

Hilbert 型変換を用いた 一次元熱方程式に対する有限要素法について

ON A FINITE ELEMENT METHOD

USING A HILBERT-TYPE TRANSFORMATION FOR THE 1D HEAT EQUATION

新納 和樹¹⁾, 半澤 美紗樹²⁾, Olaf Steinbach³⁾

Kazuki Niino, Misaki Hanzawa and Olaf Steinbach

- 1) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 600-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: niino@i.kyoto-u.ac.jp)
 2) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 600-8501 京都市左京区吉田本町)
 3) グラーツ工科大学 (〒 8010 Steyrergasse 30/III, Graz, Austria E-mail: o.steinbach@tugraz.at)

We discuss a stable finite element method using a Hilbert-type transformation for the 1D heat equation. This method constructs a stable variational formulation by applying a Hilbert-type transformation to the testing function of the variational formulation. The method using the Hilbert-type transformation is based on an idea called “optimal” testing space, which was originally developed in the discontinuous Galerkin method. The Hilbert-type transformation, which is denoted by \mathcal{H}_T in this paper, is derived with the help of the Fourier analysis and turns out to depend on the maximum time T . This paper shows that we can construct a stable variational formulation with \mathcal{H}_∞ , the limit of \mathcal{H}_T instead of \mathcal{H}_T itself. This replacement makes computation easier since a singular integral included in \mathcal{H}_∞ is simpler than that in \mathcal{H}_T . We make validation of the proposed variational formulation through a numerical example.

Key Words: Stability, Finite Element Method, Heat Equation, Hilbert-type Transformation

1. 序論

熱方程式の数値解法の研究は長い歴史があり様々な方法が研究されているが, 差分法や有限要素法などを用いた数値解法では, 時間と空間を別々に離散化する方法が多く用いられている. 一方で近年, 時間と空間を同様に扱う space-time 法と呼ばれる数値解法が盛んに研究されている^(1, 2). space-time 法では時間軸を空間座標に対する追加の軸と見なし, 時間と空間を一度に離散化するため, 並列化や adaptive refinement の適用が容易であるなどの利点を持つと考えられている⁽³⁾.

また熱方程式を含む時間域の問題に対する数値解法において, 陽解法などの素朴な方法では条件によって安定性が失われることが知られている. 無条件安定な数値解法は, 陰解法を始めとして多くの研究がされているが, 近年, 特に space-time 法と親和性の高い安定化手法として, 最適な test 空間による数値解法が提案された. これは変分形式を構成する際に, 後に 3 節において示す意味で最適な test 空間を用いることで安定な数値解法を実現する方法であり, 不連続

Galerkin 法⁽²⁾ や, 楕円型及び放物型の偏微分方程式に対する変分形式⁽⁴⁾ において有効な安定化法であると報告されている. 特に熱方程式に対する有限要素法においては, 解空間に Hilbert 型変換 \mathcal{H}_T (T は考える問題の時刻の最大値) を作用させた空間を test 空間とすれば良いことが知られている⁽⁴⁾. 本稿ではこの作用素 \mathcal{H}_T の代わりに $T \rightarrow \infty$ の極限 \mathcal{H}_∞ を用いる方法について議論を行う. 作用素 $\mathcal{H}_T, \mathcal{H}_\infty$ は共に主値積分を含む積分作用素の形で表されるが, \mathcal{H}_∞ を用いた場合, この積分が解析的に計算できるため, 数値積分が必要である \mathcal{H}_T と比較して, より数値計算が簡単であることを示す. また \mathcal{H}_∞ を用いても依然として数値解法が安定であることも数値的に確認する.

2. 一次元熱方程式の定式化

本稿では一次元熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \quad (x, t) \in (x_1, x_2) \times (0, T) \quad (1)$$

を Dirichlet 境界条件:

$$\begin{aligned} u(x_1, t) &= g_1(t), \\ u(x_2, t) &= g_2(t) \end{aligned} \quad t \in (0, T)$$

および初期条件:

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (x_1, x_2)$$

の下で解く問題を考える. なお本稿で時刻の範囲を $t \in (0, \infty)$ とせず最大値 T を設定しているのは, 以下で導出する数値解法が T に依存するためである.

3. Hilbert 型変換を用いた変分形式の導出

3.1. 概要

本節では時間域の離散化のみを考えたいため, 熱方程式を簡易化した以下の常微分方程式に支配される初期値問題を考える.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= f(t), \quad t \in (0, T), \\ u(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

式 (2) の両辺に関数 w を乗じ, t に関して 0 から T まで積分することで以下の変分形式を得る.

$$\int_0^T w(t) \frac{du}{dt}(t) dt = \int_0^T w(t) f(t) dt \quad (3)$$

一般に変分形式に対する解の存在や一意性を証明するためには, その変分形式に伴う双線型形式 a の有界性

$$a(u, w) \leq C_1 \|u\| \|w\| \quad (4)$$

および強圧性

$$a(u, u) \geq C_2 \|u\|^2 \quad (5)$$

を用いる. これを踏まえて本節では以下の意味で“最適”な変分形式を求める. ある関数空間 X に対して $u \in X$ とし, 式 (3) において $w = \mathcal{H}_T v$ ($v \in X$) を代入すると,

$$\int_0^T (\mathcal{H}_T v)(t) \frac{du}{dt}(t) dt = \int_0^T (\mathcal{H}_T v)(t) f(t) dt$$

を得る. この式の左辺の双線型形式を a と定義する:

$$a(u, v) = \int_0^T \frac{du}{dt}(t) (\mathcal{H}_T v)(t) dt \quad (6)$$

このとき仮に

$$a(u, u) = \|u\|_X^2$$

となる様な関数空間 X および写像 \mathcal{H}_T が存在すれば, 有界性 (4) 及び強圧性 (5) は $C_1 = C_2 = 1$ に対して満たされるため, この双線型形式 a はこの意味において“最適”であると考えられる. 次小節からこのような条件を満たす関数空間 X および作用素 \mathcal{H}_T を求める.

3.2. Fourier 解析の準備

本小節では Fourier 解析を用いて, 前小節で述べた作用素 \mathcal{H}_T 及び関数空間 X を求める. なお本稿での Fourier 級数

に現れる無限和の収束は全て L^2 の意味である. 関数 u は $u(0) = 0$ を満たし, 定義域が $(0, T)$ であるため, 以下の様な Fourier 級数で表すことができる:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{t}{T}\right), \quad (7)$$

$$u_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{t}{T}\right) dt. \quad (8)$$

u は以下のパーセバルの等式を満たす:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0, T)}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} u_k u_l \int_0^T \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{t}{T}\right) \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) \frac{t}{T}\right) dt \\ &= \frac{T}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

ここに $\|u\|_{L^2(0, T)} := \sqrt{\int_0^T |u(t)|^2 dt}$ である. また同様の計算によって

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_{0,}^1(0, T)}^2 &:= \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0, T)}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} u_k u_l \int_0^T \frac{d}{dt} \left\{ \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{t}{T}\right) \right\} \\ &\quad \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) \frac{t}{T}\right) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 |u_k|^2 \end{aligned} \quad (10)$$

となる. ここに

$$H_{0,}^n(0, T) := \{u \in H^n(0, T) \mid u(0) = 0\},$$

$H^n(0, T)$ は $(0, T)$ を定義域とする n 次 Sobolev 空間である. したがって内挿定理によって式 (9), (10) から, 関数空間 $H_{0,}^{\frac{1}{2}}(0, T)$ のノルム及び内積を以下の様に定義できる (4).

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_{0,}^{\frac{1}{2}}(0, T)}^2 &:= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) u_k^2, \\ \langle u, v \rangle_{H_{0,}^{\frac{1}{2}}(0, T)} &:= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) u_k v_k. \end{aligned}$$

3.3. 作用素 \mathcal{H}_T

式 (6) で定義される双線型形式 $a(u, v)$ において, u, v が共に同じ関数空間に属するとすると $u(0) = v(0) = 0$ より, v も (7), (8) と同様の Fourier 級数で表すことができる.

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} v_k \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{t}{T}\right) \\ v_k &= \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

また (7) より

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} u_k \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{t}{T}\right)$$

したがって仮に作用素 \mathcal{H}_T が \sin を \cos に“変換する”作用素

$$w(t) = (\mathcal{H}_T v)(t) = \sum_{l=0}^{\infty} v_l \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) \frac{t}{T}\right) \quad (11)$$

であれば、式 (6) で定義した a は以下の式を満たす。

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_0^T \frac{du}{dt}(t) (\mathcal{H}_T v)(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} u_k v_l \int_0^T \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{t}{T}\right) \\ &\quad \cdot \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) \frac{t}{T}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) u_k v_k. \end{aligned}$$

これより $a(u, u) = \|u\|_{H_0^{\frac{1}{2}}(0, T)}^2$ 。以上より、任意の v に対し

て式 (11) を満たす \mathcal{H}_T が存在すれば、 $X = H_0^{\frac{1}{2}}(0, T)$ において a が 3.1 節で述べた意味で“最適な”双線型形式になることがわかる。

3.4. 作用素 \mathcal{H}_T の陽な表現

式 (11) を満たす作用素 \mathcal{H}_T は積分作用素を用いて陽に書き表すことができる：

$$(\mathcal{H}_T u)(t) := \int_0^T K_T(t, s) u(s) ds, \quad (12)$$

$$K_T(t, s) := \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{t}{T}\right) \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{s}{T}\right). \quad (13)$$

上式の無限和は古典的な意味においては一般に発散するが、超関数の意味で定義できることに注意すること。式 (13) における無限和は簡単に計算することができる。

$$K_T(s, t) = \frac{1}{2T} \left\{ \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{s-t}{T}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{s+t}{T}\right)} \right\} \quad (14)$$

となる。またこの式において $T \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$K_{\infty}(s, t) := \lim_{T \rightarrow \infty} K_T(s, t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{s-t} + \frac{1}{s+t} \right) \quad (15)$$

となる。したがって $H_0^{\frac{1}{2}}(0, T)$ を定義域とする作用素

$$(\mathcal{H}_{\infty} u)(t) := \int_0^T K_{\infty}(s, t) u(s) ds \quad (16)$$

はヒルベルト変換

$$(\mathcal{H}u)(t) := \int_0^{\infty} \frac{u(s)}{s-t} ds$$

と似た作用素であることがわかる。実際、作用素 \mathcal{H}_T はヒルベルト変換と同様の性質として自己随伴性や正定値性を持つことが示せる⁽⁴⁾。また K_T と K_{∞} の $s = t$ における特異性が等しいことから、 \mathcal{H}_T と \mathcal{H}_{∞} もコンパクト作用素を除いて等しいことがわかる。

4. 1次元熱方程式の変分形式

本節では前節で求めたヒルベルト型変換 \mathcal{H}_{∞} を用いて 2 節で定義した問題に対する変分形式を導出する。前節にお

ける作用素 \mathcal{H}_T の導出より、時刻の最大値が T の問題においては、 \mathcal{H}_{∞} ではなく、 \mathcal{H}_T を用いることが自然であると考えられる。しかし本稿ではより計算が簡単な \mathcal{H}_{∞} を \mathcal{H}_T の代わりに用いる。実際 \mathcal{H}_T を計算するためには K_T を

$$K_T = K_{\infty} + (K_T - K_{\infty})$$

と、特異部分 ($= K_{\infty}$) と滑らかな部分 ($= K_T - K_{\infty}$) に分割し、前者を解析的に、後者を数値積分で計算する必要がある一方で、 \mathcal{H}_{∞} を用いる場合、 K_{∞} に対応する部分のみを計算すれば良いので数値積分を行う必要がなくなる。また \mathcal{H}_{∞} はコンパクト作用素を除いて \mathcal{H}_T に等しいため安定性に関して同様の効果が得られることが期待される。以上の理由から本稿では \mathcal{H}_T の代わりに \mathcal{H}_{∞} を用いる。

$u(x, t), v(x, t)$ を $u(x, 0) = v(x, 0) = 0$ を満たす関数とし、 $(\mathcal{H}_{\infty} v)(x, t)$ を test 関数とすると、式 (1) の変分形式は以下のようなになる：

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{x_1}^{x_2} (\mathcal{H}_{\infty} v)(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial (\mathcal{H}_{\infty} v)}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx dt \quad (17) \end{aligned}$$

時間、空間方向の離散化に区分線型基底 $\phi_n(t), \psi_j(x)$ を用いると、 u は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=0}^{N_x} u_j^n \phi_n(t) \psi_j(x)$$

と展開される。ここに N_x, N_t はそれぞれ時間、空間方向の分割数である。また $v(x, t) = \phi_m(t) \psi_i(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{\infty} v)(x, t) &= \tilde{\phi}_m(t) \psi_i(x) \\ \tilde{\phi}_m(t) &:= (\mathcal{H}_{\infty} \phi_m)(t) \end{aligned}$$

となる。これを変分形式 (17) に代入すると

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=0}^{N_x} u_j^n \left\{ \int_0^T \tilde{\phi}_m(t) \frac{\partial \phi_n}{\partial t}(t) dt \int_{x_1}^{x_2} \psi_i(x) \psi_j(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \tilde{\phi}_m(t) \phi_n(t) dt \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \psi_j}{\partial x}(x) dx \right\} = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

を得る。先に述べた通り上式中における全ての積分は解析的に計算できることに注意されたい。

5. 数値計算例

本節では以下の問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [-1, 1], t \in [0, 1]$$

$$u(-1, t) = u(1, t) = t^2$$

$$u(x, 0) = 0$$

に対して数値計算を行った。この問題は解析解が

$$u(x, t) = t^2 + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k^3} \cos(\alpha_k x) \left\{ t + \frac{\exp^{-\alpha_k^2 t} - 1}{\alpha_k^2} \right\}$$

で与えられることが知られている．ここに $\alpha_k = \pi/2 + k\pi$ である．本節では 4 節の式 (18) で示した数値解法と，時間方向に陽的な差分法，空間方向に区線形基底による有限要素法を用いた方法を比較することで，比較的大きな Courant 数に対しても提案手法が安定であることを確かめる．

まず空間方向のステップ数を $N_x = 10$ で固定し，時間方向のステップ数を $N_t = 50$ から 500 の範囲で 50 刻みずつ大きくしたときの相対誤差

$$\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_x-1} (u_j^n - \tilde{u}_j^n)^2}{\sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_x-1} (\tilde{u}_j^n)^2}} \quad (19)$$

をプロットした図を Fig. 1 に示す．ここに u_j^n, \tilde{u}_j^n はそれぞれ n 番目の時刻， j 番目の位置における数値解，解析解である．提案法 (proposed) は計算した範囲において十分な精度の数

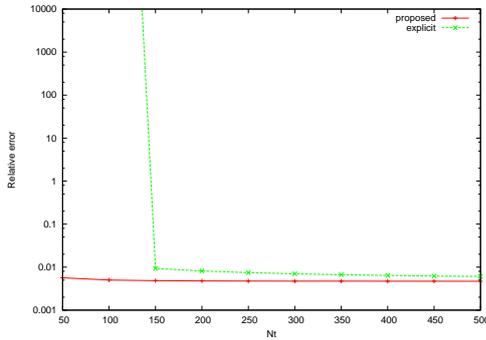


Fig. 1 The relative error in (19) for various N_t with $N_x = 10$.

値解が得られた．特に陽解法 (explicit) が発散する $N_t < 150$ の範囲においても，提案法は安定であることがわかる．

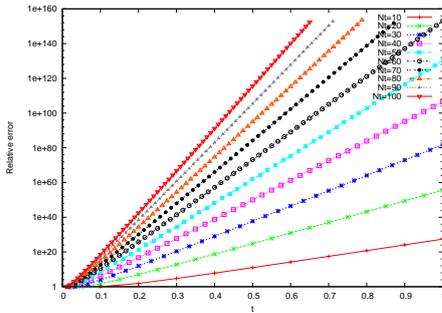


Fig. 2 The Relative error in (20) of the explicit method for various N_t with $N_x = 100$.

次に $N_x = 100$ で固定し，様々な値の N_t に対して各時間ステップ n における相対誤差

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N_x-1} (u_j^n - \tilde{u}_j^n)^2}{\sum_{j=1}^{N_x-1} (\tilde{u}_j^n)^2}} \quad (20)$$

を測定した．陽解法の結果を Fig. 2 に，提案法の結果を Fig. 3 に示す．Fig. 2 より， $10 \leq N_t \leq 100$ の範囲において陽解法は発散することがわかる．この数値例では $N_x = 100$ と固定したことにより，Fig. 1 で示した全ての例よりも Courant 数が大きくなっているため，この結果は想定通りであると言え

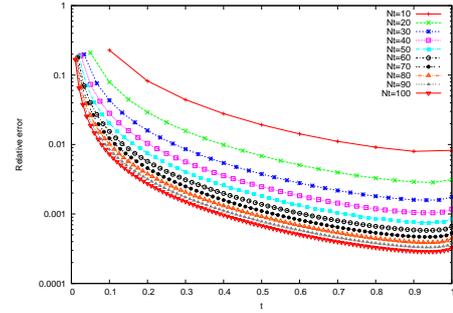


Fig. 3 The Relative error in (20) of the proposed method for various N_t with $N_x = 100$.

る．Fig. 3 を見ると，その様な大きな Courant 数に対しても提案法は安定していることがわかる． $t = 0$ 付近で提案法の相対誤差が大きな値を取るの，解自体の絶対値が $t = 0$ 付近で非常に小さいためであると考えられる．また $t = 1$ の最終ステップにおいて，その一つ前のステップにおける誤差と比較して，相対誤差がやや増加している．これは \mathcal{H}_T を \mathcal{H}_∞ に取り替えたことに起因する可能性があるが，原因ははっきりわかっておらず今後の課題である．

6. 結論

本稿では 1 次元熱方程式に対して Hilbert 型変換を用いた有限要素法について考察した．特に時刻の最大値 T が有界な問題においても，作用素 \mathcal{H}_T の代わりにより計算が容易な \mathcal{H}_∞ を用いて安定な数値解法が構成できることを確かめた．

今後の課題として本手法を陰的な差分法や作用素 \mathcal{H}_T を用いた有限要素法と比較することが挙げられる．また解の存在や一意性の証明を含む， \mathcal{H}_∞ を用いた数値解法の厳密な理論解析も今後の課題である．本稿では解を時間と空間それぞれに依存する関数のテンソル積の形で離散化を行ったが，時間と空間を同様に扱う，いわゆる space-time 法に本手法を適用することも今後の課題として挙げられる．

参考文献

- (1) Olaf Steinbach. Space-time finite element methods for parabolic problems. *Computational Methods in Applied Mathematics*, Vol. 15, No. 4, pp. 551–566, 2015.
- (2) Truman Ellis, Jesse Chan, and Leszek Demkowicz. Robust DPG methods for transient convection-diffusion. In *Building Bridges: Connections and Challenges in Modern Approaches to Numerical Partial Differential Equations*, pp. 179–203. Springer, 2016.
- (3) Martin J Gander and Martin Neumüller. Analysis of a new space-time parallel multigrid algorithm for parabolic problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 38, No. 4, pp. A2173–A2208, 2016.
- (4) Olaf Steinbach and Marco Zank. Coercive space-time finite element methods for initial boundary value problems. (*preprint*), 2018.