

Polynomial chaos 展開を用いた確率有限要素法による バラスト材の力学挙動の空間的ばらつきを考慮した道床沈下解析

BALLAST SETTLEMENT ANALYSIS OF RAILWAY TRACK WITH SPATIAL UNCERTAINTY OF MECHANICAL BEHAVIOR USING STOCHASTIC FEM WITH POLYNOMIAL CHAOS EXPANSION

紅露一寛¹⁾, 上平健太²⁾, 阿部和久³⁾

Kazuhiro KORO, Kenta KAMITAIRA and Kazuhisa ABE

1) 新潟大学工学部工学科 (社会基盤工学) (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

2) 新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)

3) 新潟大学工学部工学科 (社会基盤工学) (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp)

In order to implement settlement analysis of ballasted track with the spatial variation of mechanical behavior using the stochastic FEM with polynomial chaos (PC) expansion, we investigate the computational performance of two simulation method; the spectral stochastic FEM with non-intrusive stochastic process (NISP-SSFEM) and the stochastic collocation method. The spatial variation of the material parameters is prescribed with Karhunen-Loeve expansion. The simulation using the NISP-SSFEM is affected to computational setting in numerical integration on random variables. The stochastic collocation method, which is similar to the Monte Carlo method, enables us to robustly evaluate the influence of spatial variation of the material parameters on the simulated ballast settlement, in less computational cost.

Key Words: Ballast settlement analysis, elastoplastic FEM, spatial variation of material parameters, polynomial chaos expansion, NISP-SSFEM, stochastic collocation method

1. はじめに

国内外の鉄道においては、列車荷重の分散や騒音低減、排水性の高さおよび経済性の高さゆえに、バラスト材を道床材としてまくらぎ下に敷設した軌道(バラスト軌道)が広く用いられている。バラスト材は粒径が数 cm~十数 cm の碎石粒子の集合体であるため、列車の繰り返し走行によって粒子配置の不可逆的な変化が生じ、鉛直方向の不可逆変位(道床沈下変位)に代表される軌道狂いが生じることとなる。軌道狂いの定量予測に向けた数理モデル化も試みられており、特に著者らはバラスト道床を連続体としてモデル化し、不可逆変位を道床の弾塑性変形により生じるものとした解析モデルの活用を提案している⁽¹⁾。

なお、バラスト道床は、碎石粒子の粒径が大きいこともあり、バラスト道床部を弾塑性連続体とみなした場合の力学挙動には、空間的なばらつきが発現すると考えられる。この場合、力学挙動の空間的ばらつきは解析に用いる材料物性値の空間的ばらつきとして考慮せねばならない。著者らは、cyclic

densification モデル⁽²⁾でバラスト道床の繰り返し変形挙動を表現する場合を対象に、バラスト材の弾塑性挙動の空間的ばらつきがバラスト道床沈下解析結果に及ぼす影響を評価するために、bounding body 近似に基づくスペクトル確率・弾塑性有限要素解析を試みた⁽³⁾。しかし、文献⁽³⁾では、バラスト材の弾性挙動を線形化した上で、Young 率の空間的ばらつきの影響を評価するにとどまっていた。Cyclic densification モデルでは、非線形弾性挙動が仮定され、かつ、塑性挙動を調整する材料物性値も数多く用いられているため、文献⁽³⁾の検討では不十分と言わざるを得ない。一方、このような状況では、モンテカルロ法を用いて材料物性値の空間的ばらつきの影響を評価することも視野に入れ、著者らも検討した⁽⁴⁾が、計算負荷や精度について未知数の部分も大きい。

そこで本研究では、cyclic densification モデルの材料物性値の空間的ばらつきを考慮したバラスト道床沈下解析を対象に、解析によって評価される物理応答の確率空間での挙動を polynomial chaos (PC) 展開を用いて表現した確率有限要素解析の有効性について検討する。具体的には、接線弾塑

性係数と内部応力・状態変数を polynomial chaos 展開 (PC 展開) した上で、その展開係数を数値積分で直接計算し、PC を用いて確率空間での離散化を行う Non-Intrusive Stochastic Projection (NISP)-スペクトル確率有限要素法⁽⁵⁾ と、確率有限要素法解析によって評価される物理応答 (変位) を予め PC 展開して定式化しておき、その展開係数を最小二乗法により計算することで、解析により評価される物理応答の期待値や標準偏差を効率計算することを意図した stochastic collocation method⁽⁶⁾ の 2 種類の方法を対象に、バラスト道床沈下解析における有効性について、数値実験を通して検討する。最後に、各種材料物性値の空間的ばらつきが道床沈下変位解析結果に及ぼす影響について、モンテカルロ法に基づく確率有限要素解析を行った場合と同様に定量評価できることを示す。

2. バラスト道床の繰り返し弾塑性挙動モデル

本研究では、バラスト材の繰り返し変形・沈下挙動を、cyclic densification モデル⁽²⁾ でモデル化する。当該モデルでは、無荷重時から最大荷重作用時に至るまでのつり合い解を求めるための「単調載荷モデル」と、所定の応力 (荷重) 振幅またはひずみ (変位) 振幅の下で、載荷・除荷単位繰り返し当たりの物理量・内部状態変数の変化量を直接定式化し解析計算により評価する「繰り返し載荷モデル」の 2 種類の構成モデルからなる。

2.1. 単調載荷モデル

単調載荷過程における構成モデル (単調載荷モデル) では、構成式は亜弾性を仮定して次式で与える。

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}(p) \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p \right) \quad (1)$$

ここで、制御パラメータを t であり、 $\dot{\cdot}$ は t に関する物質微分とする。 σ_{ij} は応力テンソル、 ε_{kl} は全ひずみ、 ε_{kl}^p は塑性ひずみであり、弾性定数テンソル $D_{ijkl}(p)$ は次式で定義する。

$$D_{ijkl}(p) = \frac{3K_t}{2(1+\nu)} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + 2\nu\delta_{ij}\delta_{kl} \right], \quad (2)$$

$$K_t = K_{ref} \left(\frac{p}{p_{ref}} \right)^{1-n^e} \quad (3)$$

$p = \sigma_{kk}/3$ であり、 ν は Poisson 比、 K_{ref} 、 n^e 、 p_{ref} は材料物性値である。なお、式 (3) の K_t は式 (4) でも用いられる p_{num}^t を用いて初期剛性を与えて実際の応力積分計算を行っている。

塑性ひずみは、摩擦すべり、体積収縮、引張破壊の 3 つのメカニズムのもと、次式の降伏条件 f^f 、 f^c 、 f^t を各々満たすように発現するものとする。

$$\begin{aligned} f^f(q, p, \kappa_0^p) &= -\frac{q}{p - p_{num}^t} - H^f(\kappa_0^p) = 0, \\ f^c(p, \varepsilon_{vol,c,0}) &= \frac{p}{P_0} - H^c(\varepsilon_{vol,c,0}) = 0, \\ f^t(p) &= p - p^t = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$q = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ 、 $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$ である。また、 p_{num}^t は無応力時の特異性を解消するためのパラメータである。

式 (4) の硬化関数は次式で定義する。

$$\begin{aligned} H^f(\kappa_0^p) &= H_0 + (H_m - H_0)[1 - \exp(-\zeta^f \kappa_0^p)], \\ H^c(\varepsilon_{vol,c,0}) &= 1 + \zeta^c \varepsilon_{vol,c,0}^p \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 κ_0^p 、 $\varepsilon_{vol,c,0}^p$ はそれぞれ摩擦すべり、体積圧縮に関する塑性乗数であり、 p^t は引張破壊の降伏平均応力、 P_0 、 H_0 、 H_m 、 ζ^f 、 ζ^c は材料物性値である。

塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ は、非関連流動則により次式で与える。

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\kappa}_0^p \frac{\partial G^f(q, p, \kappa_0^p)}{\partial \sigma_{ij}} \\ &\quad + \dot{\varepsilon}_{vol,c,0}^p \frac{\partial G^c(p, \varepsilon_{vol,c,0}^p)}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{\varepsilon}_{vol,t,0}^p \frac{\partial G^t(p)}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\dot{\varepsilon}_{vol,t,0}^p$ は引張破壊に関する塑性乗数速度である。また、塑性ポテンシャル G^f 、 G^c 、 G^t は次式で与える。

$$\begin{aligned} G^f(p, q, \kappa_0^p) &= q + D^f(\kappa_0^p)p, \\ D^f(\kappa_0^p) &= D_0 + (D_m - D_0)[1 - \exp(-\zeta^f \kappa_0^p)], \\ G^c(p, \varepsilon_{vol,c,0}^p) &= -p + H^c(\varepsilon_{vol,c,0}^p)P_0, \\ G^t(p) &= f^t(p), \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 D_0 、 D_m は材料物性値である。

2.2. 繰り返し載荷モデル

繰り返し載荷過程における構成モデル (繰り返し載荷モデル) では、構成式は次式で与える。

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dN} = D_{ijkl}(p) \left(\frac{d\varepsilon_{kl}}{dN} - \frac{d\varepsilon_{kl}^p}{dN} \right) \quad (8)$$

なお、サイクル数 N は履歴を表現するパラメータとなる。

塑性ひずみ ε_{ij}^p は、単調載荷モデル同様、摩擦すべり・体積圧縮・引張破壊の 3 つの破壊メカニズムを考慮した上で、非関連流動則により次式で与える。

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dN} &= \frac{d\kappa^p}{dN} \frac{\partial g^f(q, p, \kappa^p)}{\partial \sigma_{ij}} \\ &\quad + \frac{d\varepsilon_{vol,c}^p}{dN} \frac{\partial g^c(p, \varepsilon_{vol,c}^p)}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{d\varepsilon_{vol,t}^p}{dN} \frac{\partial g^t(p)}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、塑性ポテンシャル g^f 、 g^c 、 g^t は次式で与える。

$$\begin{aligned} g^f(p, q, \kappa^p) &= q + d^f(\kappa^p)p, \\ d^f(\kappa^p) &= d_0 + (d_m - d_0)[1 - \exp(-\zeta^f \kappa^p)], \\ g^c(p, \varepsilon_{vol,c}^p) &= -p + h^c(\varepsilon_{vol,c}^p)p_0, \\ g^t(p) &= f^t(p), \end{aligned} \quad (10)$$

なお、 p_0 、 d_0 、 d_m は材料物性値である。

式 (9) において、 $\varepsilon_{vol,t}^p$ は引張破壊の塑性乗数であり、式 (4) 第 3 式を満たすようにその増分量が定められる。また、 κ^p 、 $\varepsilon_{vol,c}^p$ は、それぞれ摩擦すべり・体積圧縮の塑性乗数であり、繰り返し載荷モデルでは、Perzyna の超過応力の概念に基づき次式を N について積分することで与えられる。

$$\frac{d\kappa^p}{dN} = \alpha^f \left\langle -\frac{q}{p - p_{num}^t} - h_{sh}^f(\kappa^p) \right\rangle^{\gamma^f} \quad (11)$$

$$\frac{d\varepsilon_{vol,c}^p}{dN} = \alpha^c \left\langle \frac{p}{p_0} - h_{sh}^c(\varepsilon_{vol,c}^p) \right\rangle^{\gamma^c} \quad (12)$$

なお、 $\langle \cdot \rangle$ は Macaulay bracket であり、 α^f , α^c , γ^f , γ^c は材料物性値である。

Shakedown 応力 h_{sh}^f , h_{sh}^c は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} h_{sh}^f(\kappa^p) &= h_0 + (h_m - h_0)[1 - \exp\{-\eta^f \cdot (\kappa^p - \kappa_0^p)\}] \\ h_{sh}^c(\varepsilon_{vol,c}^p) &= 1 + \eta^c(\varepsilon_{vol,c}^p - \varepsilon_{vol,c,0}^p) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 η^f , η^c , h_0 , h_m は材料物性値である。

3. 弾塑性有限要素法を用いたバラスト道床沈下解析

前節で示したように、構成モデルとして用いる cyclic densification モデルは、2種類の構成モデル（単調荷重モデル・繰返し荷重モデル）からなる。そのため、準静的条件下で仮想仕事式を有限要素法により解く際には、応力積分の変数に注意する必要がある。

単調荷重過程では、積分変数をパラメータ t として後退 Euler 法で応力積分を実行する。すなわち、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C_{ijkl}^{ep(m)} d\varepsilon_{kl(t+\Delta t)}^{(m)} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} b_{i(t+\Delta t)} \delta u_i d\Omega \\ + \int_{\Gamma_p} p_{i(t+\Delta t)} \delta u_i d\Gamma_p - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(m)} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 b_i , p_i は体積力、表面力であり、 δu_i , $\delta\varepsilon_{ij}$ はそれぞれ仮想変位、仮想ひずみである。また、 Ω は領域、 Γ_p は表面力規定境界であり、部分境界 Γ_u では変位は $u_i = \bar{u}_{i(t+\Delta t)}$ で既知であるものとする。 $C_{ijkl}^{ep(m)}$ は接線弾塑性係数である。

一方、繰返し荷重過程では、制御変数をサイクル数 N に定め、刻み幅 ΔN に設定して仮想仕事式を離散化した後、後退 Euler 法を用いて応力積分を実行する。その結果、次式を有限要素法で離散化して繰返し解くこととなる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C_{ijkl}^{ep(m)} d\varepsilon_{kl(N+\Delta N)}^{(m)} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} b_{i(N+\Delta N)}^{(cyc)} \delta u_i d\Omega \\ + \int_{\Gamma_p} p_{i(N+\Delta N)}^{(cyc)} \delta u_i d\Gamma_p - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(m)} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

なお、 $b_i^{(cyc)}$, $p_i^{(cyc)}$ はそれぞれ1回の荷重・除荷サイクルにおける体積力、表面力の最大値である。 $C_{ijkl}^{ep(m)}$ は接線弾塑性係数である。

4. NISP 法を援用したスペクトル確率・弾塑性有限要素法 (NISP-SSFEM)

Polynomial chaos(PC) を用いた確率有限要素法として、最初に NISP(Non-Intrusive Stochastic Projection) 法を援用したスペクトル確率有限要素法 (NISP-SSFEM)⁽⁵⁾ について説明する。連続体とみなしたバラスト材の変形挙動を cyclic densification モデルでモデル化し、準静的条件下でのつり合い問題の有限要素解析を行う場合について考える。材料の力学挙動の空間的ばらつきは、構成モデルの材料物性値の空間的ばらつきとして考慮されることに留意して、構成モデルの材料物性値に空間的ばらつきが存在するものとした上で仮想仕事式を有限要素法で離散化すると、次の接線剛性方程式を得る。

$$[{}^n \mathbf{K}^{(j)}(\omega)] \{d\mathbf{U}^{(j+1)}(\omega)\} = \{{}^n \bar{\mathbf{F}}^{ext}\} - \{{}^n \mathbf{F}^{int(j)}(\omega)\}, \quad (16)$$

ここで、 ω は確率事象、 \mathbf{K} は接線剛性行列、 $d\mathbf{U}$ は変位増分ベクトル、 $\bar{\mathbf{F}}^{ext}$ は外力ベクトル、 \mathbf{F}^{int} は内力ベクトルである。 n は荷重制御ステップ数、 (j) は Newton-Raphson 反復回数である。

ここで、 \mathbf{K} , \mathbf{F}^{int} , $d\mathbf{U}$ を Polynomial Chaos(PC) 展開する。

$${}^n \mathbf{K}^{(j)}(\omega) = \sum_{m=0}^{N_{PC}} {}^n \mathbf{K}_m^{(j)} \Psi_m(\omega), \quad (17)$$

$${}^n \mathbf{F}^{int(j)}(\omega) = \sum_{m=0}^{N_{PC}} {}^n \mathbf{F}_m^{int(j)} \Psi_m(\omega),$$

$$d\mathbf{U}^{(j+1)}(\omega) = \sum_{l=0}^{N_{PC}} d\mathbf{U}_l^{(j+1)} \Psi_l(\omega), \quad (18)$$

式(17), (18)を式(16)に代入し、両辺に Ψ_i を乗じて期待値を考えると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N_{PC}} \sum_{l=0}^{N_{PC}} \langle \Psi_i \Psi_m \Psi_l \rangle [{}^n \mathbf{K}_m^{(j)}] \{d\mathbf{U}_l^{(j+1)}\} \\ = \langle \Psi_i \rangle \{{}^n \bar{\mathbf{F}}^{ext}\} - \sum_{m=0}^{N_{PC}} \langle \Psi_i \Psi_m \rangle \{{}^n \mathbf{F}_m^{int(j)}\}, \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、 $i = 0, 1, \dots, N_{PC}$ である。

\mathbf{K} , \mathbf{F}^{int} の PC 展開係数は、式(17)の両辺に Ψ_i を乗じて期待値を考えることで次式で評価できる。

$$\begin{aligned} [{}^n \mathbf{K}_m^{(j)}] &= \frac{1}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \langle [{}^n \mathbf{K}^{(j)}(\omega)] \rangle \\ &= \frac{1}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \sum_e \left[\int_{V_e} [\mathbf{B}_e^T] \langle [{}^n \mathbf{C}_e^{ep(j)}(\omega)] \rangle [\mathbf{B}_e] dV \right] \\ \{{}^n \mathbf{F}_m^{int(j)}\} &= \frac{1}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \langle \{{}^n \mathbf{F}^{int(j)}(\omega)\} \rangle \\ &= \frac{1}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \sum_e \left\{ \int_{V_e} [\mathbf{B}_e^T] \langle \{\sigma_e^{(j)}(\omega)\} \rangle dV \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 σ_e は要素での応力、 $[{}^n \mathbf{C}_e^{ep(j)}]$ は要素での接線弾塑性係数テンソルである。

なお、式(20)において、 $\langle [{}^n \mathbf{C}_e^{ep(j)}(\omega)] \rangle$, $\langle \{\sigma_e^{(j)}(\omega)\} \rangle$ の計算においては、空間的ばらつきを有する材料物性値 \bar{p} は、 n 個の材料物性値のうちの一つであるものとして（すなわち $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, \bar{p}\}$ として）、 \bar{p} を次式の Karhunen-Loeve 展開 (KL 展開) で与えるものとする。

$$\bar{p}(\omega, \mathbf{x}) = \langle \bar{p} \rangle \left[1 + \sum_{k=1}^{N_{KL}} \xi_k(\omega) \sqrt{\lambda_k} f_k(\mathbf{x}) \right] \quad (21)$$

ただし、 ξ_k は標準正規分布に従う互いに独立な確率変数、 λ_k , $f_k(\mathbf{x})$ はそれぞれ共分散関数 C の固有値と固有関数である。このとき、 ξ_k の関数となる polynomial chaos は Hermite 多項式から与えることができる⁽⁷⁾。さらに、 ξ_k についての積分計算は数値積分で処理する。本研究では、Gauss-Legendre 公式を適用することとした。

5. Stochastic collocation method

Stochastic collocation method⁽⁶⁾ では、弾塑性解析における材料物性値の空間的ばらつきを式(21)でモデル化するものとして、 N_d 個の材料物性値を正規乱数と式(21)とを用いて生

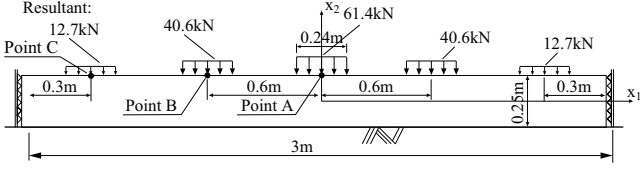


Fig. 1 Problem description of ballast settlement analysis.

成し、それを他のばらつきを有しない材料物性値とあわせて与え、決定論的解析を N_d 回実行する。その結果、所定の作用荷重ステップ（サイクル）に対する $u_i^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, N_d$) が得られているものとする。

まず、 $u_i^{(j)}$ を polynomial chaos Ψ_l を用いて PC 展開しておく。

$$u_i^{(j)} = \sum_{l=0}^{N_{PC}} U_{i,l} \Psi_l(\xi^{(i),j}). \quad (22)$$

このとき、式 (22) における PC 展開係数 $U_{i,l}$ ($l = 0, 1, \dots, N_{PC}$) を最小二乗法を用いて求める。最小化する残差 R は次式で定義する。

$$R(U_{i,l}) = \sum_{j=1}^{N_d} \left[u_i^{(j)} - \sum_{l=0}^{N_{PC}} U_{i,l} \Psi_l(\xi^{(i),j}) \right]^2 \quad (23)$$

式 (23) において $U_{i,l}$ に関する最小化条件を課すと、 $U_{i,l}$ に関する次の連立一次方程式を得る。 $l = 0, 1, \dots, N_{PC}$ として、

$$\sum_{m=0}^{N_{PC}} \left[\sum_{j=1}^{N_d} \Psi_l(\xi^{(i),j}) \Psi_m(\xi^{(i),j}) \right] U_{i,m} = \sum_{j=1}^{N_d} \Psi_l(\xi^{(i),j}) u_i^{(j)}. \quad (24)$$

式 (24) を数値的に解くことで、各荷重ステップ（サイクル）における変位の PC 展開が構成できる。

6. PC 展開を用いた 2 種類の解析手法の有効性

6.1. 解析条件

バラスト材の力学挙動の空間的ばらつきが道床沈下解析結果に及ぼす影響を評価するにあたり、4, 5 節で説明した 2 種類の PC 展開に基づく確率有限要素法の有効性を検討するために、Fig.1 に示す解析領域の繰り返し載荷解析を行なった。解析領域は、まくらぎ間隔 0.6m で幅 0.24m のまくらぎ 5 本を配置する領域を設定した。各まくらぎ位置ではまくらぎ幅で等分布に作用する表面力を与えた。各まくらぎ位置での作用力の大きさは、先行研究での鉛直載荷解析の結果から荷重分担率を求め、それを作用合力 170kN に乗じて与えている。領域左右端の部分境界では面外変位拘束、領域底部の部分境界では完全変位拘束の各境界条件を設定している。

バラスト材の材料物性値の期待値は、Table 1 に示す値に設定した。材料物性値の空間的ばらつきは、解析においてはいずれか 1 種類のみをばらつきを考慮することとし、式 (21) の Karhunen-Loeve 展開で与えることとした。式中で用いる共分散関数 $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は次式で与える。

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma^2 \exp \left[-\frac{|y_1 - x_1|}{b_1} - \frac{|y_2 - x_2|}{b_2} \right], \quad (25)$$

ここで、 \mathbf{x}, \mathbf{y} は内点の位置ベクトルであり、 σ は空間的ばらつきを考慮する材料物性値の標準偏差である。 b_1, b_2 は

Table 1 Expected value of material parameter in the cyclic densification model.

K_{ref}	110(MPa)	ζ^c	250	α^f	5×10^{-3}
p_{ref}	-100(kPa)	D_0	0.2	α^c	1×10^{-3}
n^e	0.35	D_m	1.1	γ^f	4.0
ν	0.09	p_0	-50(kPa)	γ^c	3.0
P_0	-60(kPa)	h_0	0.7	d_0	-0.5
H_0	1.0	h_m	1.85	d_m	-0.5
H_m	1.85	η^f	120		
ζ^f	80	η^c	2000		

それぞれ x_1, x_2 軸方向の相関長さである。解析においては、 $\sigma = 0.1 \cdot \langle \bar{p} \rangle$ (変動係数 10%相当)、相関長さは $b_1 = b_2 = 1(\text{m})$ に設定し、KL 展開の展開項数は $N_{KL} = 4$ とした。

なお、以下においては、図示するバラスト上面変位 u は下向きを正としており、その期待値 $\langle u \rangle$ と標準偏差 σ_u は u の PC 展開係数 U_l ($l = 0, 1, \dots, N_{PC}$) より次式で評価できる。

$$\langle u \rangle = U_0, \quad \sigma_u = \sum_{l=1}^{N_{PC}} U_l^2. \quad (26)$$

6.2. NISP-SSFEM を適用する上での問題点

まず、NISP-SSFEM を適用して力学挙動の空間的ばらつきを考慮した確率有限要素解析を行なう場合の問題点について明らかにする。ここでは単調載荷過程の解析を対象に、材料物性値 K_{ref} の空間的ばらつきについて考える。Fig.2 は、接線弾塑性係数および内部応力の期待値計算のための Gauss-Legendre 積分の積分区間の設定が解析結果 (Fig.1 中の A 点における鉛直変位の期待値と標準偏差) に及ぼす影響を示したものである。なお、数値積分点数は 4 つの確率変数各々で $N_g = 4$ に設定した。そのため、荷重増分解析において生成する材料物性値の組み合わせは $4^4 = 256$ 通りとなり、それと同数の応力および内部状態変数を各要素積分点で保存・更新しながら解析を進めることとなる。積分区間の広さは接線剛性行列および不釣り合い力ベクトルの評価精度に直結するため、積分区間を小さく設定することや数値積分点数を小さく設定することは、増分解析の繰り返し計算を破綻させるリスクを高めるものであるが、今回の設定条件下では設定した積分区間のいずれの場合も解析は破綻せず、鉛直変位の期待値、標準偏差ともにさほど大きな影響を受けていない。ただし、積分点数の設定如何では解析が不安定となることが懸念される。

NISP-SSFEM の解析の不安定さは、Fig.3 のように数値積分点数を変化させると明瞭に現れている。今回の解析では、積分区間は $[-7.2, 7.2]$ とかなり広く設定したこともあり、積分点数を変化させると解析途中で反復計算が収束しなくなり、計算が破綻する結果を得た。この計算の異常終了は、積分区間の広さも関係していると思われるが、積分点数は期待値計算の積分精度に直結することから、極端に少ない積分点数で解析を実行することは回避すべきである。その一方で、荷重増分解析においては要素内各積分点における応力および内部状態変数を保存する必要があることから、解析時の使用

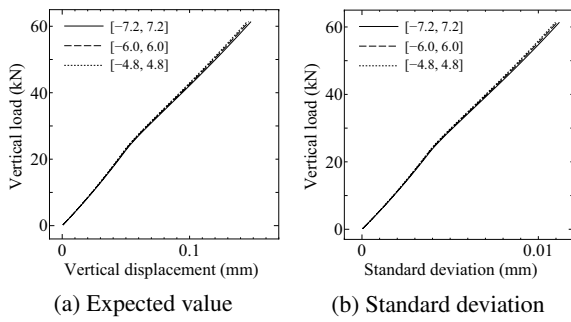


Fig. 2 Influence of the interval of Gauss-Legendre formula on the vertical displacement (Point A) calculated using NISP-SSFEM.

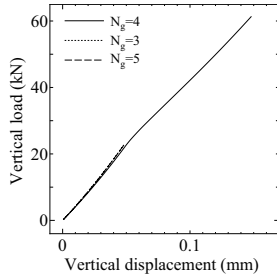


Fig. 3 Influence of the number of integration points N_g on the vertical displacement (Point A) calculated using NISP-SSFEM.

メモリが $N_g^{N_{KL}}$ (N_g : 積分点数, N_{KL} : KL 展開の確率変数の総数) に比例して急激に増大する。以上の点から、当該問題における NISP-SSFEM は、解析時の計算の安定性と使用メモリの面で問題点を抱えていることがわかる。

6.3. Stochastic collocation method の有効性

次に、stochastic collocation method を用いた確率有限要素法を用いた場合の計算結果について考察する。Fig.4, Fig.5, Fig.6 は、材料物性値のうち K_{ref} , H_0 , h_0 のいずれか一種類の空間的ばらつきを考慮した場合におけるバラスト上面 A 点の鉛直変位の期待値および標準偏差を示したものである。Stochastic collocation method を用いた場合、解析によって得られる変位応答を PC 展開により定義しておき、 N_d 通りの解析結果を用いて最小二乗法で変位の PC 展開係数を計算し、そこから期待値や標準偏差を求める。そのため、計算負荷軽減の観点からは、解析結果のパターン数 N_d が小さく設定できることが望ましい。本節で空間的ばらつきを考慮した K_{ref} は弾性挙動、 H_0 は単調荷重モデルにおける摩擦すべりの初期強度、 h_0 は繰り返し荷重モデルにおける摩擦すべりの初期強度をそれぞれ制御する材料物性値であり、次節でも示すように、これらは他の物性値に比べてその空間的ばらつきが変位解に及ぼす影響の大きなものである。Fig.4-Fig.6 の結果からは、 N_d を比較的小さく設定しても鉛直変位の期待値、標準偏差ともにその精度は大きな影響を受けず、比較的小さな計算負荷でもモンテカルロ法適用の場合と同様に材料物性値の空間的ばらつきを考慮したバラスト道床沈下解析を実行できることがわかった。なお、 $N_d = 50$ の場合の結果は他の場合との間に差が認められる。これは、さほど大きくない N_d の値の下で正規乱数を生成し計算に用いていることに起因すると考えられるが、その詳細は不明である。

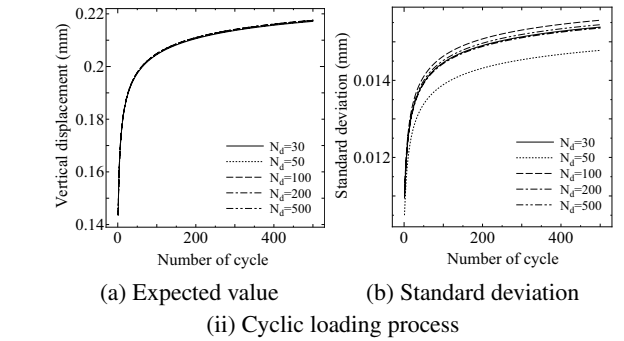
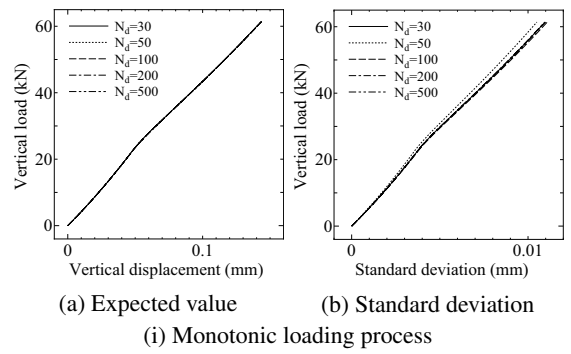


Fig. 4 Influence of the number of simulated data N_d on the vertical displacement (Point A) calculated using stochastic collocation method. The spatial variation of the parameter K_{ref} is considered.

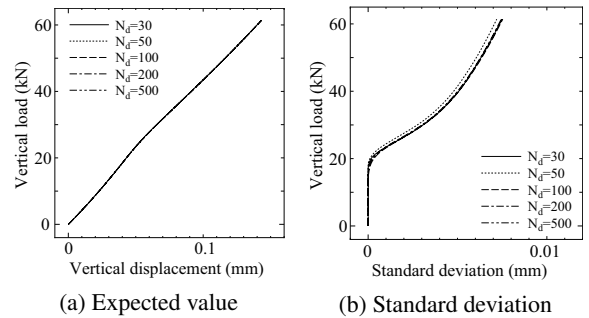


Fig. 5 Influence of the number of simulated data N_d on the vertical displacement (Point A) calculated using stochastic collocation method. The spatial variation of the parameter H_0 is considered.

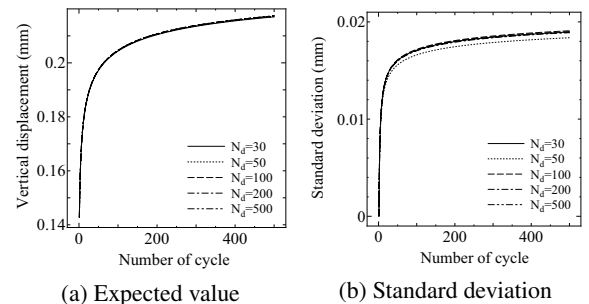


Fig. 6 Influence of the number of simulated data N_d on the vertical displacement (Point A) calculated using stochastic collocation method. The spatial variation of the parameter h_0 is considered.

6.4. 材料物性値の空間的ばらつきが道床沈下変位解析結果に及ぼす影響

最後に、今回の解析条件の下で、各種材料物性値の空間的ばらつきを考慮したバラスト道床沈下解析を実行した結

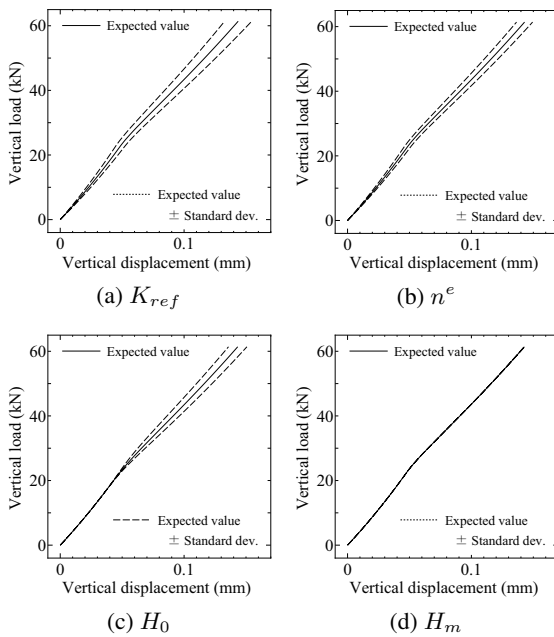


Fig. 7 Expected value and standard deviation of the vertical displacement (Point A) in the monotonic loading process. The simulation results are calculated using stochastic collocation method.

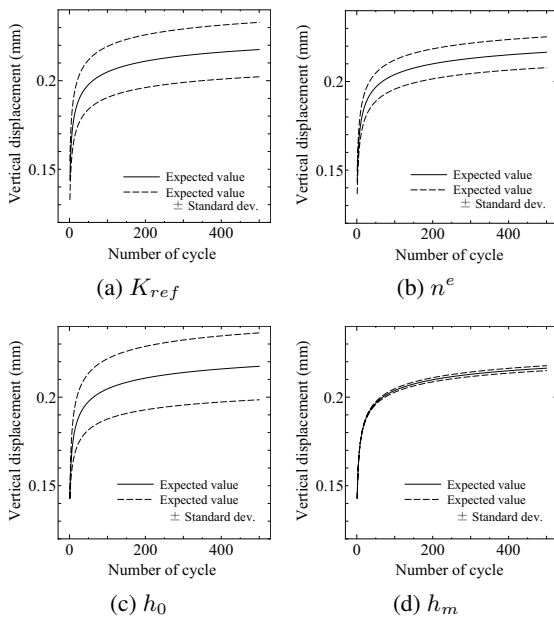


Fig. 8 Expected value and standard deviation of the vertical displacement (Point A) in the cyclic loading process. The simulation results are calculated using stochastic collocation method.

果を示す。Fig.7, Fig.8 はそれぞれ単調載荷過程において物性値 K_{ref} , n^e , H_0 , H_m を、繰り返し載荷過程において物性値 K_{ref} , n^e , h_0 , h_m のいずれか一種類の空間的ばらつきを考慮した場合における道床上面 A 点の鉛直変位の期待値とその標準偏差を示したものである。なお、解析結果は評価精度を重視して $N_d = 200$ とした。入力情報である材料物性値の空間的ばらつきの度合いが変動係数 10%相当であるのに対し、解析により得られるバラスト道床上面鉛直変位のばらつきは大きくても 8%程度となることがわかる。弾性挙動に関する物性値では K_{ref} 、塑性挙動に関する物性値では摩擦す

べりの初期強度を制御する H_0 , h_0 のばらつきの影響が大きく、これは観測点近傍の局所変形において摩擦すべりとそのひずみ硬化の影響が大きいことを示唆するものである。なお、stochastic collocation method の適用時とモンテカルロ法適用時の計算負荷の比較検討については、今後の検討課題としたい。

7. おわりに

本研究では、cyclic densification モデルの材料物性値の空間的ばらつきを考慮したバラスト道床沈下解析を対象に、解析によって評価される物理応答の確率空間での挙動を polynomial chaos 展開 (PC 展開) を用いて表現した確率有限要素解析の有効性について検討した。NISP-SSFEM と stochastic collocation method の 2 種類の方法を対象に、バラスト道床沈下解析における有効性について、数値実験を通して検討した。その結果、NISP-SSFEM は解析の安定性と計算時の使用メモリの大きさから当該問題への適用上問題点が山積していることがわかった。一方、stochastic collocation method は、モンテカルロ法のような解法の簡易さがあり、実際の解析での計算負荷もそれほど多大となる懸念は小さく、結果として当該問題における弾性挙動、塑性挙動をそれぞれ制御する材料物性値の空間的ばらつきを考慮した確率有限要素・道床沈下解析を実行できた。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 19K04572 の助成を受けたものです。

参考文献

- (1) 佐藤江美, 紅露一寛, 阿部和久: Cyclic densification モデルを用いた有限要素法に基づくバラスト道床沈下解析法の適用可能性に関する検討, 土木学会鉄道工学シンポジウム論文集, **17**(2013), pp.143-150.
- (2) Suiker, A.S.J. & de Borst, R.: A numerical model for the cyclic deterioration of railway tracks. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **57**(2003), pp.441-470.
- (3) 紅露一寛, 井口建斗, 阿部和久: Cyclic densification モデルに基づくバラスト道床沈下解析におけるバラスト材の Young 率の空間変動の影響. 計算数理工学論文集, **16**(2016), pp.7-12.
- (4) 紅露一寛, 井口建斗, 阿部和久: 道床沈下解析におけるバラスト材の弾塑性挙動の空間的ばらつきの影響評価, 土木学会鉄道工学シンポジウム論文集, **22**(2018), pp.247-254.
- (5) 中川英則: 1, 2 次元確率変数を含む弾塑性問題および有限変形問題への NISP 確率有限要素法の適用. 土木学会論文集 A2 (応用力学), **73**, **2**(2017), pp.I.245-I.254.
- (6) Achharjee, S., Zabarar, N.: A non-intrusive stochastic Galerkin approach for modeling uncertainty propagation in deformation process. *Comp. & Struct.*, **85**(2007), pp.244-254.
- (7) Ghanem, R.G. & Spanos, P.D.: Stochastic finite element, A Spectral approach, Dover, 1991.