Omega w_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\, dx, \quad a^V(u,w) = \int_\Omega \frac{1}{Gr} w_{i,j} u_{i,j}\, dx,\\
&b^V(v,u,w) = \int_\Omega w_i v_j u_{i,j}\, dx, \quad c(w,p) = -\int_\Omega w_{i,i} p\, dx,\\
&f^f(w,\theta) = \int_\Omega \frac{1}{Gr} w_i e_i \theta\, dx, \quad l(w) = \int_{\Gamma_\sigma} w_i \hat{\sigma}_i\, d\Gamma,\\
&t^H(\theta_{,t},\xi) = \int_\Omega \xi \frac{\partial \theta}{\partial t}\, dx, \quad a^H(\theta,\xi) = \int_\Omega \frac{1}{Ra} \xi_{,i}\theta_{,i}\, dx.\\
&b^H(u,\theta,\xi) = \int_\Omega \xi u_j \theta_{,j}\, dx, \quad f_q^H(\xi) = \int_{\Gamma_q} \xi \hat{q}\, d\Gamma
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，Gr, Ra はグラスホフ数，レイリー数を表し，グラスホフ数 Gr, レイリー数 Ra, プラントル数 Pr の関係 $Ra = Gr\cdot Pr$, さらに，グラスホフ数 Gr とレイノルズ数 Re の関係 $Gr = Re$ を仮定して無次元化している (12)．また $e_1 = e_3 = 0, e_2 = -1$ である．本論文のテンソル表示では Einstein の総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用し，$(\cdot)_{,t}$ は時間の導関数を表わしている．また，領域 Ω の境界 Γ は，流れ場の境界条件に関して基本境界 Γ_u と自然境界 Γ_σ，温度場に関しては基本境界 Γ_θ，熱流束境界 Γ_q によって構成され，その境界条件，初期条件は次のように定義されている．

$$u_i(\vec{x},t) = \hat{u}_i(\vec{x},t), \quad t\in[0,T],\ \vec{x}\in\Gamma_u \tag{5}$$

$$\sigma_i(\vec{x},t) = (-p\delta_{ij} + \frac{1}{Gr}u_{i,j})n_j = \hat{\sigma}_i(\vec{x},t), \quad t\in[0,T],\ \vec{x}\in\Gamma_\sigma \tag{6}$$

$$\theta(\vec{x},t) = \hat{\theta}(\vec{x},t), \quad t\in[0,T],\ \vec{x}\in\Gamma_\theta \tag{7}$$

$$-\frac{1}{Ra}\theta(\vec{x},t)_{,j}n_j = \hat{q}(\vec{x},t), \quad t\in[0,T],\ \vec{x}\in\Gamma_q \tag{8}$$

$$u_i(\vec{x},0) = u_{i_{ini}}(\vec{x}), \quad \vec{x}\in\Omega \tag{9}$$

$$p(\vec{x},0) = p_{ini}(\vec{x}), \quad \vec{x}\in\Omega \tag{10}$$

$$\theta(\vec{x},0) = \theta_{ini}(\vec{x}), \quad \vec{x}\in\Omega \tag{11}$$

ここで，$\hat{q}$ は熱流束，$u_{i_{ini}}$ は初期流速，p_{ini} は初期圧力，θ_{ini} は初期温度を表し，n_j は境界における単位法線ベクトル，$(\hat{\cdot})$ は境界における既知関数を表している．流速 u_i および w_i はそれぞれ式 (12),(15) の関数空間の要素，圧力 p および q は式 (13) の関数空間の要素，温度 θ および ξ はそれぞれ式 (14), (16) の関数空間の要素とする．

$$U = \{u(\vec{x},t)\in H^1(\Omega\times[0,T])\ |\ u_i(\vec{x},t) = \hat{u}_i(\vec{x},t),\ t\in[0,T],\ \vec{x}\in\Gamma_u\} \tag{12}$$

$$Q = \{q(\vec{x},t)\in L^2(\int_\Omega q\, dx = 0\ (\text{if } \Gamma_\sigma = \emptyset)\} \tag{13}$$

$$\Theta = \{\theta(\vec{x},t)\in H^1(\Omega\times[0,T])\ |\ \theta(\vec{x},t) = \hat{\theta}(\vec{x},t),\ t\in[0,T],\ \vec{x}\in\Gamma_\theta,\ -\frac{1}{Ra}\theta(\vec{x},t)_{,j}n_j = \hat{q}(\vec{x},t),\ t\in[0,T],\ \vec{x}\in\Gamma_q\} \tag{14}$$

$$W = \{w_i(\vec{x},t)\in H^1(\Omega\times[0,T])\ |\ w_i(\vec{x},t) = 0,\ t\in[0,T],\ \vec{x}\in\Gamma_u,\ w_i(\vec{x},T) = 0,\ \vec{x}\in\Omega\} \tag{15}$$

$$\Xi = \{\xi(\vec{x},t)\in H^1(\Omega\times[0,T])\ |\ \xi(\vec{x},t) = 0,\ t\in[0,T],\ \vec{x}\in\Gamma_\theta, \quad \xi(\vec{x},T) = 0,\ \vec{x}\in\Omega\} \tag{16}$$

ここで，$H^m(\Omega\times[0,T])$ は m 階の導関数まで領域 $\Omega\times[0,T]$ で 2 乗可積分な関数空間，$L^2(\Omega\times[0,T])$ は有界可積分なスカラー関数空間を表す．

3．部分領域における流速時間履歴規定問題

3.1．問題の定式化

部分領域 $\Omega_D\subset\Omega$ において，時間 $t = t_1\in[0,T]$ から $t = t_2\in[0,T]$ における実流速時間履歴 $u_i(\Omega_D,[t_1,t_2])$ と規

定された流速時間履歴 $u_{Di}(\Omega_D,[t_1,t_2])$ との 2 乗誤差を最小化する問題を定式化する．この自然対流場領域 Ω の領域変動を T_s (s は領域変動の履歴) で定義し，領域 Ω は変動して $\Omega_s=T_s(\Omega)$ になると仮定する．$T_s(\Omega)$ は，領域変動の制約を満たす適当に導関数が連続な許容関数空間 D の要素とする．簡単化のために，領域変動の制約に Ω_D が含まれると仮定する．このとき，時間 $t=t_1$ から $t=t_2$ における流速 2 乗誤差最小化問題は次のように定式化される．

$$\text{Find} \quad \Omega_s \in D \tag{17}$$

$$\text{that minimizes} \quad \int_{t_1}^{t_2} E_{\Omega_D}(u)\,dt \tag{18}$$

$$\text{subject to} \quad \int_0^T \Big\{ t^V(u_{,t},w)+a^V(u,w)+b^V(u,u,w) +c(w,p)+f^f(w,\theta)-l(w)\Big\}\,dt=0 \tag{19}$$

$$\int_0^T \Big\{ c(u,q)\Big\}\,dt=0 \tag{20}$$

$$\int_0^T \Big\{ t^H(\theta_{,t},\xi)+a^H(\theta,\xi)+b^H(u,\theta,\xi) +f_q^H(\xi)\Big\}\,dt=0 \tag{21}$$

ここで，$E_{\Omega_D}(u)$ は流速時間履歴 2 乗誤差を表しており，以下のように定義されている．

$$E_{\Omega_D}(u)=\int_{\Omega_D}(u_i-u_{Di})\cdot(u_i-u_{Di})\ dx \tag{22}$$

3.2. 形状勾配関数

式 (17)〜(21) の問題は，Lagrange 乗数法によって制約のない停留化問題に書き換えることができる．この場合の Lagrange 関数 $L(u_i,p,\theta,w_i,q,\xi)$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} L= &\int_{t_1}^{t_2} E_{\Omega_D}(u)\,dt \\ &-\int_0^T \Big\{ t^V(u_{,t},w)+a^V(u,w)+b^V(u,u,w)+c(w,p) \\ &+f^f(w,\theta)-l(w)\Big\}\,dt-\int_0^T\Big\{c(u,q)\Big\}\,dt \\ &-\int_0^T \Big\{ t^H(\theta_{,t},\xi)+a^H(\theta,\xi)+b^H(u,\theta,\xi)+f_q^H(\xi)\Big\}\,dt \end{aligned} \tag{23}$$

ここで，$w_i \in W$, $q\in Q$, $\xi\in\Xi$ は非定常自然対流場の支配方程式に関する Lagrange 乗数関数（または随伴変数）になっている．

領域変動に対する L の導関数 $\dot{L}$ は速度場 $V_i(\Omega_s)=\partial T_s/\partial s(\Omega)=\partial T_s/\partial s(T_s^{-1}(\Omega_s))$ を用いて，次のように得られる [10]．

$$\begin{aligned} &\dot{L}= \\ &-\int_0^T \Big\{ t^V(u_{,t},w')+a^V(u,w')+b^V(u,u,w')+c(w',p) \\ &\quad +f^f(w',\theta)-l(w')\Big\}\,dt-\int_0^T\Big\{c(u,q')\Big\}\,dt \\ &-\int_0^T \Big\{ t^H(\theta_{,t},\xi')+a^H(\theta,\xi')+b^H(u,\theta,\xi')+f_q^H(\xi')\Big\}\,dt \\ &-\int_0^T \Big\{ t^V(u'_{,t},w)+a^V(u',w)+b^V(u',u,w)+b^V(u,u',w) \\ &\quad +c(u',q)+b^H(u',\theta,\xi)\Big\}\,dt+\int_{t_1}^{t_2} E_{\Omega_D}(u')\,dt \\ &\quad -\int_0^T\Big\{c(w,p')\Big\}\,dt \\ &\quad -\int_0^T \Big\{ f^f(w,\theta')+t^H(\theta'_{,t},\xi)+a^H(\theta',\xi)+b^H(u,\theta',\xi)\Big\}\,dt \\ &\quad +<Gn_i,V_i> \end{aligned} \tag{24}$$

ただし，$(\cdot)'$ は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数を表す．また，

$$<Gn_i,V_i>=\int_\Gamma Gn_i\cdot V_i\,d\Gamma \tag{25}$$

$$\begin{aligned} G=&\int_0^T\{-\frac{1}{Gr}w_{i,j}u_{i,j}-w_{i,i}p-\frac{\partial\theta}{\partial t}\xi-\frac{1}{Ra}\xi_{,i}\theta_{,i} \\ &-\nabla_n(\xi\hat{q})-(\xi\hat{q})\kappa\}\,dt \end{aligned} \tag{26}$$

ただし，$\nabla_n(\cdot)\equiv\nabla(\cdot)\cdot\vec{n}$，$\kappa$ は境界における平均曲率の $d-1$ 倍である．

ここで，u_i,p,θ,w_i,q,ξ は次の最適性の条件

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big\{ t^V(u_{,t},w')+a^V(u,w')+b^V(u,u,w')+c(w',p) \\ &+f^f(w',\theta)-l(w')+c(u,q')\Big\}\,dt=0 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big\{ t^H(\theta_{,t},\xi')+a^H(\theta,\xi')+b^H(u,\theta,\xi') \\ &+f_q^H(\xi')\Big\}\,dt=0 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big\{ -t^V(u',w_{,t})+a^V(u',w)+b^V(u',u,w)+b^V(u,u',w) \\ &+c(u',q)+b^H(u',\theta,\xi)+c(w,p')\Big\}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}E_{\Omega_D}(u')\,dt \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big\{ -t^H(\theta',\xi_{,t})+f^f(w,\theta')+a^H(\theta',\xi) \\ &+b^H(u,\theta',\xi)\Big\}\,dt=0 \end{aligned} \tag{30}$$

によって決定されたとき，Lagrange 汎関数の導関数は評価関数の導関数と一致して，次の関係が成立する．

$$\dot{L}|_{u_i,p,\theta,w_i,q,\xi}=\dot{E}_{\Omega_D}|_{u_i,p,\theta,w_i,q,\xi}=<Gn_i,V_i> \tag{31}$$

式 (25) で与えられる Gn_i は，評価関数の導関数において，領域の微小変動を与える速度場 V_i の係数関数になっていることから，この問題における感度関数あるいは形状勾配関数になっている．また，スカラー関数 G は形状勾配密度関数と呼ばれる．

これらの方程式 (27)〜(30) より u_i,p,θ,w_i,q,ξ を解析して，形状勾配関数が評価できれば，力法を適用することが可能となる．さらに，随伴問題における連続の式を考慮すると，形状勾配密度関数 G は次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} G=&\int_0^T\{-\frac{1}{Gr}w_{i,j}u_{i,j}-\frac{\partial\theta}{\partial t}\xi-\frac{1}{Ra}\xi_{,i}\theta_{,i} \\ &-\nabla_n(\xi\hat{q})-(\xi\hat{q})\kappa\}\,dt \end{aligned} \tag{32}$$

一方，上記の流速時間履歴 2 乗誤差の式 (22) における目標値 u_{Di} をゼロとし，上記の目的汎関数式 (18) を maximizes

$\int_{t_1}^{t_2} E_{\Omega_D}(u)\,dt$ とすれば，部分領域 Ω_D において流速時間履歴を最大化する形状決定問題にも拡張できる．また上記と同様な手法を用いて，この流速時間履歴最大化問題に対応した随伴方程式が導出できる．

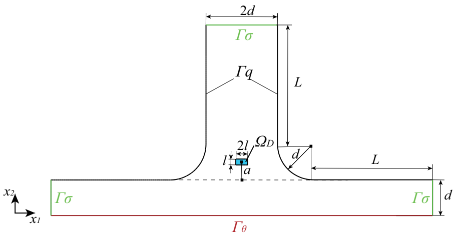


Fig. 1　Solar tower model

4. 解析手順

提案した形状設計解析は，次のステップを繰り返すことによって解析できる．

Step 1. 初期形状を与える．

Step 2. 状態方程式 (27),(28) に基づいて，時間 $t=0$ から $t=T$ の方向へ，流速分布 $u_i(\vec{x},t)$，圧力分布 $p(\vec{x},t)$，温度分布 $\theta(\vec{x},t)$ を解析する．

Step 3. 目的汎関数が停留したと判断されれば解析を終了する．

Step 4. 得られた流速分布 $u_i(\vec{x},t)$, 圧力分布 $p(\vec{x},t)$, 温度分布 $\theta(\vec{x},t)$ を用いて，随伴方程式 (29), (30) に基づいて，時間 $t=T$ から $t=0$ の方向へ，随伴流速分布 $w_i(\vec{x},t)$, 随伴圧力分布 $q(\vec{x},t)$, 随伴温度 $\xi(\vec{x},t)$ を解析する．

Step 5. これらの結果を用いて，式 (32) から形状勾配密度関数 G を計算する．

Step 6. 力法に基づいて形状更新量である速度場 V_i を計算して形状を更新し，**Step.2** に戻る．

5. 解析例

導出した形状勾配密度関数と力法を用いて解析した簡単な二次元問題の数値例を紹介する．数値解析におけるプログラム開発は，FreeFem++ [13] に基づいて行った．

5.1. 流速時間履歴規定問題（ソーラータワーモデル）

流速時間履歴規定の解析モデルとして，図 1 のようなソーラータワーモデルを設定した．本論文のはじめにで述べたように，発電効率向上を目的として，ソーラータワー内のタービン位置での流速を増大させるように境界形状を設計する必要がある [1]．本解析では，タービン位置における流速に対し 50% の性能向上を目指した一つの例として，図 1 のソーラータワー中央部の部分領域 Ω_D において，x_2 方向の流速 u_2 の流速時間履歴が，初期形状における流速時間履歴の 1.5 倍となる境界形状を同定することを目的とした．

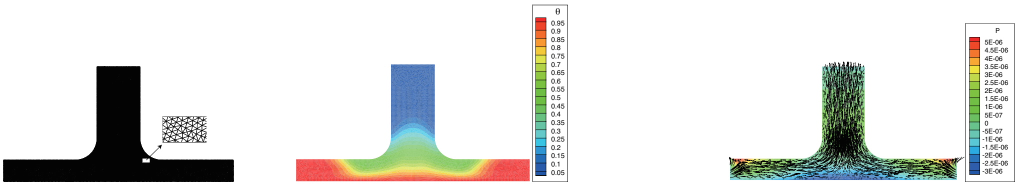
図 1 において，$L=1$, $a=0.15$, $l=0.025$, $d=0.3$ とし，グラスホフ数 $Gr=70000$，レイリー数 $Ra=49000$ として解析を行った．温度場の境界条件は，温度既知境界 Γ_θ において $\theta=1$ とし，Γ_q は断熱境界 $(\hat{q}=0)$ を仮定した．流れ場の境界条件は，Γ_θ, Γ_q をいずれも壁境界 Γ_u として $u_i=0$ とし，自然境界 Γ_σ では $\hat{\sigma}_i$=0 とした．初期条件は，領域全体において $\theta_{ini}=0$，$u_{ini}=0$ とした．過渡的な時間域 $[0,T]$ を想定し， 時間積分は $t_1=0$ から $t_2=T=1600$ を時間刻み $\Delta t=1.6$ で行って，各時刻における圧力 p は平均値が 0 となるよう一意に定めた．断熱境界 Γ_q を設計境界 Γ_{design} とし，他の境界は形状変更の際には完全に拘束した．

図 2 から図 4 に解析結果を示す．図 2 に初期形状のメッシュと最終時刻 $(T=1600)$ における温度分布，流速・圧力分布を示し，図 3 に得られた同定形状のメッシュと最終時刻 $(T=1600)$ における温度分布，流速・圧力分布を示す．メッシュの要素数は 26,104，節点数は 13,393 であり，一部拡大して示している．流速に対しては P2 要素，圧力，温度，形状更新量の解析に対しては P1 要素を用いた．図 4(a) に部分領域 Ω_D の中央における初期形状での流速時間履歴，目標流速時間履歴，同定形状での流速時間履歴の比較を示し，図 4(b) に形状更新の繰り返しに対する目的汎関数の収束履歴を示す．図 3 より，流速規定領域付近の流路を細くして，本山ら [1] が実験によって提案した形状と同様のディフューザ型形状が得られている．図 4(a) より，同定形状の流速時間履歴が目標の流速時間履歴に一致している．その結果として，図 4(b) より，得られた同定形状では初期値を 100 % とした流速分布 2 乗誤差が十分に減少して，ゼロ近傍に収束していることが確認できる．

5.2. 流速最大化問題（ヒートパイプモデル）

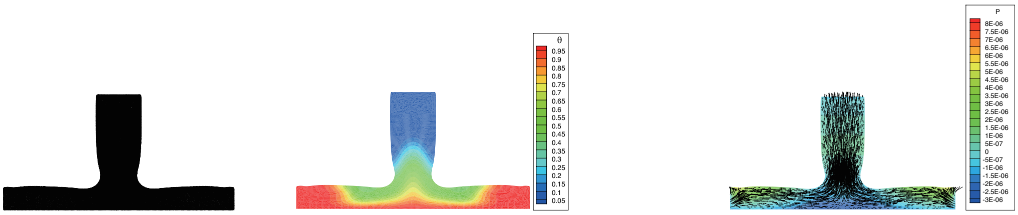
流速最大化問題の解析例として，自然対流場のトポロジー最適化を行っている Alexandersen らと同様の解析モデル [5] を設定した．解析モデルを図 5 に示す．本解析の目的は，図 5 の上部に設定された部分領域 Ω_D において，x_1 方向の流速 u_1 の 2 乗値が最大化する形状を決定することである．図 5 において，$L=1$, $a=0.9$, $l=0.025$, $d=0.2$ とし，グラスホフ数 $Gr=70000$，レイリー数 $Ra=49000$ とした．温度場の境界条件は，温度既知境界 $\Gamma_{\theta H}$ において $\theta=1$，$\Gamma_{\theta L}$ において $\theta=0$ とした．Γ_{q1}, Γ_{q2} は熱流束境界とし，断熱境界 $(\hat{q}=0)$ を仮定した．流れ場の境界条件は，$\Gamma_{\theta H}, \Gamma_{\theta L}, \Gamma_{q1}$, Γ_{q2} をいずれも壁境界 Γ_u として $u_i=0$ とした．初期条件は，領域全体において $\theta_{ini}=0$，$u_{ini}=0$ とした．圧力 p は平均値が 0 となるよう一意に定めた．定常な状態になるまでの時間域 $[0,T]$ を想定し，$t_1=0$ から $t_2=T=24000$ を時間刻み $\Delta t=24$ で行った．断熱境界 Γ_{q2} を設計境界 Γ_{design} とし，他の境界は形状変更の際には完全に拘束した．

図 6 から図 8 に解析結果を示す．図 6 に初期形状のメッシュと最終時刻 $(T=24000)$ における温度分布，流速・圧力分布を示し，図 7 に得られた改善形状のメッシュと最終時刻 $(T=24000)$ における温度分布，流速・圧力分布を示す．メッシュの要素数は 7,614，節点数は 4,103 である．図 8(a) に流速最大化領域 Ω_D の中央における初期形状での流速時間履歴，改善形状での流速時間履歴，図 8(b) に形状更新の繰り



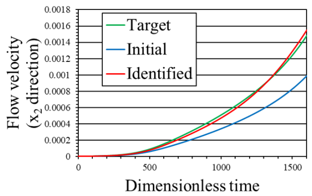
(a)Mesh　(b)Distribution of temperature　(c)Distributions of flow velocity and pressure

Fig. 2　Mesh and distributions of temperature, flow velocity and pressure at final time ($T = 1600$) for initial shape

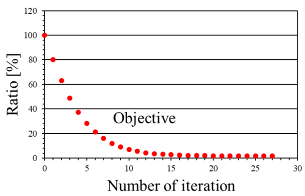


(a)Mesh　(b)Distribution of temperature　(c)Distributions of flow velocity and pressure

Fig. 3　Mesh and distributions of temperature, flow velocity and pressure at final time ($T = 1600$) for identified shape



(a)Flow velocity history



(b)History of objective functional

Fig. 4　Time history of flow velocity and history of convergence for solar tower model

返しに対する目的汎関数の収束履歴を示す．図 7 より，左右の設計境界を含む流路がやや膨らみ部分領域 Ω_D へ流体が流れ易くなっていることが確認できる．図 8(a) から初期形状の流速時間履歴に比較して，改善形状の流速時間履歴の方が高い値を示していることが分かる．その結果として，図 8(b) において，初期値を 100 % とした流速分布 2 乗の値が改善形状では約 125 % まで増加した．なお，本解析では，設計境界 Γ_{design} を断熱境界 Γ_{q2} とし，形状更新において左内側の設計境界 Γ_{q2} と設計境界ではない Γ_{q1} との境界で角部が生じたため，解析を終了した．これは，形状最適化における問題設定において，図 5 の左内側上部境界 Γ_{q1} の形状更新を抑制したためである．例えば，形状更新における設計境界を全内側境界 Γ_{q1} および Γ_{q2} 等にすることよって，このような角部の影響は改善できると考えられる．

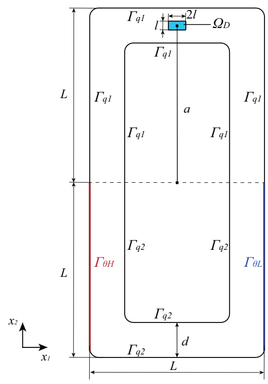


Fig. 5　Heat pipe model

これらの結果より，流速を最大化させる問題に対しても提示する手法の基本的な妥当性が確認できた．

6. まとめ

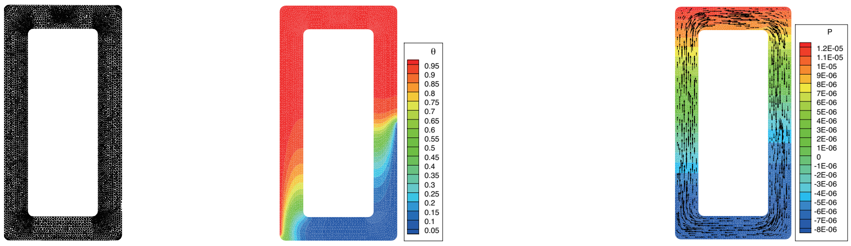
本論文では，非定常自然対流場の部分領域において，流速時間履歴を規定する，あるいは流速時間履歴を最大化する形状設計問題に対する解法を提案した．問題の定式化を行い，形状修正の感度となる形状勾配関数を理論的に導出し，形状勾配関数に基づいて力法を適用した解析例から，提案した解法の妥当性を示した．

今後の課題として，より過渡的な状態に着目した非定常自然対流場，あるいは非定常乱流場における形状最適化に対して検討することを予定している．

なお，本研究の一部は JSPS 科研費 JP18K03996 の助成を受けて行われた．記して深く謝意を表する．

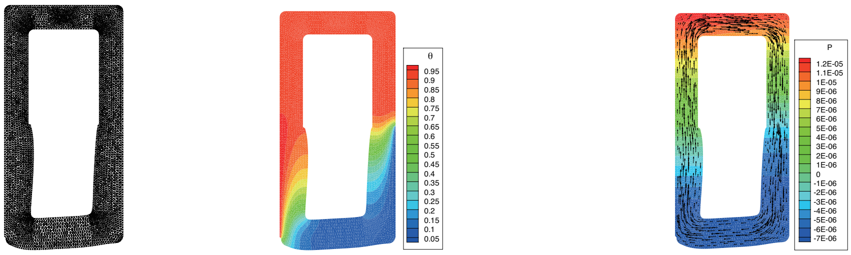
参考文献

(1) 本山雅孝, 杉谷賢一郎, 大屋裕二, 烏谷隆, 長井知幸, 岡田臣右: 熱上昇風を利用するソーラータワーの発電出



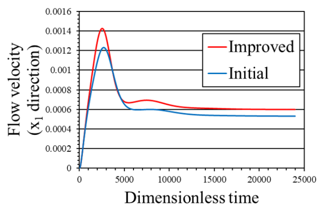
(a)Mesh (b)Distribution of temperature (c)Distributions of flow velocity and pressure

Fig. 6 Mesh and distributions of temperature, flow velocity and pressure at final time ($T = 24000$) for initial shape

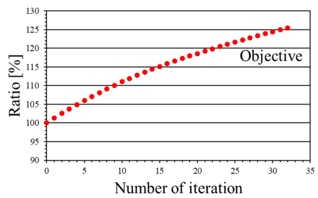


(a)Mesh (b)Distribution of temperature (c)Distributions of flow velocity and pressure

Fig. 7 Mesh and distributions of temperature, flow velocity and pressure at final time ($T = 24000$) for improved shape



(a)Flow velocity history



(b)History of objective functional

Fig. 8 Flow velocity history and history of convergence for heat pipe model

力の改良，第 23 回風工学シンポジウム論文集 (2014), pp.109-114.

(2) 桃瀬一成, 河野紘明, 河原源太: 熱対流場における形状感度解析と最適化アプローチ, 日本機械学会熱工学コンファレンス 2009 講演論文集 (2009), pp. 177-178.

(3) Park, H. M. and Ku J. H.: Shape identification for natural convection problems, Communications in Numerical Methods in Engineering, **17**(2001), pp.871-880.

(4) Aounallah, M., Belkadi, M., Adjlout, L. and Imine, O.: Numerical shape optimization of a confined cavity in natural convection regime, Computers & Fluids, **75**(2013), pp.11-21.

(5) Alexandersen, J., Aage, N., Andreasen, C. S. and Sigmund O., Topology optimization for natural convection problems, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **76**(2014), No.10, pp.699-721.

(6) Coffin, P. and Maute, K.: A level-set method for steady-state and transient natural convection problems, Structural and Multidisciplinary Optimization, **53**(2016), No.5, pp. 1047-1067.

(7) 片峯英次, 河瀬賀行, 畔上秀幸: 強制熱対流場の形状最適化, 日本機械学会論文集 B 編, **73**(2007), No. 733, pp. 1884-1891.

(8) 片峯英次, 岡田直也: 非定常強制熱対流場の形状設計問題の解法, 日本機械学会論文集, **83**(2017), No.855, DOI：10.1299/transjsme.17-00407.

(9) 片峯英次, 今井伸哉: 温度分布を規定する非定常自然対流場の形状同定問題の解法, 日本機械学会論文集, **82** (2016), Vol.82, DOI：10.1299/transjsme.15-00578.

(10) 畔上秀幸: 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A 編, **60**(1994), No. 574, pp. 1479-1486.

(11) 畔上秀幸: 形状最適化問題の正則化解法, 日本応用数理学会論文誌, **24** (2014), No. 2, pp. 83-138.

(12) 棚橋隆彦: GSMAC-FEM–数値流体力学の基礎とその応用–(1991)，アイピーシー.

(13) 大塚厚二, 高石武史: 有限要素法で学ぶ現象と数理–FreeFem++数理思考プログラミング–, (2014), 共立出版.