

Burton-Miller の定式化と同一の複素固有値を持つ Nyström 法に適した 2次元 Helmholtz 方程式の境界積分方程式について

A boundary integral equation suitable for the Nyström method having the same complex eigenvalues as the Burton-Miller formulation for the Helmholtz equation in 2D

三澤 亮太¹⁾, 西村 直志²⁾

Ryota MISAWA and Naoshi NISHIMURA

- 1) 京都大学大学院工学研究科 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C3 棟, E-mail: misawa.ryota.27u@kyoto-u.jp)
 2) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)

In this paper, we consider transmission problems for the Helmholtz equation in 2D, and propose a boundary integral equation free from hypersingular kernels so that it can be easily implemented with the Nyström discretization. Our main focus is to formulate a boundary integral equation in a manner that it has the same distribution of complex eigenvalues as the standard Burton-Miller equation. We formulate a boundary integral equation for transmission problems by adding a vanishing term to the standard Burton-Miller equation in a manner that the hypersingular kernels cancel. For the exterior Neumann problem case, this formulation is shown to yield the integral equations obtained by Yang⁽⁹⁾. We show the validity and performances of the proposed method with numerical examples.

Key Words: Boundary integral equations, Burton-Miller equation, Fictitious eigenvalues, Nyström method

1. 緒言

本論文では、無限領域における波動散乱問題に対する有力な数値解法として知られている境界積分方程式法、特に Nyström 法による離散化を行う方法について考える。Nyström 法は、数値積分点上の値を未知数として境界積分方程式の離散化を行う方法である。普通の境界積分方程式法と異なり基底関数を必要としない特徴を持つ。

よく知られているように、境界積分方程式法は「見かけの固有値」と呼ばれる、解くべき波動問題の固有値でない振動数を固有値として持ち、この振動数では唯一可解でなくなる問題を持つ。実数の範囲の見かけの固有値の回避策として、Burton-Miller の定式化⁽¹⁾がよく知られている。Burton-Miller の定式化はきわめて原理が明快であり、見かけの固有値の対策として広く用いられている。近年では、Burton-Miller の定式化は実数の範囲に見かけの固有値を持たないだけでなく、複素数の範囲に存在する見かけの固有値が実軸から遠くなるように定式化することが可能であること⁽²⁾、Burton-Miller の定式化や同様の固有値分布を持つ

single integral equation (SIE⁽³⁾) は、transmission 問題において他の定式化が被る実軸に近い見かけの複素固有値の影響を受けにくいことなどが分かって来ている^(4, 5)。このように、Burton-Miller の定式化は複素数の見かけの固有値分布の観点からも望ましいもので、見かけの固有値への対処法として極めて有力な定式化であると言える。

ところが、Burton-Miller の定式化は超特異作用素を含むため、実装においては超特異性を持つ積分核の適切な計算が必要となる。特に、Nyström 法による離散化の場合は、Galerkin 法のように部分積分によって特異性を下げることが困難であるため、超特異作用素を持たない境界積分方程式を用いることがより簡単であり、望ましい。

そこで、本論文では 2次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題に対し、以下の要件を満たす境界積分方程式を提案する。

- 見かけの複素固有値分布が Burton-Miller と同一である
- 超特異作用素を持たない境界積分方程式である

超特異性の消去や正則化に基づく境界積分方程式法は数多く存在する (e.g.,^(6, 7, 8, 9, 10))。本論文の方法は、文献^(6, 7)で扱われた、式を組み合わせることで特異性の打ち消しを行うタイ

プに属する. Transmission 問題については, 本論文の特殊な場合に相当する定式化⁽¹¹⁾が知られている以外は, 同一のものは著者らが知る限り見当たらない. 一方, 本論文のアイデアを外部 Neumann 問題に自然に拡張することが可能であり, それらの方法の一つは Yang⁽⁹⁾の提案した内部 Laplace 問題の法線微分を未知関数として追加する方法と一致することが示される(3.2節参照). 本論文は境界積分方程式の複素固有値の視点から transmission 問題の積分方程式の正則化を考察すると同時に, 既存の方法との関連性についても新たな知見を与えるものと言える.

本論文の構成は以下の通りである. 2節で, 2次元 Helmholtz 方程式の境界値問題の定式化と標準的な Burton-Miller の定式化を示す. 3節において本論文で提案する境界積分方程式と, その見かけの複素固有値を示す. 4節では, Hao らの Nyström 法⁽¹²⁾を用いて提案した境界積分方程式を実装し, いくつかの数値実験を行って, 提案方法の妥当性と性質に関する基礎的考察を行う. 5節で結論と今後の課題を示す.

2. 境界積分方程式の定式化

2.1. 2次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題および外部 Neumann 問題

本論文で考える境界値問題の定式化を示す. $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ を有界な散乱体, $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_2$ とし, $\Gamma = \partial\Omega_2$ とする. Ω_1 において入射波 u^{inc} を考える.

2次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題は

$$\Delta u + k_i^2 u = 0 \text{ in } \Omega_i \ (i = 1, 2) \quad (1)$$

$$u^+ = u^- (= u), \quad \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial u^+}{\partial n} = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial u^-}{\partial n} (= q) \text{ on } \Gamma \quad (2)$$

$$\text{Radiation condition for } u - u^{\text{inc}} \quad (3)$$

を満たす u を求める問題である. ここに, $k_i (i = 1, 2)$ は周波数 ω を用いて $k_i = \omega\sqrt{\epsilon_i}$, $\epsilon_i > 0$ とする. なお, 以上は主として電磁波波動散乱を想定した問題設定であり, ϵ_i は誘電率に対応し, $1/\sqrt{\epsilon_i}$ は各領域の波速を表す(透磁率は1とする). また, $\partial/\partial n$ は単位法線方向微分であり, n は Ω_2 から Ω_1 の向きを正とし, 上付き添字 $- (+)$ は $\Omega_2(\Omega_1)$ から Γ への境界 trace を表す.

同様に, 2次元 Helmholtz 方程式の外部 Neumann 問題は

$$\Delta u + k_1^2 u = 0 \text{ in } \Omega_1, \quad \frac{\partial u^+}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma \quad (4)$$

$$\text{Radiation condition for } u - u^{\text{inc}} \quad (5)$$

を満たす u を求める問題である.

以上の境界値問題の固有値は $u^{\text{inc}} \equiv 0$ の問題(斉次問題)が非自明解を持つような $\omega \in \mathbb{C}$ と定義される.

2.2. Burton-Miller の定式化 (BM)

境界値問題 (1)-(3) に対する, 境界値 u, q を未知数とする標準的な Burton-Miller の定式化(以下, BM と略す)を示す. そのために, 以下のポテンシャル表現を導入する.

$$U_k[u, q](x) = \int_{\Gamma} \left(\epsilon_k G_k(x, y) q(y) - \frac{\partial G_k(x, y)}{\partial n_y} u(y) \right) ds_y$$

ここに, G_k は波数 k の 2次元 Helmholtz 方程式の基本解であり, $k \neq 0$ のときは第1種0次 Hankel 関数 $H_0^{(1)}$ を用いて $G_k(x, y) = (i/4)H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$, $k = 0$ のときは Laplace 方程式の基本解 $G_0(x, y) = (-1/2\pi) \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ とする. また, ϵ_k は波数が k の領域の ϵ_i とし, 外部 Neumann 問題では1とする.

一般に, transmission 問題の境界積分方程式は補領域においてポテンシャル表現が恒等的にゼロになるという式を組み合わせで定式化される. 標準的な(斉次問題に対する)BM は以下の条件で与えられる.

$$-U_{k_1}^- [u, q] - \alpha \frac{\partial U_{k_1}^- [u, q]}{\partial n} = 0, \quad U_{k_2}^+ = 0 \quad (6)$$

ここに, α は非ゼロの虚部を持つ複素数である. 式 (6) で与えられる斉次積分方程式を陽に書くと以下ようになる.

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{I}}{2} - \mathcal{D}_{k_1} - \alpha \mathcal{N}_{k_1} & \epsilon_1 (\mathcal{S}_{k_1} + \frac{\alpha}{2} \mathcal{I} + \alpha \mathcal{D}_{k_1}^T) \\ -(\frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D}_{k_2}) & \epsilon_2 \mathcal{S}_{k_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

ここに, \mathcal{I} は恒等作用素であり他のものは以下で定義される.

$$\mathcal{S}_k q = \int_{\Gamma} G_k(x, y) q(y) ds_y, \quad \mathcal{D}_k u = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_k(x, y)}{\partial n_y} u(y) ds_y, \\ \mathcal{D}_k^T q = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_k(x, y)}{\partial n_x} q(y) ds_y, \quad \mathcal{N}_k u = \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G_k(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} u(y) ds_y.$$

式 (7) より明らかなように, BM(7) は超特異積分を含む作用素 \mathcal{N}_k を含む. 同様に, 外部 Neumann 問題に対する BM は, (6) および (7) のうち, U_{k_1} に関する項を抜き出して得られる.

BM(7) は, ω が元の transmission 問題の固有値でなく, さらに, 以下で与えられる内部インピーダンス問題

$$\Delta u + k_1^2 u = 0 \text{ in } \Omega_2, \quad u^- + \alpha \frac{\partial u^-}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma \quad (8)$$

の固有値でも, 外部 Dirichlet 問題

$$\Delta u + k_2^2 u = 0 \text{ in } \Omega_1, \quad u^+ = 0 \text{ on } \Gamma \quad (9)$$

$$\text{Radiation condition} \quad (10)$$

の固有値でもなければ, 自明解しか持たない. このように, 上記の内部インピーダンス問題と外部 Dirichlet 問題の固有値は, BM の見かけの固有値となる. ところが, $\text{Im } \alpha \neq 0$ であればそのような ω は実数の範囲には存在せず, 標準的な BM は実数の範囲に見かけの固有値を持たない. また, $\alpha = i/k_1$ と選ぶと見かけの固有値は実軸から遠く分布し⁽²⁾, 実数の ω における解析精度が良いため^(4, 5), 本論文ではこのように選ぶ.

3. Burton-Miller の定式化の改良

3.1. Transmission 問題の BM の改良

本節では, BM の持つ良い固有値分布を持ち, かつ超特異作用素を持たない境界積分方程式を導くための「補領域でゼロになる」組み合わせを考える. まず, 見かけの固有値を生む境界値問題は, (8) と (9)-(10) のように, 互いに独立な2つの境界値問題として現れることが望ましい. さもなくば, 見

かけの固有値はある transmission 問題の固有値となり、これまでの研究⁽⁴⁾から実軸に近いものが現れやすいと考えられる。そこで、(7)の持つ特性を残すためには、外部 Dirichlet 問題に対応する $U_{k_2}^+ = 0$ が必要であるとえられる。そこで、これを含み、かつ(6)で与えられる BM に対して超特異性を打ち消すように、新たに項を加えた以下の条件を考える。

$$-U_{k_1}^-[u, q] - \alpha \frac{\partial U_{k_1}^-[u, q]}{\partial n} + \alpha \frac{\partial U_{k_2}^+[u, q]}{\partial n} = 0, U_{k_2}^+ = 0 \quad (11)$$

この積分作用素を陽に書くと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} - \mathcal{D}_{k_1} - \alpha(\mathcal{N}_{k_1} - \mathcal{N}_{k_2}) & \epsilon_1 \mathcal{S}_{k_1} + \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)\alpha \mathcal{I}}{2} \\ -(\frac{\pi}{2} + \mathcal{D}_{k_2}) & \epsilon_2 \mathcal{S}_{k_2} + \alpha(\epsilon_1 \mathcal{D}_{k_1}^T - \epsilon_2 \mathcal{D}_{k_2}^T) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

(12)において、超特異性を持つ項は $\mathcal{N}_{k_1} - \mathcal{N}_{k_2}$ のように互いに打ち消すように現れる。特に2次元問題では、(12)には弱い特異性を持つ積分核しか現れず、Nyström法による離散化と相性が良い。以上のように、(11)の条件から導かれる(12)を Burton-Miller の定式化2(BM2)と呼ぶことにする。

実は、BM2の見かけの固有値は BM のものと同一になり、内部インピーダンス問題または外部 Dirichlet 問題の固有値となる。実際、 ω を作用素が(12)で与えられる積分方程式が非自明解 $u, q \neq 0$ を持つような周波数とし、 u, q を用いて定義される $U_{k_2}[u, q]$ を考えると次のようになる。

1. $U_{k_2} \equiv 0$ in Ω_1 が成り立つとき

- $U_{k_1} \equiv 0$ も Ω_2 において成り立つならば以下で定義される関数 v は元の斉次 transmission 問題の非自明解となる

$$v = \begin{cases} -U_{k_1} & \text{in } \Omega_1 \\ U_{k_2} & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

- $U_{k_1} \neq 0$ in Ω_2 ならば $v = U_{k_1}$ in Ω_2 は内部インピーダンス問題の非自明解

2. $U_{k_2} \neq 0$ in Ω_1 であれば $v = U_{k_2}$ in Ω_1 は外部 Dirichlet 問題の非自明解

したがって、BM2(12)が非自明解を持つ ω は、元の transmission 問題か、内部インピーダンスか外部 Dirichlet 問題の固有値となる。逆に、これらの境界値問題の固有値において BM2(12)が非自明解 u, q を持つことも、境界値問題の非自明解を用いて u, q を構成することにより示すことができるが、ここでは省略する。

なお、BM2 と似た定式化として

$$-U_{k_1}^- + U_{k_2}^+ = 0, U_{k_2}^+ = 0 \text{ or } U_{k_1}^- = 0$$

および

$$-\partial U_{k_1}^- / \partial n + \partial U_{k_2}^+ / \partial n = 0, U_{k_2}^+ = 0 \text{ or } U_{k_1}^- = 0$$

の条件により与えられる境界積分方程式と本質的に同じものが⁽¹¹⁾において提案されている。これらは、それぞれ(11)

において $\alpha = 0$ および $\alpha = \infty$ としたものを少し修正したものに対応する。上の定式化は(11)よりも簡素ではあるが、実数の範囲に見かけの固有値を持つ。

また、近年 junction を持つ多領域問題において考えられる積分表現を境界上ですべて足し合わせ、特異性を打ち消す正則化方法が提案されている⁽⁷⁾。一方、本論文の方法では複素固有値を考慮し、足し合わせでない $U_{k_2}^+ = 0$ を持つことが要点である。

3.2. 外部 Neumann 問題の BM の改良

外部 Neumann 問題の積分方程式に現れる $\mathcal{N}_{k_1} u$ を $\mathcal{N}_{k_1} u = (\mathcal{N}_{k_1} - \mathcal{N}_0)u + \mathcal{N}_0 u$ と分解し、外部 Neumann 問題の解の Dirichlet trace を Dirichlet 境界値とする Laplace 方程式の内部問題を考えることによって $\mathcal{N}_0 u$ の特異性を軽減する方法が知られている⁽⁹⁾。追加の未知関数が加わるので、これを決定するために内部問題の積分方程式を追加する必要がある。

この方法は、境界条件が不連続である transmission 問題に対する BM2 の定式化法の一つとみなすことができる。ここではこの視点から Yang の方法の他に外部 Neumann 問題に対して考えられるいくつかの定式化を考察する。そのために、外部 Neumann 問題の解を Ω_2 内部まで解を拡張した以下の境界値問題を考える。

$$\Delta u + k_1^2 u = 0 \text{ in } \Omega_1, \Delta u + k_2^2 u = 0 \text{ in } \Omega_2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial n} = 0, u^+ = u^- \text{ on } \Gamma \quad (14)$$

$$\text{Radiation condition for } u - u^{\text{inc}}. \quad (15)$$

すなわち、 Ω_1 と Ω_2 においてそれぞれ波数が k_1, k_2 の Helmholtz 方程式を満たし、 u は境界上で連続であるが、法線微分 q は不連続となるような境界値問題を考える (Fig. 1)。ここに、波数 k_2 の選択は任意である。以上のように、 $u^+ = u^- = u$ お

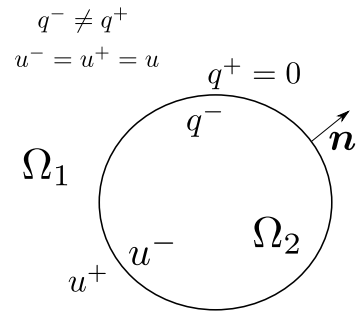


Fig. 1 Extension of the solution to formulate the BM2 for the exterior Neumann problems.

よび法線微分の内部極限 $\partial u^- / \partial n = q^-$ を新たに未知関数とすることにより、transmission 問題と同様に以下の境界積分方程式を導出できる。

$$-U_{k_1}^-[u, 0] - \alpha \frac{\partial U_{k_1}^-[u, 0]}{\partial n} + \alpha \frac{\partial U_{k_2}^+[u, q^-]}{\partial n} = 0, \quad (16)$$

$$U_{k_2}^+[u, q^-] = 0 \quad (17)$$

ここに、法線微分の外部極限は境界条件からゼロであることに注意されたい。以上の条件で与えられる境界積分方程式の

作用素は以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{I}}{2} - \mathcal{D}_{k_1} - \alpha(\mathcal{N}_{k_1} - \mathcal{N}_{k_2}) & \alpha(\frac{\mathcal{I}}{2} - \mathcal{D}_{k_2}^T) \\ -(\frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D}_{k_2}) & \mathcal{S}_{k_2} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Transmission 問題の場合と同様の考察により、作用素 (18) を係数行列とする境界積分方程式の見かけの固有値は、内部インピーダンス問題の固有値または波数 k_2 の外部 Dirichlet 問題の固有値となる。ただし、解を内部領域に拡張したことにより、対応する内部問題の固有値が、(13)-(15)の「真の」固有値として出現する可能性がある。これを踏まえ、以下の3種類の k_2 の選択に基づく定式化を比較する。(1) $k_2 = 0$ の場合 (BM20 と呼ぶ): 内部問題の支配方程式は Laplace 方程式となり、この方法は本小節冒頭で紹介した Yang⁽⁹⁾ の方法と一致する。境界が Γ -contour⁽¹³⁾ であればすべての ω が固有値となるが、そうでなければ固有値分布は (外部 Neuman 問題の) BM と同一になる。(2) $k_2 = k_1$ の場合 (BM2H と呼ぶ): (18) に現れる \mathcal{N} の項は消え、また Γ -contour は問題とされない。ただし、BM の固有値に加え内・外部 Dirichlet 問題の固有値が現れる。特に、内部 Dirichlet 問題の固有値は実軸に現れる。この性質は k_2 が k_1 の実数倍である場合も同様である。(3) $k_2 = ik_1$ の場合 (BM2K と呼ぶ): 支配方程式が $\Delta u - k_1^2 u = 0$ である内・外部 Dirichlet 問題の固有値が現れる。これらは、Helmholtz 方程式の Dirichlet 問題の固有値を複素平面内で $-\pi/2$ 回転させたものと一致し $\text{Re}\omega > 0$ の範囲には現れないため、BM2K の固有値は $\text{Re}\omega > 0$ の範囲で BM と一致する (ただし負の虚軸には固有値を追加する)。また Γ -contour も問題とされない。さらに、対応する基本解 (変形 Bessel 関数) は観測点と積分点の距離に応じて指数的に減衰するため、高速解法との相性が良いと考えられる。

4. 数値計算例

4.1. Hao らによる Nyström 法⁽¹²⁾

2次元問題に対し、境界積分方程式 (BM2) を Nyström 法により実装し、振る舞いを確認する。以下では、境界 Γ が滑らかであり $(x_1, x_2) = (x_1(\theta), x_2(\theta))$ と媒介変数表示できるとする。BM2(12)(18) に現れる積分は高々 \log の特異性を持つが、このような弱特異積分は通常の数値積分の台形公式に若干の修正を加えることで高精度に計算できる。Hao らの論文⁽¹²⁾ では、そのような数値積分公式を用いた Nyström 法がいくつか提示されており、本論文ではそれらのうち、実装が比較的容易でありながら良好な精度を示す Alpert の積分公式⁽¹⁴⁾ を用いた Nyström 法を利用し、離散化を行う。詳細は、Hao ら⁽¹²⁾ の section 4 を参照されたい。この方法は、弱特異積分の計算精度を数値積分公式の次数により制御・比較することが容易であるため、方程式の基礎的性質の観察に好都合である。そこで、本論文では上記の方法を採用するが、当然ながら他の Nyström 法や Galerkin 法による離散化も可能である。なお、本論文では線形方程式は直接解法により解く。

4.2. Transmission 問題, 円形散乱体

半径が 1.1 の円形散乱体の transmission 問題を考える。い

ま、 $\omega = 2\pi$ と固定し、 ϵ_1 と ϵ_2 を以下のように変化させる。

- case 1: $\epsilon_1 = 1$ と固定し、 ϵ_2 を (1, 25) で変化させる。
- case 2: $\epsilon_2 = 1$ と固定し、 ϵ_1 を (1, 25) で変化させる。

上の case 1, 2 は、それぞれ散乱体内部の波速が遅い場合と速い場合に相当し、case 1 では実軸に近い真の固有値、case 2 では同じく見かけの固有値が多数現れる問題設定である。なお、case 2 のような状況は例えば円環状の散乱体を考える場合に起こりうるため、物理的に有意義な問題設定である。

入射波として以下を考える。

$$u^{\text{inc}}(x) = \sum_{n=-50}^{50} J_n(k_1 r) e^{in\theta} \quad (19)$$

ここに J_n は n 次 Bessel 関数で r, θ は x の極座標表示である。このとき、解析解は有限級数の形で与えられ正確に計算することができる。そこで、以下で定義される、数値解の解析解に対する相対誤差を計算する。

$$\text{err} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N |u_i - u_i^{\text{ana}}|^2}{\sum_{i=1}^N |u_i^{\text{ana}}|^2}} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N |q_i - q_i^{\text{ana}}|^2}{\sum_{i=1}^N |q_i^{\text{ana}}|^2}} \right). \quad (20)$$

ここに、 u_i, q_i は境界上の点 $(x_1(2\pi i/N), x_2(2\pi i/N))$ 上の関数値、上付き添字 ana は解析解を示す。積分点数 N は $N = 100$ と $N = 500$ とし、Alpert の積分公式の次数は 2 次、6 次、10 次および 16 次のものを用いる。Fig. 2(a),(b) は case 1 の場合の、それぞれ $N = 100, N = 500$ の場合の相対誤差 (20) を示している。Fig. 2 には比較のため、作用素が以下で定義される Müller の定式化による解も plot している。

$$\begin{pmatrix} \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\epsilon_1\epsilon_2} \mathcal{I} - \left(\frac{\mathcal{D}_{k_1}}{\epsilon_1} - \frac{\mathcal{D}_{k_2}}{\epsilon_2} \right) & \mathcal{S}_{k_1} - \mathcal{S}_{k_2} \\ -(\mathcal{N}_{k_1} - \mathcal{N}_{k_2}) & \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \mathcal{I} + (\epsilon_1 \mathcal{D}_{k_1}^T - \epsilon_2 \mathcal{D}_{k_2}^T) \end{pmatrix}$$

Fig. 2 より、提案方法である BM2 は正しく解を与えていることが分かる。概して、Alpert の積分公式の次数が高いほど、積分点数 N が大きいほど解析精度は良好となり妥当な結果である。しかしながら、BM2 は Müller の定式化と同程度の精度を得るためにはより高次の積分公式や積分点数を必要とする傾向が見られ、BM2 の積分点数の増加および弱特異積分の計算精度に対する数値解の収束は Müller の定式化に比してやや劣る傾向が見られる。先行研究⁽⁴⁾ では、BM2 と同一の固有値分布を持つ SIE は Müller よりも精度が良い傾向が見られたが、BM2 は SIE よりも考える ω の近傍の固有値の影響を受けやすいようである。残念ながら、本論文ではこの原因の特定や回避に関する知見を得るには至らなかった。

Fig. 3 は case 2 の場合の相対誤差 (20) を示す。この場合も、傾向は概ね case 1 と同様であるが、Müller の定式化は実軸に近い見かけの固有値の影響で多数の ϵ_1 で精度が悪化している一方で、BM2 は安定した精度を得ており、これは BM2 の見かけの複素固有値分布の性質の良さによるものである。

4.3. 外部 Neumann 問題, 円形散乱体

次に、外部 Neumann 問題の数値例を示す。前小節と同様に、半径 1.1 (いわゆる Γ contour⁽¹³⁾ を避けている) の円形散

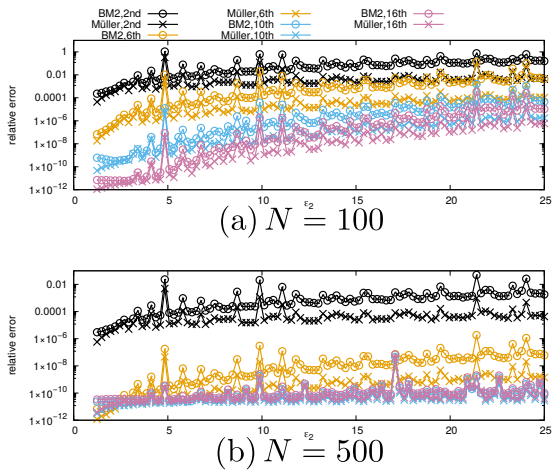


Fig. 2 ϵ_2 v.s. relative error in (20) for the case 1: $\epsilon_1 = 1$ and $\epsilon_2 > 1$ (BM2: \circ , Müller: \times). See the pdf version to interpret the colors in the figure.

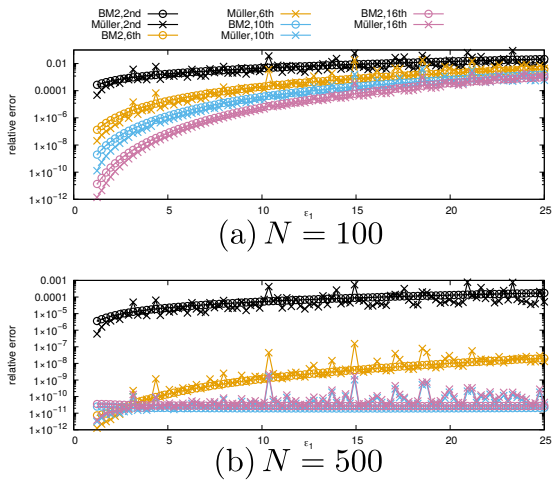


Fig. 3 ϵ_1 v.s. relative error in (20) for the case 2: $\epsilon_2 = 1$ and $\epsilon_1 > 1$ (BM2: \circ , Müller: \times). See the pdf version to interpret the colors in the figure.

乱体を考え、入射波は (19) とする。この場合、境界値 u と内側極限 q^- を解析的に求めることができる。なお、 q^- は BM2 を解き副次的に得られるもので、外部 Neumann 問題の解としては不要ではあるが、ここでは解析精度の指標として参考にする。そこで、以下で定義される相対誤差を考える。

$$\text{err}_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N |u_i - u_i^{\text{ana}}|^2}{\sum_{i=1}^N |u_i^{\text{ana}}|^2}}, \quad \text{err}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N |q_i^- - q_i^{-\text{ana}}|^2}{\sum_{i=1}^N |q_i^{-\text{ana}}|^2}}. \quad (21)$$

Fig. 4(a)(b) に ω を変化させたときの BM20, BM2H, BM2K の相対誤差 (21) を示す ((a),(b) それぞれにおいて、上図は u の相対誤差、下図は q^- の相対誤差を表す)。Fig. 4 より、BM2H は内部 Dirichlet 問題の実固有値に近い ω で極端に

精度が悪化していることがわかる。一方で、BM20 および BM2K は安定して良好な精度を示し、また僅かではあるが BM2K のほうが精度が良い場合が多い。

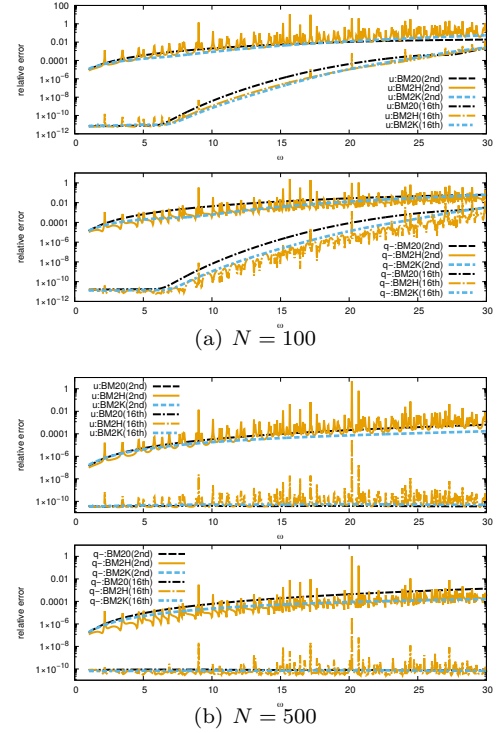


Fig. 4 ω v.s. relative error of u (upper) and q^- (lower). See the pdf version to interpret the colors in the figure.

4.4. 固有値分布

最後に半径 1.1 の円形散乱体の transmission 問題と外部 Neumann 問題に対する BM2 の固有値分布を示し、3 節の固有値に関する議論を数値的に確かめる。ここでは、transmission 問題は $\epsilon_1 = 4$, $\epsilon_2 = 1$ の場合 (すなわち実軸に近い真の固有値がほとんどない問題) を考える。Fig. 5(a), (b) はそれぞれ、transmission 問題に対する BM2(12) と外部 Neumann 問題に対する BM2(18) の固有値 (固有振動数) 分布を示す。積分点数は $N = 2000$ とし、固有値は文献 (4) 3 節と同様に櫻井杉浦法 (15) を用いて求めた。同図には半解析的に求めた標準的な BM の作用素の固有値もあわせて示した。なお、見かけの固有値と真の固有値を分離する形で計算することは可能であるが (16, 4)、ここでは真の固有値も見かけの固有値とともに下半平面に現れる標準的な定式化で計算している。Fig. 5(a) により、transmission 問題に対する BM2 の固有値分布は標準的な BM のものと同一であり、実軸から離れていることが分かる。外部 Neumann 問題の BM2 の固有値分布 Fig. 5(b) より、BM20, BM2K の固有値はいずれも BM の固有値と一致することがわかる (ただし、BM2K は図の plot の範囲外の虚軸上に固有値を持っている)。BM2H では BM の固有値に加え、内部および外部 Dirichlet 問題の固有値がそれぞれ実軸、複素下半平面に得られている。

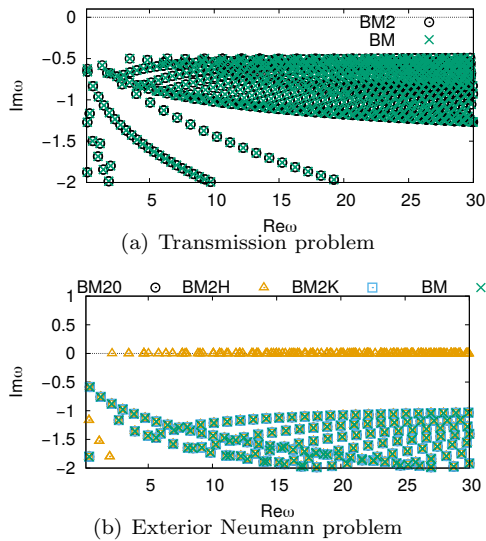


Fig. 5 Eigenvalue ω for (12)(subfigure (a)) and (18) (subfigure (b)). \times : eigenvalues for the standard BM. Note that both true and fictitious eigenvalues are included.

5. 結言

本論文では、transmission 問題の考察に基づき固有値の分布が標準的な Burton-Miller の定式化 (BM) と同一であるが、超特異性が打ち消された境界積分方程式 BM2 を提案し、Nyström 法により数値実装を行い基礎的考察を行った。いずれの積分方程式も正しく問題を解くことができ、また固有値分布も BM2H を除き $\text{Re } \omega > 0$ の範囲で標準的な BM と同一であることを確かめた。一方で、BM2 は Müller の定式化に比すると精度がやや劣る傾向が見られたが、本論文ではその原因の特定には至らなかった。一方、外部 Neumann 問題においては、BM2K は、僅かながら既存の BM20 より精度が良い場合が見られた。このことは、BM2 の性質について引き続き検討を行うことの動機づけを与える。そこで、今後の課題として、上記の問題の原因の特定と、より実用的な問題 (複雑な形状や 3 次元問題) における挙動の確認を行うことが挙げられる。また、本論文では Nyström 法を考えたが、提案方法は境界積分方程式そのものの定式化であるため、他の離散化法にも適用可能である。したがって、他の離散化方法との組み合わせにおける挙動についても検討する余地がある。

謝辞 本研究は JSPS 科研費 19K20285 の助成を受けました。ここに謝意を記します。

参考文献

- (1) A. J. Burton and G. F. Miller, The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 323 (1971), pp. 201–210.
- (2) C.-J. Zheng, H.-F. Gao, L. Du, H.-B. Chen, and C. Zhang, An accurate and efficient acoustic eigensolver based on a fast multipole BEM and a contour integral method, *J. Comput. Phys.*, 305 (2016), pp. 677–699.
- (3) R. E. Kleinman and P. A. Martin, On single integral equations for the transmission problem of acoustics, *SIAM J. Appl. Math.*, 48 (1988), pp. 307–325.
- (4) 三澤亮太, 西村直志, 見かけの複素固有値の分布に基づいた 2 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題における単一積分方程式法の考察, *計算数理工学論文集*, 16 (2016), pp. 73–78.
- (5) 三澤亮太, 西村直志, 2 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題に対する種々の境界積分方程式の性質について, in *計算力学講演会講演論文集 2017.30*, 2017, p. 276.
- (6) C. Müller, *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1969.
- (7) E. Spindler, Second kind single-trace boundary integral formulations for scattering at composite objects, PhD thesis, ETH Zurich, 2016.
- (8) Y. Liu and F. J. Rizzo, A weakly singular form of the hypersingular boundary integral equation applied to 3-D acoustic wave problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 96 (1992), pp. 271–287.
- (9) S. A. Yang, A boundary integral equation method for two-dimensional acoustic scattering problems, *J. Acoust. Soc. Am.*, 105 (1999), pp. 93–105.
- (10) A. Buffa and R. Hiptmair, Regularized combined field integral equations, *Numer. Math.*, 100 (2005), pp. 1–19.
- (11) G. T. Schuster and L. C. Smith, A comparison among four direct boundary integral methods, *J. Acoust. Soc. Am.*, 77 (1985), pp. 850–864.
- (12) S. Hao, A. H. Barnett, P. G. Martinsson, and P. Young, High-order accurate methods for Nyström discretization of integral equations on smooth curves in the plane, *Adv. Comput. Math.*, 40 (2014), pp. 245–272.
- (13) M. A. Jaswon, Integral equation methods in potential theory. I, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 275 (1963), pp. 23–32.
- (14) B. K. Alpert, Hybrid Gauss-trapezoidal quadrature rules, *SIAM J. Sci. Comput.*, 20 (1999), pp. 1551–1584.
- (15) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and K. Kimura, A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, *JSIAM Lett.*, 1 (2009), pp. 52–55.
- (16) R. Misawa, K. Niino, and N. Nishimura, Boundary integral equations for calculating complex eigenvalues of transmission problems, *SIAM J. Appl. Math.*, 77 (2017), pp. 770–788.