

# 境界要素法と櫻井・杉浦法を用いた開放型共振器の トポロジー最適化

## A TOPOLOGY OPTIMISATION OF OPEN CAVITIES USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD AND SAKURAI-SUGIURA METHOD

松島 慶<sup>1)</sup>, 飯盛 浩司<sup>2)</sup>, 高橋 徹<sup>3)</sup>, 松本 敏郎<sup>4)</sup>

Kei MATSUSHIMA, Hiroshi ISAKARI, Toru TAKAHASHI and Toshiro MATSUMOTO

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: k\_matusima@nuem.nagoya-u.ac.jp)  
2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.ac.jp)  
3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)  
4) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

This paper presents a topology optimisation of two-dimensional open cavities. We first employ the boundary element method and Sakurai-Sugiura method to rigorously calculate the resonant frequencies and modes. Then a new topological derivative is derived and incorporated into a level-set based topology optimisation. Finally, we demonstrate some numerical examples to check the correctness of the topological derivative and show the effectiveness of our proposed topology optimisation.

**Key Words** : Topology optimisation, Resonant frequency, Open cavity, Topological derivative, Boundary element method, Sakurai-Sugiura method

### 1. 緒言

全空間内に有限な大きさの物体 (共振器) が置かれた, 有界でない空間中の定常波動場は複素平面内の離散的な周波数において共鳴を起こすことが知られている. これら周波数は一般的に resonant frequency, scattering frequency あるいは quasinormal frequency などと呼ばれるが, 本論文では有界領域のそれと区別せず, 単に固有周波数と呼ぶ.

これら固有周波数は実軸上に存在し得ず, したがってこの領域中で定義される散乱問題を記述する境界値問題は実の周波数で一意可解となる. しかし, その解は複素平面内の固有周波数の分布に深く依存することが指摘されており, 関連する研究が近年盛んに行われている<sup>(1)</sup>. 例えば, 入射場の周波数がこの固有周波数に近いとき, それに対応する固有モードが励起されることで場の強い局在化や Fano 共鳴<sup>(1)</sup>, whispering gallery mode 共鳴<sup>(2)</sup>などを引き起こす. あるいは散乱を数値的に解く観点からは, この固有周波数の周辺で問題が悪条件となるために, その解析手法に種々の工夫が必要となる.

著者らの研究グループはこれまでにトポロジー最適化に基づく波動デバイスの設計法の開発を行ってきた<sup>(3-8)</sup>. これ

らは単一の周波数に対する目的汎関数 (エネルギー散逸, 観測点における場の大きさ, エネルギー透過率など) の最大化または最小化を対象としているが, その最適解は前述の共鳴と深く関係していると考えられる. したがって, これまで行われてきた有界領域の固有周波数の制御を目的とするトポロジー最適化<sup>(3,4)</sup>のみならず, 有界でない領域においても, 固有周波数に関するトポロジー最適化は波動デバイスの設計に新たな知見をもたらすことが予想される.

この背景を踏まえて, 本論文は有界でない領域中の 2 次元定常スカラー波動場を対象とした開放型共振器の新しいトポロジー最適化手法を提案する. このトポロジー最適化を行った例は近年すでに報告されている<sup>(9)</sup>が, これは体積積分方程式の非線形固有値の探索に基づいており, その計算コストは非常に大きい. 本研究は, 固有周波数と対応する固有モードをより効率的に計算するために, 境界要素法と櫻井・杉浦法 (SS 法)<sup>(10)</sup>を併用したアルゴリズム<sup>(11)</sup>を採用する. また, 先行研究<sup>(9)</sup>は連続な屈折率分布に関する固有周波数の感度に基づいた密度法型のトポロジー最適化を行っているが, これは共振器の表面に Neumann 境界条件などの境界条件が課される場合に対応できない. 本研究は, この問題を解決するためにトポロジー導関数<sup>(12)</sup>を設計感度として用いる. このトポロジー導関数は TE または TM 偏光を仮定した 2 次元

電磁波動場のトランスミッション問題に関しては既に導出されている<sup>(13,14)</sup>。しかし、これらは円形材料の内部または外部に領域摂動が生じることを仮定しているが、トポロジー最適化のためには、元の形状が円形に限らない、弱い仮定の下で導出したトポロジー導関数が必要となる。そこで本研究は斉次 Neumann 境界条件が課される場合を対象として、弱形式を出発点とする方法<sup>(3)</sup>を用いて新たにトポロジー導関数を導出する。トポロジー最適化のアルゴリズムには、レベルセット関数とその B スプライン補間に基づく方法<sup>(15)</sup>を採用する。最後にトポロジー最適化の数値例を示し、提案手法の有効性を確認する。

## 2. 境界要素法と SS 法に基づく固有モード解析

### 2.1. 定式化

本研究は次の斉次境界値問題に支配される定常波動場  $u$  :  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$  について考える。

$$\nabla^2 u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$u(x) = 0 \quad x \in \Gamma_u \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) := n(x) \cdot \nabla u(x) = 0 \quad x \in \Gamma_q \quad (3)$$

$$\text{Outgoing radiation condition for } u \quad (4)$$

ここに、 $k \in \mathbb{C}$  は波数であり、角周波数  $\omega \in \mathbb{C}$  と位相速度  $c > 0$  を用いて  $k = \omega/c$  で与えられる。 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  は  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  が有界となるような領域であり、 $\Gamma$  を  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  の境界として  $\bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_q = \Gamma$  を満たすものとする。また、 $n$  は  $\Gamma$  上で  $\Omega$  に対して外向きの単位法線ベクトルである。なお、本論文を通して各物理量の調和振動の時間依存は  $e^{-i\omega t}$  を仮定する。

### 2.2. 固有モード解析

境界値問題 (1)–(4) が非自明解を有するような  $\omega$ 、すなわち固有角周波数を求める方法について述べる。まず、境界値問題 (1)–(4) を Burton-Miller 型の境界積分方程式<sup>(16)</sup>

$$\left( \frac{1}{2}I + D + \alpha N \right) u - \left( S + \alpha \left( D^* - \frac{1}{2}I \right) \right) q = 0 \quad (5)$$

に置き換える。ここに、 $\alpha \in \mathbb{C}$  は Burton-Miller 法の結合定数、 $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ 、 $I$  は恒等作用素であり、 $S$ 、 $D$ 、 $D^*$ 、 $N$  は 2 次元 Helmholtz 方程式の基本解  $G(x, y) = (i/4)H_0^{(1)}(k|x - y|)$  を用いて次式で定義される積分作用素である。

$$(Sv)(x) = \int_{\Gamma_u} G(x, y)v(y)d\Gamma_y \quad (6)$$

$$(Dv)(x) = \int_{\Gamma_q} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y)v(y)d\Gamma_y \quad (7)$$

$$(D^*v)(x) = \int_{\Gamma_u} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x, y)v(y)d\Gamma_y \quad (8)$$

$$(Nv)(x) = \text{p.f.} \int_{\Gamma_q} \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(x, y)v(y)d\Gamma_y \quad (9)$$

ここに、 $H_n^{(1)}(z)$  は第 1 種  $n$  次の Hankel 関数、p.f. は発散積分の有限部分を表す。

本研究は、境界積分方程式 (5) を離散化して得られる連立一次方程式  $A(\omega)\phi = 0$  の係数行列  $A(\omega)$  に SS 法を適用し、

固有角周波数  $\omega$  と対応する固有モードを計算する。ただし、境界積分方程式 (5) の固有角周波数は、元の斉次境界値問題 (1)–(4) の固有角周波数 (真の固有角周波数) の他に、見かけの固有値と呼ばれる非物理的な固有角周波数を持つことに注意が必要である。真の固有角周波数  $\omega$  は複素平面の下半面のみ存在し、さらに  $\omega$  と  $-\bar{\omega}$  は組となって分布する<sup>(17)</sup>ことに着目すると、真の固有角周波数は  $\text{Re}[\omega] > 0$  かつ  $\text{Im}[\omega] < 0$  の範囲を探索すれば十分である。したがって、Burton-Miller 型境界積分方程式 (5) の見かけの固有値がこの範囲に分布しないように結合定数  $\alpha$  を選ぶことで、真の固有角周波数と見かけの固有角周波数を区別することができる<sup>(11)</sup>。本研究は、このための条件  $\text{Im}[\alpha] \geq 0$  を満たすものとして、 $\alpha = i/k$  を選ぶ。

### 3. トポロジー導関数

固有角周波数を目的汎関数に含むトポロジー最適化を行うためには、領域変動に対する固有角周波数の摂動を調べる必要がある。本研究は、その一つの指標としてトポロジー導関数を導出する。

#### 3.1. 定義

本節を通して、 $\omega$  は斉次境界値問題 (1)–(4) の (真の) 固有角周波数 (および  $k = \omega/c$  は対応する波数)、 $u$  は  $\omega$  に対応する固有モードとする。簡単のために、本研究では  $\omega$  は単純であると仮定する。固有角周波数が重複する場合、そのトポロジー導関数の導出にはさらなる議論が必要となる<sup>(13)</sup>

中心を  $x^0 \in \Omega$  とする円板を  $\Omega_\varepsilon = B_\varepsilon(x^0)$  として、その半径  $\varepsilon > 0$  は十分小さく  $(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}) \cap \bar{\Omega}_\varepsilon = \emptyset$  を満たすものとする。ここで、境界値問題 (1)–(4) を定義する領域が  $\Omega$  から  $\Omega \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$  に変化する場合を考える。ここで、新たに発生した境界  $\partial\Omega_\varepsilon$  上で  $u$  は斉次 Neumann 条件を満たすと仮定して、 $\Gamma_q$  は  $\Gamma_q \cup \partial\Omega_\varepsilon$  に変動するとする。この領域変動に対応して、 $\omega$  が  $\omega + \delta\omega$  ( $k$  が  $k + \delta k$ )、 $u$  が  $u + \delta u$  に摂動すると仮定する。このとき、 $\delta\omega$  に関して  $\delta\omega = v(\varepsilon)\mathcal{T}(x^0) + o(v(\varepsilon))$  を満たす関数  $\mathcal{T} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  をトポロジー導関数と定義する。ここに、 $v$  は  $\varepsilon = 0$  の近傍で単調増加する関数である。

#### 3.2. Dirichlet-to-Neumann 作用素を用いた弱形式の導出

$\Omega$  が有界領域の場合、前小節で定義したトポロジー導関数  $\mathcal{T}$  は斉次境界値問題 (1)–(3) に対応する弱形式と適当な試験関数を考えることによって導出することができる<sup>(3)</sup>。一方で、 $\Omega$  が有界でない場合、固有モード  $u$  は無限遠に近づくに連れてその大きさが指数関数的に増大するため、通常の弱形式に含まれる領域積分は発散し意味を成さない。これは外向き放射条件を満たす Green 関数のスペクトル表示の構成に必要な固有モードの正規化に通常のノルムが適さない理由と同じである<sup>(17)</sup>。

これを解決するために、Dirichlet-to-Neumann 作用素 (DtN 作用素) を用いて外部境界値問題 (1)–(4) の定義域を有界領域へ制限する。まず、 $B_R(y)$  を半径  $R > 0$ 、中心  $y \in \mathbb{R}^2$  の円板として、 $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega} \subset B_R(y)$  となるように  $R$  と  $y$  を定める。このとき、 $\Omega_R = \Omega \cap B_R(y)$  と定義すると、外部境界値問題

(1)–(4) は仮想領域  $\Omega_R$  で次の境界値問題と等価であることが知られている<sup>(18)</sup>.

$$\nabla^2 u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad x \in \Omega_R \quad (10)$$

$$u(x) = 0 \quad x \in \Gamma_u \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \quad x \in \Gamma_q \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = (T_k u)(x) \quad x \in \Gamma_R \quad (13)$$

ここに、 $\Gamma_R = \partial B_R(y)$  である。境界条件 (13) は DtN 境界条件、 $T_k$  は DtN 作用素と呼ばれる。

$T_k$  を表現するために、まず外部境界値問題 (1)–(4) の解  $u$  を  $\mathbb{R}^2 \setminus B_R(y)$  で次式のように円筒波展開する。

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(k|x-y|) e^{in\theta(x-y)} \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R(y) \quad (14)$$

ここに、 $\theta(x)$  は  $x \in \mathbb{R}^2$  の偏角であり、 $A_n \in \mathbb{C}$  は定数である。また、 $u$  は  $\Gamma_R$  上で次式のように Fourier 級数展開できる。

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(R, \phi) e^{-in\phi} d\phi \right) e^{in\theta(x-y)} \quad x \in \Gamma_R, \quad (15)$$

ここに、 $(e_1, e_2)$  を  $\mathbb{R}^2$  の正規直交基底として、表記の簡略化のために  $u(R, \phi) = u(y + (R \cos \phi)e_1 + (R \sin \phi)e_2)$  とした。式 (14), (15) より  $A_n$  は次式で求められることが分かる。

$$A_n = \frac{1}{2\pi H_n^{(1)}(kR)} \int_{-\pi}^{\pi} u(R, \phi) e^{-in\phi} d\phi \quad (16)$$

これを用いると、 $\Gamma_R$  上での  $u$  の法線微分は次式で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} e^{in\theta(x-y)} \int_{-\pi}^{\pi} u(R, \phi) e^{-in\phi} d\phi \quad (17)$$

ここに、 $H_n^{(1)'}(z) = \frac{d}{dz} H_n^{(1)}(z)$  と定義した。すなわち、DtN 作用素  $T_k$  は次式で表現される。

$$(T_k u)(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} e^{in\theta(x-y)} \int_{-\pi}^{\pi} u(R, \phi) e^{-in\phi} d\phi \quad (18)$$

次節で述べるトポロジ導関数の導出のために、境界値問題 (10)–(13) の弱形式を示す。通常の方法によって、境界値問題 (10)–(13) の解  $u \in U := \{u \in H^1(\Omega_R) \mid u = 0 \text{ on } \Gamma_u\}$  は、任意の試験関数  $\tilde{u} \in U$  について

$$a_k(\tilde{u}, u; \Omega_R) + b_k(\tilde{u}, u) = 0 \quad (19)$$

を満たすことが分かる。ここに、 $H^1(\Omega)$  は通常の  $L^2$  空間を用いて  $H^1(\Omega) = \{\phi \mid \phi \in L^2(\Omega), \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \in L^2(\Omega)\}$  で定義される Sobolev 空間である。また、 $a_k$  と  $b_k$  は次の積分で定義される双線形形式である。

$$a_k(\tilde{u}, u; \Omega) = \int_{\Omega} (\nabla \tilde{u} \cdot \nabla u - k^2 \tilde{u} u) d\Omega \quad (20)$$

$$b_k(\tilde{u}, u) = - \int_{\Gamma_R} \tilde{u} T_k u d\Gamma \quad (21)$$

明らかに  $a_k(\cdot, \cdot; \Omega)$  は対称であり、さらに  $b(\cdot, \cdot)$  も対称であることが簡単な計算によって確かめられる。

### 3.3. トポロジ導関数の導出

前節で導入した DtN 作用素と弱形式を用いて、トポロジ導関数  $\mathcal{T}$  を導出する。まず、 $u + \delta u \in U' := \{u \in H^1(\Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) \mid u = 0 \text{ on } \Gamma_u\}$  は任意の  $\tilde{u} \in U'$  に関して

$$a_{k+\delta k}(\tilde{u}, u + \delta u; \Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) + b_{k+\delta k}(\tilde{u}, u + \delta u) = 0 \quad (22)$$

を満たし、各項は次のように評価できる。

$$a_{k+\delta k}(\tilde{u}, u + \delta u; \Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) = a_k(\tilde{u}, u + \delta u; \Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) + \delta k a'_k(\tilde{u}, u + \delta u; \Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) + O(\delta k^2) \quad (23)$$

$$b_{k+\delta k}(\tilde{u}, u + \delta u) = b_k(\tilde{u}, u + \delta u) + \delta k b'_k(\tilde{u}, u + \delta u) + O(\delta k^2) \quad (24)$$

ここに、 $a'_k, b'_k$  はそれぞれ  $a_k, b_k$  の  $k$  に関する偏導関数

$$a'_k(\tilde{u}, u; \Omega) = \frac{\partial}{\partial k} a_k(\tilde{u}, u; \Omega) = -2k \int_{\Omega} \tilde{u} u d\Omega \quad (25)$$

$$b'_k(\tilde{u}, u) = \frac{\partial}{\partial k} b_k(\tilde{u}, u) = - \int_{\Gamma_R} \tilde{u} T'_k u d\Gamma \quad (26)$$

$$(T'_k u)(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{k H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \right) e^{in\theta(x-y)} \times \int_{-\pi}^{\pi} u(R, \phi) e^{-in\phi} d\phi \quad (27)$$

で与えられる。ここで、 $a'_k(\cdot, \cdot; \Omega)$  と  $b'_k(\cdot, \cdot)$  もまた対称である。式 (22)–(24) より、 $\delta k$  に関して次の評価を得る。

$$\delta k = - \frac{a_k(\tilde{u}, u + \delta u; \Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) + b_k(\tilde{u}, u + \delta u)}{a'_k(\tilde{u}, u + \delta u; \Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) + b'_k(\tilde{u}, u + \delta u)} + O(\delta k^2) \quad (28)$$

したがって、トポロジ導関数  $\mathcal{T}$  は式 (28) の右辺第 1 項の  $\varepsilon \rightarrow 0$  に関する漸近挙動を調べることで得られる。

まず分子の漸近展開を行う。 $u$  の  $\Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$  への制限  $u|_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}}$  に関して成り立つ弱形式

$$a_k(\tilde{u}, u; \Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) + b_k(\tilde{u}, u) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma =: l(\tilde{u}, u), \quad \forall \tilde{u} \in U' \quad (29)$$

より、 $\tilde{u} = u + \delta u \in U'$  を選ぶと、 $a_k$  と  $b_k$  の対称性により次式を得る。

$$\begin{aligned} & a_k(u, u + \delta u; \Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) + b_k(u, u + \delta u) \\ &= l(u + \delta u, u) \\ &= -\pi \varepsilon^2 (2\nabla u(x^0) \cdot \nabla u(x^0) - k^2 u(x^0) u(x^0)) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、最後の等号に関しては例えば文献<sup>(19)</sup>を参照されたい。

次に式 (28) の右辺第 1 項の分母に関して、同様に  $\tilde{u} = u|_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}} \in U'$  を選ぶと

$$\begin{aligned} & a'_k(\tilde{u}, u + \delta u; \Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) + b'_k(\tilde{u}, u + \delta u) \\ &= -2k \int_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}} u(u + \delta u) d\Omega - \int_{\Gamma_R} u T'_k(u + \delta u) d\Gamma \\ &= -2k \int_{\Omega_R} u u d\Omega - \int_{\Gamma_R} u T'_k u d\Gamma + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (31)$$

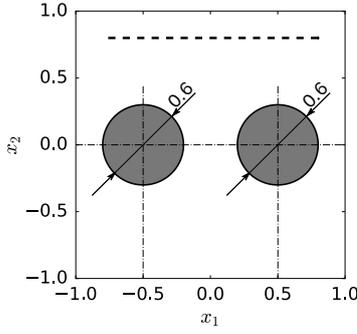


Fig. 1 Open cavity used for comparing the topological derivative (33) and numerical difference of  $\omega$ . The derivative and difference are calculated on the dashed line.

となり、よって式 (28), (30) および (31) より次式を得る.

$$\delta k = -\frac{2\nabla u(x^0) \cdot \nabla u(x^0) - k^2 u(x^0) u(x^0)}{2k \int_{\Omega_R} u u d\Omega + \int_{\Gamma_R} u T'_k u d\Gamma} \pi \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) + O(\delta k^2) \quad (32)$$

したがって、 $v$  に  $v(\varepsilon) = \pi \varepsilon^2$  を選ぶと、最終的に固有角周波数  $\omega$  のトポロジー導関数  $\mathcal{T}$  は次式となる.

$$\mathcal{T}(x) = -c \frac{2\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - k^2 u(x) u(x)}{2k \int_{\Omega_R} u u d\Omega + \int_{\Gamma_R} u T'_k u d\Gamma} \quad (33)$$

ここで、式 (33) に現れる固有対  $(\omega, u)$  は、仮想領域  $\Omega_R$  により置き換えられた境界値問題 (10)–(13) ではなく、元の境界値問題 (1)–(4) の固有対、ひいては境界積分方程式 (5) の非線形固有値問題の解として計算することに注意されたい.

#### 4. 数値例

本節では、いくつかの数値例を通して本論文が提案する手法の有効性を確認する. 以下のすべての数値例は、位相速度を  $c = 0.5$  として、 $\Gamma = \Gamma_q$  ( $\Gamma_u = \emptyset$ ) とする.

##### 4.1. トポロジー導関数の検証

前節で導出したトポロジー導関数 (33) が正しいことを数値的に確認する. まず、式 (33) の分母は  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega} \subset B_R(y)$  を満たす限り、その値は中心  $y$  や半径  $R$  に依存しないはずである. しかし、固有モードが指数関数的に発散することを考慮すると、そこに現れる積分の数値計算の精度は  $R$  に大きく依存することが予想される. したがって、はじめにこの分母の値と  $R$  の関係を数値的に調べる.

本数値例では、共振器は Fig.1 のように半径 0.3 の円が 2 つ並べられた形状であるとする. このとき、SS 法によって計算された単純な固有角周波数の一つ  $1.386 - 2.121i$  を対象として、仮想領域の中心を原点に固定し、半径  $R$  を変化させたときの (33) の分母の値を計算した結果を Fig.2 に示す. ここで、固有モードの計算に用いた境界要素法では区分一定要素を用い、その要素数は 200 である. 領域積分は、一辺の長さが境界要素とほぼ等しくなるように分割された三角形メッシュの上で 3 点の Gauss-Legendre 求積により計算した.

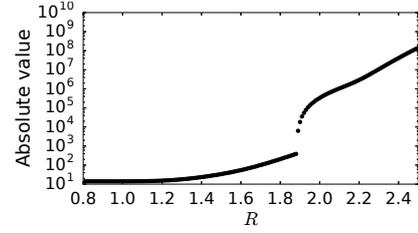


Fig. 2 Absolute value of the denominator in (33) versus the radius  $R$ .

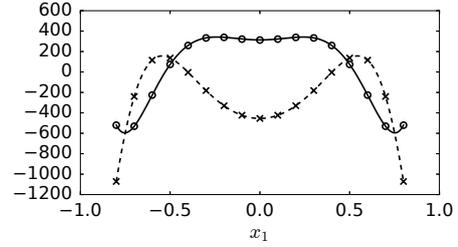


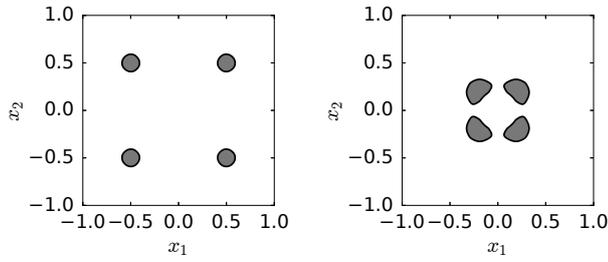
Fig. 3 Comparison between the topological derivative  $\mathcal{T}$  and numerical difference  $\Delta\omega/(\pi\varepsilon^2)$ . The solid and dashed lines respectively represent the real and imaginary parts of  $\mathcal{T}$ . Also the circles and crosses respectively indicate the real and imaginary parts of  $\Delta\omega/(\pi\varepsilon^2)$ .

この結果から、 $R$  が最小包含円の半径である 0.8 に近いとき分母の絶対値はほぼ一定の値を取るが、一方で  $R$  が大きいときこの値から大きく外れて発散していく傾向が見られる. これは前述の固有モードの指数的増大に伴う計算誤差の増加が原因であると考えられるため、この  $R$  が小さいときの値が真値に近いと予想して、次に分子も含めた式 (33)、すなわちトポロジー導関数  $\mathcal{T}$  が正しいことを検証する.

同じ共振器 (Fig.1) とその固有角周波数  $\omega = 1.386 - 2.121i$  について、実際に半径  $\varepsilon$  の微小な円板を Fig.1 の破線の上に発生させたときの固有角周波数  $\omega + \Delta\omega$  を計算し、その数値差分を  $\pi\varepsilon^2$  で除した値  $\Delta\omega/(\pi\varepsilon^2)$  (いわゆるトポロジー差分) を計算することで、導出したトポロジー導関数 (33) が正しいことを確認する. 微小円の半径を  $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$ 、仮想領域の半径を  $R = 0.88$ 、他の条件は前の数値例と同じものを用いてトポロジー導関数とトポロジー差分を計算した結果を Fig.3 に示す. この結果から、トポロジー導関数は差分とほぼ一致しており、よって導出したトポロジー導関数 (33) は正しいことが推測できる.

##### 4.2. トポロジー最適化

著者らの研究グループが近年開発したトポロジー最適化法<sup>(15)</sup>に導出したトポロジー導関数を組み込み、共振器のトポロジー最適化を行う. ここでは、目標とする固有角周波数  $\hat{\omega} \in \mathbb{C}$  を与え、目的汎関数  $J = |\omega - \hat{\omega}|^2$  を最小にするトポロジー最適化を行った例を示す.



(a) Initial configuration (b) Optimal configuration

Fig. 4 Initial and optimal configurations.

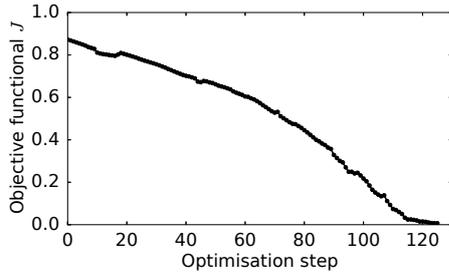


Fig. 5 Value of the objective functional  $J$  for each optimisation step.

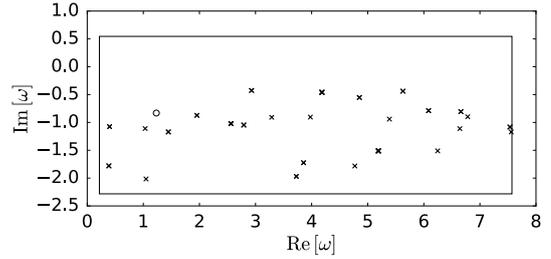
本数値例では、固定設計領域を  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  として、初期形状は Fig.4 (a) に示すように4つの円板が置かれた状態とする。このとき、単純な固有角周波数の1つである  $\omega = 1.232 - 0.8315i$  について、目標固有角周波数を  $\hat{\omega} = 2.0 - 0.3i$  と定めて  $J$  を最小化する。

まず、トポロジー最適化によって得られた最適形状を Fig.4 (b) に、最適化アルゴリズムの各ステップにおける目的汎関数  $J$  の値を Fig.5 に示す。トポロジー最適化によって  $J$  の値は初期値 0.8727 から最適値  $6.752 \times 10^{-3}$  まで減少させることに成功し、実際、それぞれ Fig.6 (a), (b) に示す初期形状と最適形状の固有角周波数の分布から明らかのように、対象とした固有角周波数は最適形状で目標固有角周波数  $\hat{\omega}$  にほぼ到達している。

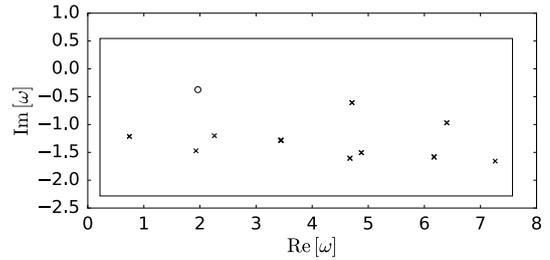
次に、設計した共振器の実周波数における散乱特性を調べる。形状の対称性を考慮して、ここでは原点を点源とする円筒波  $H_0^{(1)}(k|x|)$  を入射波として与える。実の角周波数  $\omega = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0$  についてこの散乱を境界要素法によって解析した結果を Fig.7 に示す。この4つの角周波数のうち特に  $\omega = 2.0$  の結果は、共振器の内部に場が局在している様子が確かめられる。これはトポロジー最適化によって配置した固有角周波数  $\hat{\omega}$  がこの実の角周波数  $\omega = 2.0$  に近いために、入射波が  $\hat{\omega}$  に対応する固有モードと強く結合したためであると考えられる。したがって、本研究が提案するトポロジー最適化は、例えば目的とする周波数で場を局在化させる共振器の設計、あるいは逆に局所的な強い干渉を防ぐ構造の設計への応用が期待できる。

## 5. 結言

本研究は、2次元開空間中の開放型共振器の固有角周波数



(a) Initial configuration



(b) Optimal configuration

Fig. 6 Distribution of the eigenfrequencies  $\omega$  for the initial and optimal configurations. The eigenfrequencies are computed by the Sakurai-Sugiura method within the rectangle domain. The circles indicate the target eigenfrequency  $\omega$ , and the crosses represent other eigenfrequencies.

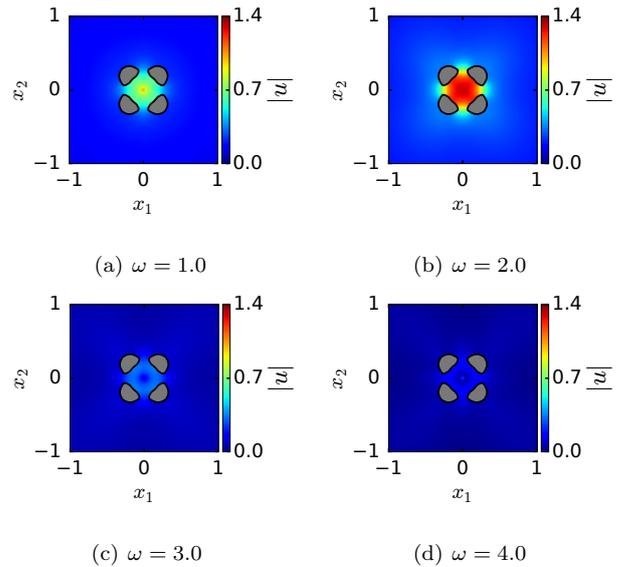


Fig. 7 Distribution of the intensity  $|u|$  when the cylindrical wave  $H_0^{(1)}(k|x|)$  impinges on the designed cavity.

のトポロジー最適化法を提案した。提案法は、通常の領域型解法による扱いが難しい複素固有角周波数を境界要素法とSS法を用いることで高精度かつ効率的に解析し、新たに導出したトポロジー導関数と組み合わせることで、固有角周波数を目標値に移動するトポロジー最適化が可能であることを示した。

本研究は単純な固有角周波数のみを扱ったが、高い対称性を有する構造の固有角周波数はその多くが重複している。よって、実用のためには重複固有角周波数のトポロジー導関数の計算も必要であり、今後の課題として挙げられる。また提案手法の周期構造への拡張は興味深い課題であり、例えば実固有角周波数に関連する導波モードの最適化は工学的にも重要であると考えられる。

#### 謝辞

本研究はJSPS科研費JP19J21766, JP19H00740, およびJP17K14146の助成を受けたものです。

#### 参考文献

- (1) Lalanne, P., Yan, W., Vynck, K., Sauvan, C., and Hugonin, J.P. Light interaction with photonic and plasmonic resonances. *Laser & Photonics Reviews*, Vol. 12, No. 5, p. 1700113, 2018.
- (2) Righini, G.C., Dumeige, Y., Féron, P., Ferrari, M., Nunzi Conti, G., Ristic, D., and Soria, S. Whispering gallery mode microresonators: fundamentals and applications. *Rivista del nuovo cimento*, Vol. 34, No. 7, pp. 435–488, 2011.
- (3) 飯盛浩司, 北林達也, 高橋徹, 松本敏郎. Helmholtz 方程式の境界値問題に関連する固有値のトポロジー導関数と高速直接境界要素法を用いたその数値計算. 計算数理工学論文集, Vol. 15, pp. 31–36, 2015.
- (4) 釜堀瑞生, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. SS法と境界要素法を用いた周期構造のトポロジー最適化. 計算数理工学論文集, Vol. 16, pp. 85–90, 2016.
- (5) Nakamoto, K., Isakari, H., Takahashi, T., and Matsumoto, T. A level-set-based topology optimisation of carpet cloaking devices with the boundary element method. *Mechanical Engineering Journal*, Vol. 4, No. 1, pp. 16–268, 2017.
- (6) Isakari, H., Nakamoto, K., Kitabayashi, T., Takahashi, T., and Matsumoto, T. A multi-objective topology optimisation for 2D electro-magnetic wave problems with the level set method and BEM. *European Journal of Computational Mechanics*, Vol. 25, No. 1-2, pp. 165–193, 2016.
- (7) 松島慶, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. 粘弾性介在物を用いた弾性波エネルギー吸収体のトポロジー最適化. 計算数理工学論文集, Vol. 17, pp. 77–82, 2017.
- (8) 松島慶, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. 2次元弾性波周期散乱解析のための境界要素法とそのトポロジー最適化への応用. 計算数理工学論文集, Vol. 18, pp. 35–40, 2018.
- (9) Kao, C.Y. and Santosa, F. Maximization of the quality factor of an optical resonator. *Wave Motion*, Vol. 45, No. 4, pp. 412 – 427, 2008.
- (10) Asakura, J., Sakurai, T., Tadano, H., Ikegami, T., and Kimura, K. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals. *JSIAM Letters*, Vol. 1, pp. 52–55, 2009.
- (11) 三澤亮太, 西村直志. 見かけの複素固有値の分布に基づいた2次元Helmholtz方程式のtransmission問題における単一境界積分方程式法の考察. 計算数理工学論文集, Vol. 16, pp. 73–78, 2016.
- (12) Sokolowski, J. and Zochowski, A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 37, No. 4, pp. 1251–1272, 1999.
- (13) Ammari, H., Dabrowski, A., Fitzpatrick, B., and Millien, P. Perturbation of the scattering resonances of an open cavity by small particles. Part I: The transverse magnetic polarization case. *arXiv preprint arXiv:1810.10772*, 2018.
- (14) Ammari, H., Dabrowski, A., Fitzpatrick, B., and Millien, P. Perturbation of the scattering resonances of an open cavity by small particles. Part II: The transverse electric polarization case. *arXiv preprint arXiv:1810.10785*, 2018.
- (15) 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. Bスプライン曲面のレベルセットを用いたトポロジー最適化. 計算数理工学論文集, Vol. 17, pp. 125–130, 2017.
- (16) Burton, A.J. and Miller, G.F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 323, pp. 201–210. The Royal Society, 1971.
- (17) Doost, M.B., Langbein, W., and Muljarov, E.A. Resonant state expansion applied to two-dimensional open optical systems. *Phys. Rev. A*, Vol. 87, No. 4, p. 43827, 2013.
- (18) Keller, J.B. and Givoli, D. Exact non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, Vol. 82, No. 1, pp. 172–192, 1989.
- (19) Carpio, A. and Rapun, M.L. Solving inhomogeneous inverse problems by topological derivative methods. *Inverse Problems*, Vol. 24, No. 4, p. 45014, 2008.