

# ブロッククリロフ部分空間法を用いた Characteristic Basis Function の生成方法

## A Generation Scheme of the Characteristic Basis Functions by using Block Krylov Subspace Algorithm

田中 泰<sup>1,2)</sup>, 新納 和樹<sup>3)</sup>, 西村 直志<sup>4)</sup>, 瀧川 道生<sup>5)</sup>, 米田 尚史<sup>6)</sup>

Tai TANAKA, Kazuki NIINO, Naoshi NISHIMURA, Michio TAKIKAWA, and Naofumi YONEDA

- 1) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8317 京都市左京区吉田本町, E-mail: tanaka.tai.a76@st.kyoto-u.ac.jp)  
 2) 三菱電機株式会社 (〒 247-8501 鎌倉市大船 5-1-1, E-mail: Tanaka.Tai@dh.MitsubishiElectric.co.jp)  
 3) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8317 京都市左京区吉田本町, E-mail: niino@i.kyoto-u.ac.jp)  
 4) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8317 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)  
 5) 三菱電機株式会社 (〒 247-8501 鎌倉市大船 5-1-1, E-mail: Takikawa.Michio@ak.MitsubishiElectric.co.jp)  
 6) 三菱電機株式会社 (〒 247-8501 鎌倉市大船 5-1-1, E-mail: Yoneda.Naofumi@ab.MitsubishiElectric.co.jp)

In this paper, we propose a novel generation technique for the characteristic basis function (CBF). Conventional CBF generation is based on the block Jacobi method, which has poor convergence and requires diagonal dominance for the matrix equation. The proposed generation scheme based on the block Krylov subspace algorithm solves these problems.

**Key Words:** Method of Moments, Characteristic Basis Function Method, Block Krylov Subspace Algorithm

### 1. 序論

電磁界の散乱問題において, ある物体に入射する平面波と遠方での散乱界の比である RCS (Radar Cross Section) が, その物体の散乱特性を表す指標として使われる. 平面波は物体に対する入射角の依存性を有するため, 角度に応じた解析が必要となる. この解析には, 境界積分方程式をガラーキン法により解くモーメント法<sup>(1)</sup>がよく用いられる. 特に近年は, 計算の高速化および計算機資源の有効活用を目的とした領域分割型のモーメント法が提案されており, 中でも CBFM (Characteristic Basis Function Method) は散乱問題への適応性が高いことが知られている<sup>(2)</sup>. CBFM において, 散乱体は立方体形状のセルなどによって複数の領域に分割され, 各領域にマクロ基底関数となる CBF (Characteristic Basis Function) が定義される. 3次元問題における各領域の CBF は, 領域中に含まれる RWG (Rao-Wilton-Glisson) 関数<sup>(3)</sup>に対応する部分行列を平面波などの波源に対して求解し, 得られた複数の解を直交化することで求められる. 領域  $m$  で定義される CBF の数  $N_m^{\text{CBF}}$ , 総領域数を  $M$  とすると CBFM における未知数  $N^{\text{CBF}}$  は  $\sum_{m=1}^M N_m^{\text{CBF}}$  となる. CBF を展開/試行関数としたガラーキン法により離散化された積分方程式は以下のように書ける.

$$\mathbf{Z}^{\text{CBF}} \mathbf{I}^{\text{CBF}} = \mathbf{V}^{\text{CBF}} \quad (1)$$

ここで,  $\mathbf{Z}^{\text{CBF}} \in \mathbb{C}^{N^{\text{CBF}} \times N^{\text{CBF}}}$  は既知の係数からなるインピーダンス行列,  $\mathbf{V}^{\text{CBF}} \in \mathbb{C}^{N^{\text{CBF}} \times S}$  は波源となる既知の入射電磁

界行列, そして  $\mathbf{I}^{\text{CBF}} \in \mathbb{C}^{N^{\text{CBF}} \times S}$  は求解される未知行列である.  $S$  は波源の数であり, 本稿では平面波の伝播方向の数とする.  $N^{\text{CBF}}$  はモーメント法の未知数  $N$  に対して一般的に  $N^{\text{CBF}} \ll N$  となるため, 行列求解にかかる時間を短縮できる. 特に LU 分解などの直接型の求解法を適用できる場合, 一度の行列分解のみで複数の波源に対する解  $\mathbf{I}^{\text{CBF}}$  が得られる.

上述の通り, CBF の生成には各領域に対応した部分行列の求解が必要となる. したがって, 領域に含まれる RWG 関数の数が増加すれば CBF の生成が長時間化する. また, CBF 生成時に定義する平面波の数  $s$  (最終的に解を得たい方向の数  $S$  とは異なる) は領域の大きさに応じて増加するため, 大きな領域に対する CBF の計算には多くの方向からの平面波が必要となる. 逆に領域の大きさが小さければ, 分割領域数の増加に伴って未知数  $N^{\text{CBF}}$  が増大する.

これらの問題を解決する方法として, 筆者らは IP-CBF (Improved Primary CBF) と呼ぶ CBF を提案した<sup>(4)</sup>. IP-CBF は領域間の結合を従来の CBF に加えたものであり, 余剰な CBF の定義による未知数の増加を防ぐことができる. しかしながら IP-CBF は各領域での反復計算に時間を要する問題がある.

本稿では, IP-CBF の生成を高速化する方法としてブロッククリロフ部分空間法<sup>(5)</sup>を適用する方法について述べる. さらに数値解析による確認により, 提案方法の有効性を示す. なお, 本稿ではベクトルであることを強調する場合のみ太字で表し, 行列や変数などは太字としない斜体で表す.

## 2. 定式化

### 2.1. 積分方程式 (1, 3, 6)

本節では、完全導体に対して一般的に用いられる積分方程式である混合型積分方程式を展開/試行関数により離散化して得られる行列方程式を定式化する。空間  $D \subset \mathbb{R}^3$  に配置された境界  $\Gamma$ 、外向き法線  $\hat{n}$  を有する完全導体の散乱問題 (Fig. 1) において、混合型積分方程式を形成する電界型/磁界型積分方程式はそれぞれ以下の式で表される。

$$\hat{n} \times \hat{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = -\eta \hat{n} \times \hat{n} \times T\{\mathbf{j}\}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = -\hat{n} \times K\{\mathbf{j}\}(\mathbf{x}) + \frac{\Omega}{4\pi} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

ここで、

$$T\{\mathbf{j}\}(\mathbf{x}) = jk \int_{\Gamma} \left( \mathbf{j}(\mathbf{y}) + \frac{1}{k^2} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} \right) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (4)$$

$$K\{\mathbf{j}\}(\mathbf{x}) = P.V. \int_{\Gamma} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \times \nabla_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (5)$$

とした。  $\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x})$  および  $\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{x})$  は入射電磁界、  $k$ ,  $\eta$ ,  $j$  は波数、波動インピーダンス、そして虚数単位をそれぞれ表す。  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{jk|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad (6)$$

で表される3次元のグリーン関数である。また、  $\Omega (0 \leq \Omega \leq 4\pi)$  は観測点  $\mathbf{x}$  が境界面近傍にある場合の立体角、  $P.V.$  は主値積分を表す。混合型積分方程式は以下の式で表される。

$$-\alpha \hat{n} \times \hat{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) + \beta \hat{n} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \alpha \eta \hat{n} \times \hat{n} \times T\{\mathbf{j}\}(\mathbf{x}) - \beta \hat{n} \times K\{\mathbf{j}\}(\mathbf{x}) + \beta \frac{\Omega}{4\pi} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (7)$$

ここで、  $\alpha$  は結合係数であり、  $\beta = (1-\alpha)\eta$  となる。電流  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  は基底となる  $N$  個の RWG 関数  $\mathbf{J}_j^{\text{RWG}}(\mathbf{x})$  とその係数  $I_j^{\text{RWG}}$  を用いて

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^N I_j^{\text{RWG}} \mathbf{J}_j^{\text{RWG}}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

と近似される。式 (7) の左辺、右辺をそれぞれ  $G(\mathbf{x})$ ,  $L\{\mathbf{j}\}(\mathbf{x})$  とし、式 (8) を代入してガラーキソ法を用いると、

$$\sum_{j=1}^N I_j^{\text{RWG}} \int_{\Gamma} \mathbf{J}_i^{\text{RWG}}(\mathbf{x}) \cdot L\{\mathbf{J}_j^{\text{RWG}}\}(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} = \int_{\Gamma} \mathbf{J}_i^{\text{RWG}}(\mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \quad (i=1, \dots, N) \quad (9)$$

が導かれる。式 (9) の左辺、右辺の積分をそれぞれ  $Z_{ij}^{\text{RWG}}$ ,  $V_i^{\text{RWG}}$  とおき、これらを要素とする行列  $Z^{\text{RWG}} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ,  $V^{\text{RWG}} \in \mathbb{C}^N$  を用いると、以下の行列方程式が導かれる。

$$Z^{\text{RWG}} I^{\text{RWG}} = V^{\text{RWG}} \quad (10)$$

ここで、  $I^{\text{RWG}} = (I_1^{\text{RWG}}, \dots, I_N^{\text{RWG}})^T \in \mathbb{C}^N$  は RWG 関数の係数の集合である (上付き文字の  $T$  は転置を表す)。  $S$  個の波源に対する解を同時に求める場合、  $I^{\text{RWG}}$ ,  $V^{\text{RWG}}$  はサイズが  $N \times S$  の複素行列となる。

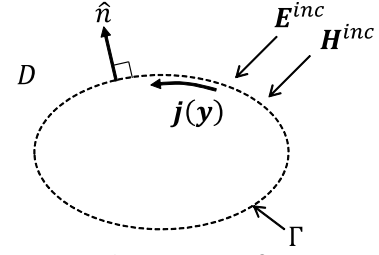


Fig. 1 Domain Definition

### 2.2. CBFM (2, 4)

CBFM において散乱体の境界は  $M$  個のセルに分割され、各セルの特徴を表す基底である CBF が計算される (Fig. 2)。セルの分割に応じて  $Z^{\text{RWG}}$  および CBF 生成時の波源  $(V^{\text{RWG}})' \in \mathbb{C}^{N \times s}$  を以下のように部分行列  $Z_{mn}$ ,  $V'_m$  に分割する。

$$Z^{\text{RWG}} = \{Z_{mn}\}_{1 \leq m, n \leq M} \quad (11)$$

$$(V^{\text{RWG}})' = \{V'_m\}_{1 \leq m \leq M} \quad (12)$$

セル  $m$  に含まれる RWG 関数の数を  $N_m$  とすると  $N = \sum_{m=1}^M N_m$  であり、  $Z_{mn}$ ,  $V'_m$  のサイズはそれぞれ  $N_m \times N_n$ ,  $N_m \times s$  となる。  $V'_m$  には 3 次元球座標から適当な間隔でサンプリングした方向に伝播する平面波を用いる。例えば  $\theta$  方向に  $N_\theta$  個、  $\phi$  方向に  $N_\phi$  個、直交偏波  $N_p (p=1, 2)$  成分をサンプリングすれば、  $s = N_p N_\theta N_\phi$  となる。

セル間の相互結合を考慮しない場合、セル  $m$  の CBF (直交化前) である  $J_m^{(1)}$  は

$$J_m^{(1)} = Z_{mm}^{-1} V'_m \quad (13)$$

から計算され、  $J_m^{(1)}$  に含まれる  $s$  個のベクトルが CBF として得られる。さらに、セル  $m$  とセル  $n$  の相互結合に対する CBF である  $J_{mn}$  が以下の式から計算される。

$$J_{mn} = -Z_{mm}^{-1} Z_{mn} J_n^{(1)} \quad (14)$$

この CBF が各セルあたり  $N_p N_\theta N_\phi (M-1)$  個できる。さらに高次の結合を表現するためにはより多くの CBF を定義する必要がある。CBF の増加は後の直交化プロセスにおける計算の長時間化につながる。一方、IP-CBF は  $J_{mn}$  を反復的に  $J_{mm}$  に入れ込むことで、その増加を防いでいる。反復  $n$  回に対する IP-CBF である  $J_m^{(n)}$  は以下の式から計算される。

$$J_m^{(n)} = Z_{mm}^{-1} \left\{ V'_m - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^M Z_{mn} J_n^{(n-1)} \right\} \quad (15)$$

3 次元球座標の  $S$  個の方向により定義される座標面の RCS を計算する場合、同座標面内が伝播方向となる  $s$  個の平面波から得られる  $J_m^{(n)}$  は、式 (10) から得られる  $I^{\text{RWG}}$  に近い特性を有する。この特性を利用すると、別の座標面からサンプリングした平面波を波源として生成した IP-CBF を用いた場合に比べ、IP-CBF の数は同等でありながら解析の精度を向上させることができる (次章にて数値計算により実証する)。さらに IP-CBF を直交化するため、特異値分解により  $J_m^{(n)}$  を

$$J_m^{(n)} = U_m \Sigma_m W_m^H \quad (16)$$

と分解する．ここで， $U_m \in \mathbb{C}^{N_m \times r}$ ， $W_m \in \mathbb{C}^{r \times s}$  はユニタリ行列， $\Sigma_m \in \mathbb{C}^{r \times r}$  は  $r$  個の特異値を対角成分とする対角行列である．また，上付き文字の  $H$  は随伴行列を表す．しきい値  $T_\sigma$  ( $0 < T_\sigma < 1$ ) を定義し，最大特異値  $\sigma_1$  との積  $T_\sigma \sigma_1$  を上回る特異値の個数が  $N_m^{\text{CBF}}$  であったとすると， $U_m$  と行列  $E_m \in \mathbb{C}^{N_m \times N_m^{\text{CBF}}}$  ( $(E_m)_{ij} = \delta_{ij}$ ) の行列積  $J_m = U_m E_m$  が直交化後の IP-CBF となる．ここで， $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである．式 (1) における  $Z^{\text{CBF}}$ ， $V^{\text{CBF}}$  は以下のように表される．

$$Z^{\text{CBF}} = \{\{J_m, Z_{mn} J_n\}\}_{1 \leq m, n \leq M} \quad (17)$$

$$V^{\text{CBF}} = \{\{J_m, V_m\}\}_{1 \leq m \leq M} \quad (18)$$

ここで， $\langle A, B \rangle$  は  $A^H$  と  $B$  の内積であり， $V^{\text{CBF}}$  の部分行列  $V_m^{\text{CBF}} \in \mathbb{C}^{N_m^{\text{CBF}} \times s}$  であれば，その  $i$  行  $j$  列の要素である  $(V_m^{\text{CBF}})_{ij} = \sum_{l=1}^{N_m} (J_m^H)_{il} (V_m)_{lj}$  となる．式 (1) の解  $I^{\text{CBF}}$  のセル  $m$  に対する部分行列  $I_m^{\text{CBF}} \in \mathbb{C}^{N_m^{\text{CBF}} \times s}$  と  $J_m$  を用いて，セル  $m$  の電流を表す RWG 関数に対する係数の集合である  $I_m (= J_m I_m^{\text{CBF}}) \in \mathbb{C}^{N_m \times s}$  が求められる．以上の計算により， $I^{\text{RWG}} = (I_1, \dots, I_M)^T$  が導かれる．

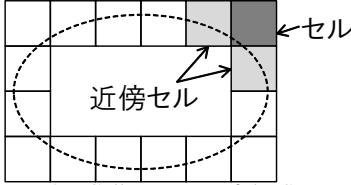


Fig.2 Cell Division of the Scatterer

### 2.3. CBF 生成の改良

CBF 生成の式 (15) はブロックヤコビ法と等価である．一般にブロックヤコビ法は収束が遅く，インピーダンス行列に狭義の対角優位性が求められる．この CBF 生成に伴う反復計算の収束性の問題を改善し，さらにインピーダンス行列に対する汎用性の高い方法として，ブロッククリロフ部分空間法の 1 つであるブロック BiCGStab アルゴリズム<sup>(5)</sup> を用いる方法を提案する．まず，式 (13) で表される CBF の集合  $J^{(1)}$  を  $(J_1^{(1)}, \dots, J_M^{(1)})^T$ ，残差ベクトル  $R_1$  を  $(V^{\text{RWG}})' - Z^{\text{RWG}} J^{(1)}$  とおく． $n$  回の反復を考慮した CBF である  $J^{(n)} = (J_1^{(n)}, \dots, J_M^{(n)})^T$  を求めるブロック BiCGStab アルゴリズムを Table 1 に示す．疑似コード中の MGS は修正グラムシュミット法<sup>(7)</sup> による直交化， $Q$  は前処理行列，そして  $\text{Tr}$  は行列の対角成分の総和 (トレース) をそれぞれ表す．なお，疑似コード中に現れる下付き添え字の変数は，前節までに用いた下付き添え字の変数とは異なる点に注意されたい．ブロッククリロフ部分空間法は 1 右辺ベクトルに対するクリロフ部分空間法の複数右辺問題への拡張であり，各ベクトルごとに独立して  $S$  回分計算する場合に比べて収束性を改善できることが知られている<sup>(5)</sup>．しかしながら，1 反復あたりの計算コストが  $S$  倍になるため，大規模散乱体の RCS 解析問題など，多数の平面波に対する解が必要となる問題においては式 (10) の適用が難しい．また，一般的に残差ノルム  $\varepsilon$  が 0.001 以下程度になるまで反復を繰り返さなければ精度の良い解は得られない．一方，CBF 生成時は平面波の入射方向の数  $s$  が  $S$  に比べて少なくても良い．さらに，反復が 10 回以内，残差ノルムが 0.1 程度で良い

Table 1 Pseudocode for the IP-CBF Generation by using the Block BiCGStab Algorithm

```

1: procedure BLOCK BiCGSTAB ALGORITHM
2:   Compute  $J^{(1)} \in \mathbb{C}^{N \times s}$  from Eq. (13)
3:   Compute  $R_1 = (V^{\text{RWG}})' - Z^{\text{RWG}} J^{(1)}$ 
4:    $P_1 = \tilde{R}_1 = R_1 (\in \mathbb{C}^{N \times s})$ 
5:   for  $n = 1 \dots$  until  $\|R_n\|_F \leq \varepsilon \|(V^{\text{RWG}})'\|_F$  do
6:      $P_n = \text{MGS}(P_n)$ 
7:      $\tilde{P}_n = Q^{-1} P_n$ 
8:      $W_n = Z^{\text{RWG}} \tilde{P}_n$ 
9:      $\alpha_n = (\tilde{R}_1^H W_n)^{-1} \tilde{R}_1^H R_n$ 
10:     $T_n = R_n - W_n \alpha_n$ 
11:     $\tilde{T}_n = Q^{-1} T_n$ 
12:     $Y_n = Z^{\text{RWG}} \tilde{T}_n$ 
13:     $\zeta_n = \frac{\text{Tr}[Y_n^H T_n]}{\text{Tr}[Y_n^H Y_n]}$ 
14:     $J^{(n+1)} = J^{(n)} + \tilde{P}_n \alpha_n + \zeta_n \tilde{T}_n$ 
15:     $R_{n+1} = T_n - \zeta_n Y_n$ 
16:    Solve  $\beta_n = -(\tilde{R}_1^H W_n)^{-1} \tilde{R}_1^H Y_n$ 
17:     $P_{n+1} = R_{n+1} + (P_n - \zeta_n W_n) \beta_n$ 
18:  end for
19: end procedure

```

精度の解が得られる (後の数値計算にて示す)．以上の理由により，反復を考慮した CBF の生成プロセスにブロッククリロフ部分空間法は適しているといえる．

疑似コード中の 3, 8, 12 プロセス目に  $Z^{\text{RWG}}$  との行列-行列積が現れる．3 行目の右辺であれば，セル  $m$  に対して

$$V_m - \sum_{n=1}^M Z_{mn} J_n^{(1)} = V_m - \sum_{i=1}^{M_n} Z_{mn_n(i)} J_{n_n(i)}^{(1)} - \sum_{i=1}^{M_f} Z_{mn_f(i)} J_{n_f(i)}^{(1)} \quad (19)$$

となる．ここで， $M_n$  および  $M_f$  は，セル  $m$  (Fig. 2 における濃い灰色のセル) に対して近傍となるセル (薄い灰色のセル) とそれ以外のセル (色のついていないセル) の数をそれぞれ表す．この内， $\sum_{i=1}^{M_f} Z_{mn_f(i)} J_{n_f(i)}^{(1)}$  に高速多重極法<sup>(6)</sup> を用いることで行列-行列積における乗算を高速化できる．

### 3. 数値計算による検証

提案方法の有効性確認として，Fig. 3 に示す導体平板の RCS を解析する．波長  $\lambda$  は  $0.03\text{m}$  ( $k = 2\pi/\lambda \approx 209.4 \text{ rad/m}$ )， $\eta$  は真空の波動インピーダンスである  $377\Omega$  とした．比較対象として，モーメント法 ( $N = 10290$ ) による解析も行う．なお，本章における計算は OS: CentOS 64bit, CPU: Intel Xeon E7-4850 2.10GHz (1 コア利用)，メモリ: 2TB, コンパイラ: g++ ver. 4.4.7 の計算機により行った．RCS を得る座標面は  $z-x$  面 ( $\phi = 0^\circ$ ) とし， $1^\circ$  間隔で  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ，すなわち  $S = 181$  方向の RCS を計算する．また，偏波は  $\theta$  偏波とした．CBFM の領域は一辺  $1\lambda$  のセルであり，総数  $M$  は 72 である．CBF 生成時にサンプリングする平面波  $(V^{\text{RWG}})'$  は  $N_p = 1(\theta \text{ 偏波})$

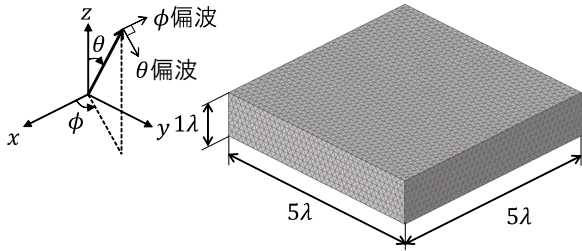


Fig. 3 Perfect Electric Conductor Plate

とし、 $\theta$ ,  $\phi$  方向の入射角  $\theta_s$ ,  $\phi_s$  は Table 2 に示す値を用いる。計算条件 1–3 における  $\theta$  方向、条件 4 における  $\phi$  方向の分割間隔は共に  $20^\circ$  としており、全計算ケースともに  $s = N_p N_\theta N_\phi = 18$  となる。計算条件 1 において CBF の生成にはブロックヤコビ法、条件 2–4 ではブロック BiCGStab アルゴリズムを利用する。簡単のため、前処理行列  $Q$  は用いない。特異値分解のしきい値  $T_\sigma$ 、式 (7) における結合係数  $\alpha$  は文献 (2) および文献 (6) にそれぞれ記載される典型値 0.001, 0.2 を用いる。

Table 2 Calculation Condition of CBF

	Incident Angles of the Plane Waves ( $\theta_s, \phi_s$ )	$\varepsilon$
1	$-180^\circ \leq \theta_s < 180^\circ, \phi_s = 0^\circ$ ( $N_\theta = 18, N_\phi = 1$ )	0.01
2	$-180^\circ \leq \theta_s < 180^\circ, \phi_s = 0^\circ$ ( $N_\theta = 18, N_\phi = 1$ )	0.01
3	$-180^\circ \leq \theta_s < 180^\circ, \phi_s = 0^\circ$ ( $N_\theta = 18, N_\phi = 1$ )	0.1
4	$\theta_s = 90^\circ, -180^\circ \leq \phi_s < 180^\circ$ ( $N_\theta = 1, N_\phi = 18$ )	0.01

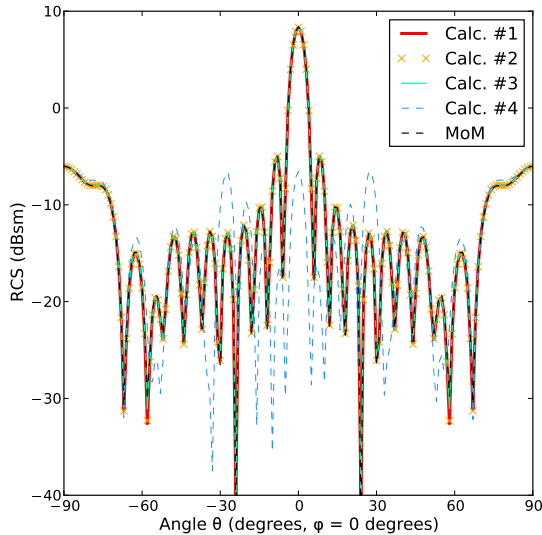


Fig. 4 RCS

Fig. 4 に RCS, Table 3 に平均二乗差異  $\delta_e$ ,  $N^{\text{CBF}}$ , 反復回数  $N^{\text{Itr}}$ , そして条件 1 の反復計算時間と他の条件の比 (Ratio) を示す。図中の MoM はモーメント法、Calc. #1–#4 は条件 1–4 に対応している。 $\delta_e$  は以下の式から計算した。

$$\delta_e(\text{dB}) = 10 \log \left( \frac{1}{S} \frac{\sum_{\theta=-90}^{90} (\sigma_C(\theta) - \sigma_M(\theta))^2}{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})^2} \right) \quad (20)$$

ここで  $\sigma_C(\theta)$ ,  $\sigma_M(\theta)$  は CBFM およびモーメント法により得られた観測角  $\theta$  に対する RCS である (単位:  $\text{m}^2$ )。  $\sigma_{\max}$  およ

び  $\sigma_{\min}$  は解析角度範囲における  $\sigma_M(\theta)$  の最大値と最小値を表す。モーメント法による計算結果に対して、計算条件 1–3 の結果は  $\delta_e$  が約  $-30\text{dB}$  で対応している。一方、解析座標面とは異なる面を伝播方向とする平面波を用いた計算条件 4 の結果は、モーメント法の結果とは大きく異なる ( $-8.5\text{dB}$ )。これらの結果は CBF 生成時の入射電磁界を最終的に得たい解に近づけるほど、妥当な解を得られることを示している。また、計算条件 2 と 3 の比較から、IP-CBF の収束性を表す指標である残差ノルム  $\varepsilon$  は 0.1 で十分であると言える。未知数  $N^{\text{CBF}}$  は各条件に対してほぼ変わらない。一方、反復回数  $N^{\text{Itr}}$  および計算時間の比はブロック BiCGStab アルゴリズム利用時の方が大幅に少ない。以上の結果より、ブロッククリロフ部分空間法を用いることで、従来法に比べて短時間で同等精度の IP-CBF が得られることを確認した。さらに、解析座標面内に伝播方向を有する平面波を CBF 生成時の波源とした場合、残差ノルム  $\varepsilon$  は 0.1 程度で良いことがわかった。

Table 3 Calculation Results

#	$\delta_e$ (dB)	$N^{\text{CBF}}$	$N^{\text{Itr}}$	Ratio
1	-29	1195	68	1
2	-28.9	1269	6	0.18
3	-28.4	1296	4	0.13
4	-8.5	1296	7	0.21

#### 4. 結論

本稿では、IP-CBF の計算効率改善に対するブロッククリロフ部分空間法の適用性について検討した。提案法を用いた数値計算により、その有効性を確認した。

#### 参考文献

- (1) R. F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, IEEE Press, 1993.
- (2) R. Mittra and K. Du, Characteristic basis function method for iteration-free solution of large method of moments problems, PIER B, vol. 6, pp. 307–336, 2008.
- (3) S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson, Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 30, pp. 409–418, 1982.
- (4) T. Tanaka, Y. Inasawa, Y. Nishioka, H. Miyashita, Improved primary-characteristic basis function method considering higher-order multiple scattering, IEICE Trans. Electron., vol. E100-C, pp. 45–51, 2017.
- (5) Y. Nakamura, K.-I. Ishikawa, Y. Kuramashi, T. Sakurai, H. Tadano, Modified block BiCGSTAB for lattice QCD, Computer Physics Communications, vol. 183, pp. 34–37, 2012.
- (6) Ö. Ergül and L. Gürel, The Multilevel Fast Multipole Algorithm (MLFMA) for Solving Large Scale Computational Electromagnetics Problems, IEEE Press, 2014.
- (7) Y. Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems, SIAM, 2003.