

Maxwell 方程式における isogeometric 境界積分法と 選点法による離散化

ISOGEOMETRIC BOUNDARY INTEGRAL METHODS FOR MAXWELL'S EQUATIONS AND THEIR DISCRETISATION USING COLLOCATION

西村 直志¹⁾, 新納 和樹²⁾

Naoshi NISHIMUAR and Kazuki NIINO

- 1) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)
2) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: niino@i.kyoto-u.ac.jp)

We propose collocation boundary integral methods for the electric field integral equation (EFIE) and the magnetic field integral equation (MFIE) for Maxwell's equations using the isogeometric analysis. The performances of these formulations are compared with that of the method of moments with RWG. It is found that these collocation boundary integral methods are efficient. Particularly promising is the isogeometric collocation EFIE which is more accurate than MFIE.

Key Words: Isogeometric Analysis, EFIE, MFIE, Collocation

1. 序

Hughes らによって始められた isogeometric 解析は, CAD などで行われる幾何学的モデリングと未知関数の補間に同じ関数のクラスを利用する方法と説明される⁽¹⁾. しかし, Maxwell 方程式を考えると, 3次元空間中の曲面を張るための基底関数と, H_{div} などの接ベクトル場を張るための基底関数には本質的な違いがある. そうすると, 幾何的なモデリングと未知関数の基底を同一に選ぶ事が isogeometric 解析の本質ではなく, NURBS 関数などの系統的な利用により, 問題の要求する正則性を有する基底を生成する方法と捉える方がより合理的であろう. Buffa ら⁽²⁾ や Simpson ら⁽³⁾ はおそらくこのような視点から, Maxwell 方程式の数値計算に必要な空間 H_{div} や H_{curl} の基底を isogeometric 解析に基づいて考察した. さらに Simpson らはこれらの基底関数と Galerkin 法を用いて Maxwell 方程式の境界積分法を展開した. 本報ではトーラスに同相な完全導体による電磁波の散乱問題を考え, isogeometric 解析を用いると, Maxwell 方程式の EFIE や MFIE が容易に選点法で離散化できることを示す.

Maxwell 方程式の境界積分法では, これまで選点法が行われてこなかったわけではなく, 特に Nyström 法の研究は多数行われている (例えば Tong and Chew⁽⁴⁾). しかし, 一般に用いられる平面要素と RWG の組み合わせでは, 要素の辺上に選点を取ると積分が発散し, 自然な選点法を構築すること

ができない. そこで本報では isogeometric 解析を用いて選点法に必要な積分がすべて収束するような算法を構築する. さらに数値実験により, 得られた選点法境界積分法の解析効率が従来の moment 法に比べて良好であることを示す.

2. 問題設定と境界積分方程式

領域 $\Omega_0 \in \mathbb{R}^3$ はトーラスに同相な領域とし, $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_0$ とする. また, $\Gamma = \partial\Omega_0$ は滑らかな閉曲面とし, Γ の単位法線ベクトル n は Ω の方向を向いているものとする. 物理的には Ω_0 は導体であるものとして, 次の散乱問題を考える:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times E - k^2 E &= 0 && \text{in } \Omega \\ E \times n &= 0 && \text{on } \Gamma \\ E_{\text{sca}} &= E - E_{\text{inc}} && \text{に対する放射条件} \end{aligned}$$

ここに, E は電場, E_{inc} は与えられた入射波, E_{sca} は散乱波, k は波数である. この問題の積分方程式として, EFIE

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\epsilon}}{ik\sqrt{\mu}} t(x) \cdot E_{\text{inc}}(x) \\ = t(x) \cdot \int_{\Gamma} \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) G(x-y) j(y) dS_y \end{aligned} \quad (1)$$

および MFIE

$$\begin{aligned} n(x) \times H_{\text{inc}}(x) = \frac{j(x)}{2} \\ + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial G(x-y)}{\partial n_x} j(y) - \nabla G(x-y) n(x) \cdot j(y) \right) dS_y \end{aligned} \quad (2)$$

がある．ここに， $G(x) = e^{ik|x|}/(4\pi|x|)$ は Helmholtz 方程式の基本解， j は未知の表面電流， t は Γ の接ベクトル， ϵ, μ はそれぞれ誘電率，透磁率（定数）を表す．EFIE は超特異積分方程式であり，通常 Galerkin 法で離散化される（moment 法）．MFIE も同様に Galerkin 法で離散化される事が多い．

3. isogeometric 解析

本報では未知関数を B spline 関数を用いて補間することにする．幾何学量については C^1 級であることのみ要求する． $D = (0, 1] \times (0, 1]$ とし， D にデカルト座標 $s_I \in (0, 1]$ ($I = 1, 2$) を導入する．Buffa ら⁽²⁾によれば， Γ 上の H_{div} に属する関数 j は

$$j_i(y) \approx \sum_{\alpha} \frac{1}{J} \frac{\partial y_i}{\partial s_I} N_I^{\alpha}(s) j^{\alpha} \quad (3)$$

の形に離散化できる．ここに， N_I^{α} ($I = 1, 2$) は D 上の H_{div} の基底 (I がベクトル添字) であり，

$$(B_p(s_1) \times B_{p-1}(s_2), \quad B_{p-1}(s_1) \times B_p(s_2)) \quad (4)$$

の形を有する．ここに， $B_p(s)$ は s に関して周期 1 の p 次周期 B spline 関数 ($p \geq 1$) である．また， α はこのような（ベクトル値）基底関数の通し番号， $j^{\alpha} \in \mathbb{C}$ は係数である．また，幾何形状 $y(s_1, s_2)$ は $(s_1, s_2) \in D$ についてそれぞれ周期 1 の C^1 級周期関数であり，

$$J = \sqrt{\left| \frac{\partial y}{\partial s_1} \times \frac{\partial y}{\partial s_2} \right|}$$

は Jacobian である．なお，大文字，小文字の添字について，それぞれ範囲 2, 3 の範囲で総和規約を適用する．

さて，EFIE を上記の H_{div} の離散化と選点法を用いて離散化することを考える．式 (1) の右辺は，容易に D 上の積分に書き換えられ， $x \in \Gamma$ に対して

$$\sum_{\alpha} \iint_D \left(\frac{\partial x_i}{\partial s_I} G(x-y) \frac{\partial y_i}{\partial s_K} N_K^{\alpha} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial G(x-y)}{\partial s_{I_x}} \frac{\partial N_K^{\alpha}}{\partial s_{K_y}} \right) ds_{1_y} ds_{2_y} j^{\alpha} \quad (5)$$

となる．ここに，(1) の t を $\partial x / \partial s_I$ と取った．なお， $\partial x / \partial s_I$ は点 x における幾何形状の s_I に関する微分であり， s_I の関数としては $\partial y / \partial s_I$ と同一である．また，(5) の積分の第 2 項は，ある α に対して $x \in \text{supp } N_K^{\alpha}$ となるときには主値の意味で取るが，このときは (5) の含む特異積分を

$$\begin{aligned} & \iint_{D'} \frac{\partial G(x-y)}{\partial s_{I_x}} \frac{\partial N_K^{\alpha}}{\partial s_{K_y}} ds_{1_y} ds_{2_y} = \\ & \iint_{D'} \left(\frac{\partial G(x-y)}{\partial s_{I_x}} \frac{\partial N_K^{\alpha}}{\partial s_{K_y}} + \frac{\partial G(x-y)}{\partial s_{I_y}} \frac{\partial N_K^{\alpha}}{\partial s_{K_x}} \right) ds_{1_y} ds_{2_y} \\ & - \frac{\partial N_K^{\alpha}}{\partial s_{K_x}} \int_{\partial D'} G(x-y) \nu_I(y) ds_y \end{aligned} \quad (6)$$

と変形するとよい．ここに， D' は $\text{supp } N_K^{\alpha}$ に含まれる適当な集合であり， ν は D' の外向き単位法線ベクトルである．この積分が収束するためには基底関数の発散が連続であることが必要であり，(3) において $p \geq 2$ でなければならない．

MFIE の場合，関連する積分は全て可積分である．実際，(2) の右辺は D 上の積分を用いて次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2J} \frac{\partial x_i}{\partial s_I} \sum_{\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial s_K} N_K^{\alpha} j^{\alpha} + \\ & \sum_{\alpha} \iint_D \left(\frac{\partial G(x-y)}{\partial n_x} \frac{\partial x_i}{\partial s_I} \frac{\partial y_i}{\partial s_K} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial G(x-y)}{\partial s_{I_x}} n_j(x) \frac{\partial y_j}{\partial s_K} \right) N_K^{\alpha} ds_{1_y} ds_{2_y} j^{\alpha} \end{aligned}$$

4. 実装の詳細

本報で用いた実装の詳細は以下の通りである．

4.1. 幾何形状

まず， s_I ($I = 1, 2$) 軸上に節点 $0 = s_I^0 < s_I^1 < s_I^2 < \dots < s_I^{n_I} = 1$ を設け， $s_I^{-i} = s_I^{n_I-i} - 1$ ， $s_I^{i+1} = s_I^i + 1$ とする ($i = 1, 2$)．一般に節点 $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p + 1$ を有する p 次の B spline を $B_p(t : t_0, t_1, \dots, t_{p+1})$ と書き，幾何形状を表現する基底関数は次のように取る：

$$\begin{aligned} & \phi^{ij}(s_1, s_2) = \\ & B_2(s_1 : s_1^{i-2}, s_1^{i-1}, s_1^i, s_1^{i+1}) B_2(s_2 : s_2^{j-2}, s_2^{j-1}, s_2^j, s_2^{j+1}) \\ & \quad 0 \leq i \leq n_1 + 1, \quad 0 \leq j \leq n_2 + 1 \end{aligned}$$

これらの基底の Greville 座標

$$(s_1^{ig}, s_2^{jg}) = \left(\frac{s_1^{i-1} + s_1^i}{2}, \frac{s_2^{j-1} + s_2^j}{2} \right)$$

において， Γ 上の点 x^{ij} を通る条件

$$x^{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \phi^{kl}(s_1^{ig}, s_2^{jg}) \bar{x}^{kl}$$

から Γ の近似を得る．上式の和の範囲外の (k, l) についても (k, l) をそれぞれ $\text{mod } n_1, \text{mod } n_2$ の意味で理解することによって係数 \bar{x}^{kl} を定義しておくこと， $s_1^{i-1} \leq s_1 \leq s_1^i, s_2^{j-1} \leq s_2 \leq s_2^j$ を満たす (s_1, s_2) に対して

$$x(s_1, s_2) = \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j-1}^{j+1} \phi^{kl}(s_1, s_2) \bar{x}^{kl}$$

と書くことができる．

なお，点 x^{ij} の取り方によってメッシュの濃淡を調整することができるので， D 上の節点は等間隔に取って差し支えない．本報ではこの方針をとるものとする．

4.2. 表面電流

表面電流は H_{div} に属するので，(3) の形で離散化する．従って，使用する D 上の H_{div} の基底を確定すればよい．本報では (4) において， $p = 2$ と取る．その結果， N_I^{α} は

$$\begin{aligned} & \alpha = 2((i-1)n_2 + j) - 1 \\ & N_1^{\alpha}(s_1, s_2) = B_2(s_1 : s_1^{i-2}, s_1^{i-1}, s_1^i, s_1^{i+1}) B_1(s_2 : s_2^{j-1}, s_2^j, s_2^{j+1}), \\ & N_2^{\alpha}(s_1, s_2) = 0 \end{aligned}$$

となるものと，

$$\begin{aligned} & \alpha = 2((i-1)n_2 + j) \\ & N_1^{\alpha}(s_1, s_2) = 0, \\ & N_2^{\alpha}(s_1, s_2) = B_1(s_1 : s_1^{i-1}, s_1^i, s_1^{i+1}) B_2(s_2 : s_2^{j-2}, s_2^{j-1}, s_2^j, s_2^{j+1}) \end{aligned}$$

となるものに分けられる．それぞれ，節点座標によって D を区分けしたメッシュにおいて， 3×2 または 2×3 の6個の「面要素」の上に台を有する．前者の Greville 座標は $((s_1^{i-1} + s_1^i)/2, s_2^j)$ であり，後者のそれは $(s_1^i, (s_2^{j-1} + s_2^j)/2)$ であって，これらは D のメッシュの辺に対応することがわかる．従って，選点法においては，選点を D のメッシュの辺の中点にとるのが合理的であり，(1) の EFIE，(2) の MFIE のいずれにおいても I は選点の存在する辺の方向に取る．

4.3. 数値積分

数値積分は基本的に D のメッシュの面要素ごとに，座標軸方向の Gauss 積分のテンソル積を使用する．ただし，辺上に選点が存在する面要素では高橋ら⁽⁵⁾ に倣い，Lachat-Watson 型の要素分割と変数変換を行なった上で，数値積分を行なった．

4.4. EFIE における特異積分の取り扱い

EFIE において特異積分が発生する場合，(6) を用いる．その際， D' の取り方は Fig. 1 のように行なった．図において，

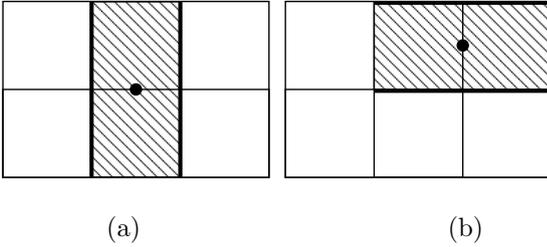


Fig. 1 Choices of domain D'

細い実線で囲まれた領域が $\text{supp } N_K^\alpha$ であり，黒丸が選点の位置である．それぞれの図で横方向が $(K =) 1$ 方向であるとすれば，(a) では $I = 1$ ，(b) では $I = 2$ となる．選んだ領域 D' は斜線で示した部分である．この際，(6) の線積分は D' の境界でとるが，太線で示した部分以外では $\nu_I = 0$ となるので，実際の線積分は太線上でのみ行うことになる．

5. 数値計算例

以下では数値実験によって，提案する方法の妥当性と効率を検討する．領域 Ω_0 はトーラスであり，次式で表される．

$$\begin{aligned} x_1 &= (a + b \cos \theta) \cos \phi, \\ x_2 &= (a + b \cos \theta) \sin \phi, \\ x_3 &= b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi \end{aligned}$$

ここに， a, b は $a > b$ を満たす正の数であり，以下では $a = 3$ ， $b = 1$ (任意単位) と取った．また， $\epsilon = \mu = 1$ とし，入射波は

$$H_{1,2}^{\text{inc}} = 0, \quad H_3^{\text{inc}} = e^{ikx_1}$$

とした．

数値計算においては前節で述べた実装を使用し，数値積分には各面要素の各方向ごとに4次の Gauss 積分公式を用いた．線型方程式の解法は Gauss の消去法であり，いずれの計算においても高速解法や並列化は用いていない．また，比較

に用いた RWG を使った数値結果は，Adams の低周波破綻に対応した EFIE⁽⁶⁾ を改良した moment 法を用いて求めた．使用した要素数は 11250，未知数の数は 16875 である．

Fig. 2 には $k = 0.1$ ， ϕ, θ 方向の分割数 $n_1 = n_2 = 30$ (未知数 1800) としたときの選点法 EFIE と MFIE で求めた表面電流の実部の分布を示す．これらの結果は概ね一致しているが，孔の側の値に若干の差があることが分かる (カラー版では色調の変化に注意)．Fig. 3 には同じ場合の表面電流の 1 成

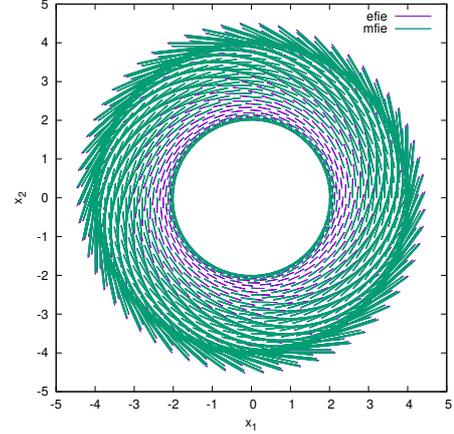


Fig. 2 Surface current $\Re j$: EFIE and MFIE. $k = 0.1$, $n_1 = n_2 = 30$

分の実部を (x_1, x_2) の関数として plot した．同図より EFIE の IG 法による結果と RWG を用いた結果はよく一致しているが，MFIE の孔の側の値が若干異なっていることがわかる．分割数を $n_1 = n_2 = 75$ (未知数 11250) としたときの同じ結

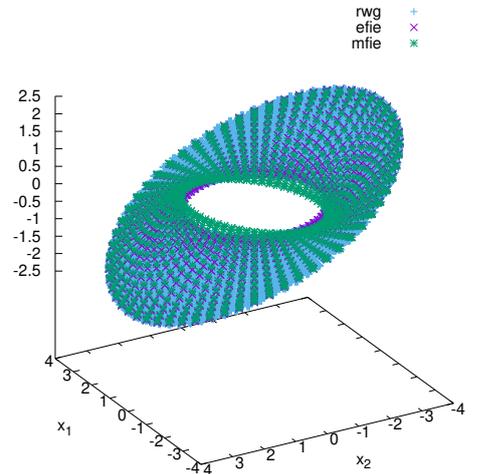


Fig. 3 Surface current $\Re j_1$: comparison of RWG, EFIE and MFIE results. $k = 0.1$, $n_1 = n_2 = 30$

果を Fig. 4 に示した．分割を細かくすると，RWG，EFIE 及び MFIE の結果はよく一致することがわかる．一般に EFIE に比べて MFIE の解析精度は劣ると言われているが⁽⁷⁾，上の結果からも同様の傾向が読み取れる．

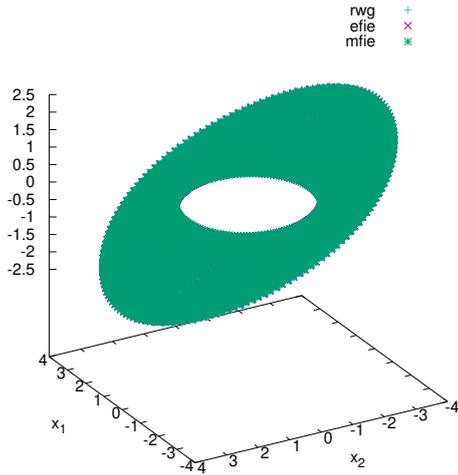


Fig. 4 Surface current $\Re j_1$: comparison of RWG, EFIE and MFIE results. $k = 0.1$, $n_1 = n_2 = 75$

次に同じ問題で波数を $k = 1.0$ としたときの選点法 EFIE と MFIE で求めた表面電流の分布を Fig. 5 に示した . 分割数は $n_1 = n_2 = 30$ とした . $k = 0.1$ の場合と異なり , EFIE と MFIE の結果はよく一致している . Fig. 6 には同じ場合の

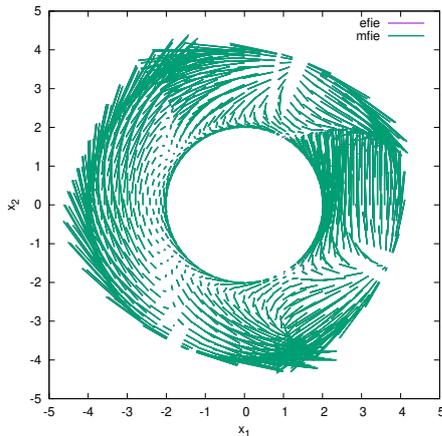


Fig. 5 Surface current $\Re j$: EFIE and MFIE. $k = 1.0$, $n_1 = n_2 = 30$

表面電流の 1 成分の実部を (x_1, x_2) の関数として plot した . 同図より EFIE, MFIE の IG 法による結果と RWG を用いた結果はよく一致していることがわかる .

6. 結論

本報では isogeometric 解析を使用すると Maxwell 方程式の EFIE, 及び MFIE の選点法による離散化が容易に行えることを示し, 特に境界形状がトーラスと同相であるときには実装も極めて簡単になることを示した . また, RWG を用いた moment 法の計算結果との比較を行い, 良好な数値結果が得られることを示した . 特に EFIE は RWG を用いた moment 法と比較して, 非常に少ない分割数でも, 実用的な解析精度が得られることがわかった . 今後の課題は, より一般の形状

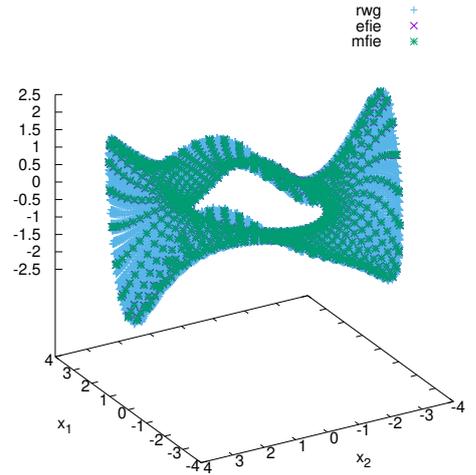


Fig. 6 Surface current $\Re j_1$: comparison of RWG, EFIE and MFIE results. $k = 1.0$, $n_1 = n_2 = 30$

の散乱体を扱えるように実装を改良することである .

なお, 本研究は科学研究費 18K19783 の助成を得ている .

参考文献

- (1) T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 194, 4135–4195, 2005
- (2) A. Buffa, G. Sangalli and R. Vázquez, Isogeometric analysis in electromagnetics, B-splines approximation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 199, 1143–1152, 2010
- (3) R.N. Simpson, Z. Liu, R. Vázquez and J.A. Evans, An isogeometric boundary element method for electromagnetic scattering with compatible B-spline discretizations, *J. Comp. Phys.*, 362, 264–289, 2018
- (4) M.S. Tong and W.C. Chew, A higher-order Nyström scheme for electromagnetic scattering by arbitrarily shaped surfaces, *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 4, 277–280, 2005
- (5) 高橋徹, 平井哲郎, 佐藤大輔, 飯盛浩司, 松本敏郎, 3次元音響問題に関する isogeometric BEM に基づく形状感度解析, *計算数理工学論文集*, 18, 69–74, 2018
- (6) R.J. Adams, Physical and Analytical Properties of a Stabilized Electric Field Integral Equation, *IEEE TAP*, 52, 362–372, 2004
- (7) K. Cools, F.P. Andriulli, F. Olyslager and E. Michielssen, Improving the MFIE's accuracy by using a mixed discretization, *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, DOI: 10.1109/APS.2009.5172077, 2009