計算数理工学論文集 Vol. 19 (2019 年 12 月)，論文 No. 01-191201 JASCOME

Cauchy 型積分によるメッシュレス X 線計算機断層撮影法

MESHLESS X-RAY COMPUTERIZED TOMOGRAPHY BY THE CAUCHY-TYPE INTEGRAL FORMULA

藤原　宏志 [1)]，TAMASAN, Alexandru[2)]

Hiroshi FUJIWARA and Alexandru TAMASAN

1) 京都大学大学院情報学研究科　(〒 606-8501　京都市左京区吉田本町，　E-mail: fujiwara@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
2)University of Central Florida　(〒 32816　Orlando, Florida, USA,　E-mail: tamasan@math.ucf.edu)

This paper presents a new algorithm for X-ray Computerized Tomography (CT) based on Bukhgeim's theory of analytic maps. The reconstruction relies on a Cauchy-type integral formula, where the integration over the boundary replaces the integration in the back-projection operator used in existing algorithms. From the numerical computation stand point, the proposed method recovers the attenuation coefficient at arbitrarily points by utilizing the boundary integration without internal global meshes. This means that it achieves high-parallel efficiency, and it reduces computational resources. Some numerical examples are presented to show feasibility of the proposed algorithm.

Key Words: Inverse Problems, X-ray and Radon transform, Computerized Tomography, Source Reconstruction, Cauchy-type Integral Formula, A-analytic maps

1. 緒言

X 線をもちいる計算機断層撮影法 (Computerized Tomography; CT) は物体の内部構造を非破壊的に検査することができ，医用・産業用の機器への実装が進んで今日の我々の生活に大きく貢献している．本研究ではこの X 線 CT のアルゴリズムとして Cauchy 型の積分公式をもちいる数値的再構成手法を論じ，その実現の可能性を示す．

X 線 CT の数理モデルは，Radon 変換 [(7)] を観測し，対象とする物体内部の減衰係数とよばれる物性値を求める逆問題として定式化される [(5, 6)]．減衰係数の再構成アルゴリズムとして Filtered Back-Projection (FBP)，Algebraic Reconstruction Technique (ART) などが知られているが，いずれも大域的な情報を利用する積分変換がもとになっている．

これに対して提案するアルゴリズムでは，従来と同様の Radon 変換を観測値として，X 線 CT を微分方程式のソース項再構成の逆問題として定式化し，微分作用素を含むある漸化式を満たす函数列に対する Cauchy 型の積分公式 [(1, 2)] をもちいて任意の点の減衰係数の値を得る．直進性に基く X 線 CT の問題が境界上での積分で解決されることは理論的に興味深いが，数値計算法の視点からは，積分変換の数値計算に現れる大域的なメッシュを必要とせず，かつ，各点での減衰係数を独立 (並列) に求めることができるという特徴を有する．しかしながらこの積分公式は，これまで数学解析の考察が主であり [(2, 3)]，その数値計算は著者らの知る限り実現されていない．

次章で X 線 CT の概要を述べ，第 3,4 章で境界上での積分をもちいる枠組みに帰着する手法と再構成手法を述べる．第 5 章で数値計算結果を論じる．

2. X 線計算機断層撮影法

X 線は殆どの物質中を直進して透過し，均質な物質中での強度は，進んだ距離に対して指数的に減衰することが知られている．精確には，位置 x で方向 $\xi \in S^1 = \{\xi \in \mathbb{R}^2; |\xi| = 1\}$ に進む X 線の強度 $I(x, \xi)$ は，距離 t だけ直進するとき (Fig. 1)，ある正数 M によって

$$I(x + t\xi, \xi) = I(x, \xi)M^{-t} = I(x, \xi)e^{-(\log M)t} \tag{1}$$

と表される．ここで $\mu = \log M$ をその物質の減衰係数 (attenuation coefficient) といい，物質ごとにその値が知られている [(4)]．

有界な凸領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対し，$\Gamma_{\pm} = \{(x, \xi)\,;\, x \in \partial D, \xi \in S^1, n(x)\cdot\xi \gtrless 0\}$ とする．ただし $n(x)$ は x における D の外向き単位法線を表す．D が凸ゆえ任意の $(x, \xi) \in (D \times S^1) \cup \Gamma_- \cup \Gamma_+$ に対して，半直線 $\{x - t\xi\,;\, t \geq 0\}$ と ∂D の交点 x_* が唯一つ存在する (Fig. 2)．このとき $t_* = |x - x_*|$ とすると $x = x_* + t_*\xi$ である．この記号のもとで減衰係数が $\mu(x)$ の領域 D を進む X 線の強度は，x_* を出発して x までの減衰

2019 年 8 月 6 日受付，2019 年 10 月 17 日受理

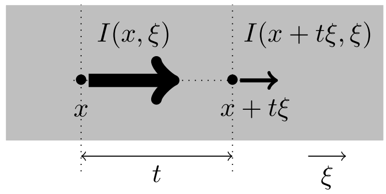

Fig. 1: Attenution of Straight Forwarding X-ray

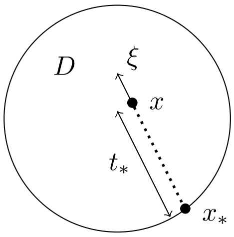

Fig. 2: Characteristic Line Passing x with ξ-direction and Its Initial Point x_* on the Boundary and Distance $t_* = |x - x_*|$.

を (1) に注意して累積した

$$
\begin{aligned}
I(x,\xi) &= I(x_* + t_*\xi, \xi) \\
&= I(x_*,\xi)\exp\left(-\int_0^{t_*} \mu(x_* + t\xi)\,dt\right) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

で表される．

さて $s \in \mathbb{R}, \omega \in S^1$ とする．$s\omega \in D$ のとき，直線 $x\cdot\omega = s$ に沿って強度 $I_{\rm in}$ で D に入射した X 線の出射強度 $I_{\rm out}$ は，

$$I_{\rm out} = I_{\rm in}\exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \mu(s\omega + t\omega^\perp)\,dt\right)$$

と表される (Fig. 3)．ただし $\omega^\perp$ は ω を正の向きに $\pi/2$ 回転した方向を表し，μ は D の外部で 0 とする．したがって直線 $x\cdot\omega = s$ に沿う線素 $d\ell$ をもちいて

$$-\log\frac{I_{\rm out}}{I_{\rm in}} = \int_{-\infty}^{\infty}\mu(s\omega + t\omega^\perp)\,dt = \int_{x\cdot\omega = s}\mu(x)\,d\ell$$

である．この最右辺 (および中辺) を μ の Radon 変換 [7] とよび，$R\mu(\omega,s)$ で表す．典型的な X 線 CT の数理モデルでは，$R\mu(\omega,s)$ をすべての $\omega \in S^1, s \in \mathbb{R}$ に対して観測し，その情報から減衰係数 $\mu(x)$ を求める問題として定式化される．

減衰係数 $\mu(x)$ の再構成手法として代表的な FBP は，$P_\omega(s) = R\mu(\omega,s)$，また $h(s)$ をその Fourier 変換像が $|r|$ を近似するような適当なクラスの函数として，それらの合成積をもちいて

$$\mu(x) \approx \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi P_\omega * h(x\cdot\omega)\,d\Omega$$

と表せる．ただし $\Omega = \arg\omega$ である．数値計算では，観測 $P_\omega(s)$ が等間隔の ω および s で得られる場合，μ を求める点 x とは独立に $P_\omega * h(s)$ を等間隔の s で求めておき，$P_\omega * h(x\cdot\omega)$ の値は線型補間をもちいればよい [5, 6]．一方，

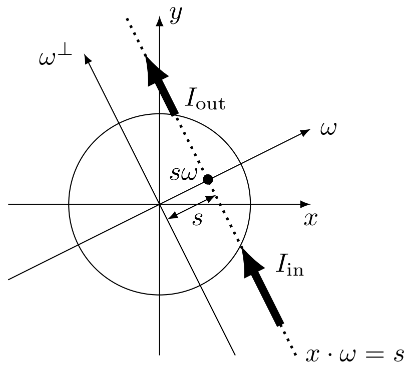

Fig. 3: Measurement of X-ray Intensity Transmitting D

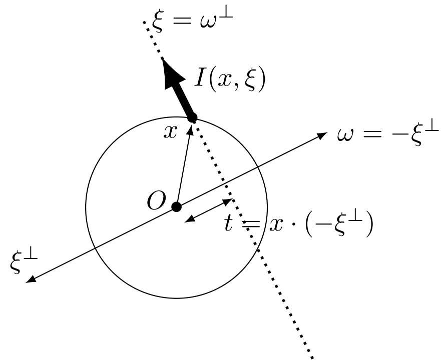

Fig. 4: Setting of Transport Equation (3) and Radon Transform

この補間をしない場合，x と ω 毎に合成積の計算が必要となる．

3. 非斉次項の再構成問題としての定式化

上述のとおり，X 線 CT に現れる減衰係数 μ の再構成は逆 Radon 変換と同値であり，そのアルゴリズムは積分方程式の求解の視点から論じられてきた．一方，この逆 Radon 変換は，非斉次項をもつ輸送方程式の逆問題に帰着される [1]．本節ではその具体的な手順を述べる．

$(x,\xi) \in (D\times S^1)\cup\Gamma_-\cup\Gamma_+$ に対し，

$$u(x,\xi) = -\log\frac{I(x,\xi)}{I(x_*,\xi)}$$

を考える．ここで Radon 変換を観測することは，0 でない入射 $I(x_*,\xi) \neq 0$ に相当することに注意する．まず $(x,\xi) \in D\times S^1$ のとき，$|t| \ll 1$ ならば (2) より

$$u(x+t\xi,\xi) = \int_0^{t_*+t}\mu(x_* + \tau\xi)\,d\tau$$

であり，

$$\frac{d}{dt}u(x+t\xi,\xi)\bigg|_{t=0} = \mu(x).$$

次に $(x,\xi) \in \Gamma_-$ のとき，$x_* = x$ ゆえに u の定義から $u(x,\xi) = 0$ が従う．さらに $(x,\xi) \in \Gamma_+$ のときは Fig. 3 の記号および Fig. 4 より

$$u(x,\xi) = -\log\frac{I_{\mathrm{out}}}{I_{\mathrm{in}}} = R\mu(\omega,s)$$
$$= R\mu\big(-\xi^{\perp}, x\cdot(-\xi^{\perp})\big) = R\mu(\xi^{\perp}, x\cdot\xi^{\perp}).$$

ここで Radon 変換が偶変換であること，すなわち $R\mu(-\omega,-s) = R\mu(\omega,s)$, $\omega\in S^1$, $s\in\mathbb{R}$ をもちいた．

以上により，u は次を満たすことがわかる．

$$\xi\cdot\nabla u(x,\xi) = \mu(x), \qquad (x,\xi)\in D\times S^1, \tag{3}$$
$$u(x,\xi) = 0, \qquad (x,\xi)\in\Gamma_-, \tag{4}$$
$$u(x,\xi) = R\mu(\xi^{\perp}, x\cdot\xi^{\perp}), \quad (x,\xi)\in\Gamma_+. \tag{5}$$

ただし $\xi\cdot\nabla$ は特性方向 ξ に沿った方向微分

$$\xi\cdot\nabla u(x) = \frac{d}{dt}u(x+t\xi,\xi)\bigg|_{t=0}$$

である．また減衰係数 μ は，内部源に相当する非斉次項に現れている．

4. Cauchy 型の積分公式による非斉次項再構成逆問題の数値的再構成手法

本節では輸送方程式の境界値問題 (3)–(4) において境界を通した流出 (5) を観測するときの内部源 μ の再構成 [1, 3] の数値計算法を提案する．以下，点 $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ と複素数 $z=x_1+ix_2\in\mathbb{C}$ を同一視する．また $\xi\in S^1$ を極座標 $\xi(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ によって $\theta\in[0,2\pi)$ と同一視する．また一般性を失うことなく，領域を単位円板 $D=\{z\in\mathbb{C}; |z|=1\}$ とし，$z\in D$ は D の内点，ζ は境界 ∂D 上の点を表すものとする．

さて任意の $\mu\in L^{\infty}(D)$ に対し，境界値問題 (3)–(4) を満たす $u\in L^2(D\times S^1)$ がただひとつ存在することが直ちにわかる．このとき $\partial=(\partial_{x_1}-i\partial_{x_2})/2$, $\overline{\partial}=(\partial_{x_1}+i\partial_{x_2})/2$ とすると $\xi\cdot\nabla = e^{-i\theta}\overline{\partial}+e^{i\theta}\partial$ であり，(3) は

$$e^{-i\theta}\overline{\partial}u + e^{i\theta}\partial u = \mu$$

となる．さらに Fourier 級数展開 $u=\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(z)e^{-in\theta}$ により，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{\partial}u_n(z)e^{-i(n+1)\theta} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\partial u_n(z)e^{-i(n-1)\theta} = \mu(z)$$

である．$\{e^{in\theta}\}$ の直交性および u が実数値函数ゆえ任意の $n\in\mathbb{Z}$ で $\overline{u_n}=u_{-n}$ であることを考えると，これは

$$\overline{\partial}u_{-1} + \partial u_1 = \mu, \tag{6}$$
$$\overline{\partial}u_n + \partial u_{n+2} = 0, \qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{7}$$

を考えることになる．ここで (7) を満たす u_1 の内点 $z\in D$ での値 $u_1(z)$ は境界上での積分

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{u_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left(\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\right)\left\{\sum_{\ell=1}^{\infty}u_{2\ell+1}(\zeta)\left(\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{\zeta-z}\right)^{\ell}\right\} \tag{8}$$

で与えられることが知られている [1, 2]．右辺には境界上での Fourier 係数 $u_n|_{\partial D}$ が現れ，u の内部の情報は含まれていないことに注意する．したがって右辺は観測で決まる流入出境界条件 (4)–(5) から計算でき，これで求まる D の内点での $u_1(z)$ をもちいて，(6) により μ が得られる．

次に，提案する数値計算の手順を示す．いま K, N, M を正整数とし，L を $2L+1\le M$ となる最大の整数とする．このうち K と N は観測点の個数を表している．具体的には，境界 ∂D の K 等分点 $\zeta_k=e^{2\pi ik/K}$, $k=0,1,\ldots,K-1$ において，$\theta_n=2\pi n/N$, $n=0,1,\ldots,N-1$ から決まる $\xi_n=(\cos\theta_n,\sin\theta_n)$ のうち Γ_+ に含まれる方向で (5) の $R\mu$ を観測するとする．これと (4) を合わせて，まず Fourier 係数 $u_\ell(\zeta_k)$ に相当する

$$U_{\ell,k} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u(\zeta_k,\xi_n)e^{i\ell\theta_n},$$
$$\ell=1,3,5,\ldots,2L+1, \quad k=0,1,\ldots,K-1$$

を求める．次に $\zeta\in\partial D$ について $\overline{\zeta}=1/\zeta$ に注意すると，∂D 上で積分可能な F に対して，$z\in D$ で

$$\int_{\partial D}\left(\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\right)F(\zeta)$$
$$= \int_{\partial D}\left(\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\,\frac{d\zeta}{(-\zeta^2)}\right)F(\zeta)$$
$$= 2\int_{\partial D}\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}\right)F(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

である．これより $z\in D$ に対して，(8) を離散化して

$$U_1(z) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\frac{\zeta_k}{\zeta_k-z}U_{1,k} + \frac{2}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta_k}{\zeta_k-z}\right)\left\{\sum_{\ell=1}^{L}U_{2\ell+1,k}\left(\frac{\overline{\zeta_k}-\bar{z}}{\zeta_k-z}\right)^{\ell}\right\} \tag{9}$$

とする．そこで，μ を求める点 $z\in D$ と充分小さい正数 h_1,h_2 を決め，4 点における $U_1(z\pm h_1), U_1(z\pm ih_2)$ の値を求め，中心差分の近似

$$\partial_{x_1}u_1 \approx \delta_{x_1}U_1 = \frac{U_1(z+h_1)-U_1(z-h_1)}{2h_1},$$
$$\partial_{x_2}u_1 \approx \delta_{x_2}U_1 = \frac{U_1(z+ih_2)-U_1(z-ih_2)}{2h_2}$$

を求める．最後に，

$$\mu(z) = \overline{\partial}u_{-1} + \partial u_1 = \overline{\overline{\partial u_1}} + \partial u_1$$
$$\approx \mathrm{Re}\big(\delta_{x_1}U_1(z)\big) + \mathrm{Im}\big(\delta_{x_2}U_1(z)\big)$$

によって $\mu(z)$ の近似が得られる．

この境界上での積分値の離散化 U_1 および差分は $z\in D$ ごとに計算可能であり，したがって $U_{\ell,k}$ を求めたのちは，異なる点での μ の再構成はデータ交換を必要とせず並列に計算可能である．また $U_{\ell,k}$ も ℓ,k ごとに並列計算が可能であり，アルゴリズム全体を通して高い並列性を有している．

5. 数値計算例

本節では，X 線 CT アルゴリズムの検証で標準的にもちいられる修正 Shepp-Logan ファントム [9] を対象として，提案する数値的再構成手法の妥当性を示す．

修正 Shepp-Logan ファントムは単位円 D 内の楕円

$$E = \left\{ (x_1, x_2)\,;\, \frac{x_1^2}{0.69^2} + \frac{x_2^2}{0.92^2} < 1 \right\}$$

を占めるが，数値実験では，$x \in D \setminus E$ に対して $\mu(x) = 0$ と拡張して D での $\mu(x)$ を求めた．具体的には，正方形領域 $[-1, 1]^2$ の各辺を 256 等分して得られる刻み幅 $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2/256$ の格子点のうち D に含まれる点で $\mu(x)$ の値を求めた．また，観測値の Radon 変換は，その対称性と D の有界性を考慮して $\arg\omega \in (0, \pi)$, $s \in (-1, 1)$ 方向にそれぞれ 180 点, 360 点の等分点上で与えるものとする．また (9) の数値計算の実現可能性とその性質を論じるため，観測誤差は考慮しないものとし，数値計算は倍精度環境でおこなった．

従来手法である FBP の結果を Fig. 5 に示す．ここで h として Shepp-Logan フィルタ [6, 8] を標本化定理の許すバンド幅の上限値 180 を設定してもちいた．ただし合成積 $P_w * h$ の数値計算には，P_w を等間隔の 360 点で観測していることから，360 点の台形則をもちいた．線型補間を利用する場合もそうでない場合も，計算結果は厳密解を充分に近似しており，Fig. 5 には線型補間を利用する場合の結果を示した．

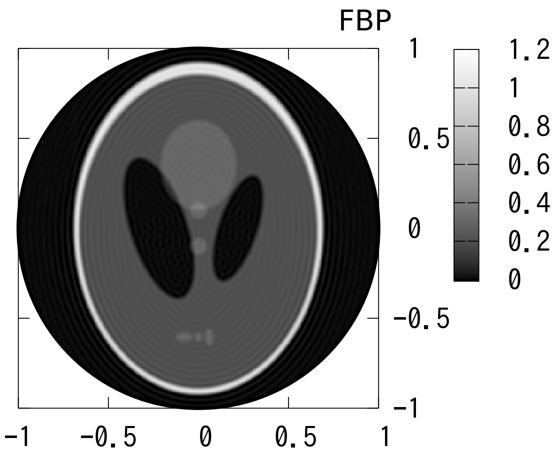

Fig. 5: Reconstruction Result by Filtered Back-projection with Linear Interpolation in $P_w * h(s)$ at $s = x \cdot \omega$

次に，提案手法での再構成の結果を Fig. 6 に示す．離散化パラメータを $K = 360$, $N = 360$ (Γ_+ に含まれる観測方向は約 180 個), $M = 180$ として，多項式の計算には Horner 法をもちいた．上述の点で再構成をおこない，差分の刻み幅は $h_1 = \Delta x_1/2$, $h_2 = \Delta x_2/2$ とした．ただし $z \pm h_1$, $z \pm ih_2 \notin D$ のときは，中心差分に代えて前進もしくは後退差分をとった．既存の FBP および提案手法における計算時間を Table 1 に示す．計算時間の測定には Xeon E5-2650 v4 (2.2GHz) 上で OpenMP による並列計算をおこなった．実装では，各スレッドで ℓ, k 毎に Fourier 変換を並列計算した後に同期をとり，μ を求める各点での (9) と差分をスレッド毎の並列計算により求めた．上述のとおり，各々の計算過程ではデータ交換を必要とせず，計算順序は任意に設定可能である．提案手法が補間を必要としないことも考慮すると，計算速度は従来手法に比して妥当であり，また並列化も効果的であることがわかる．

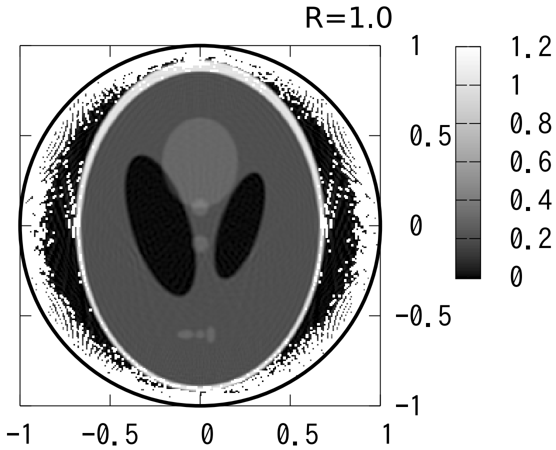

Fig. 6: Reconstruction Result by the Proposed Method by Integral Path with $K = 360$, $N = 360$, $M = 180$ and Radius 1.0

Table 1: Computational Times on Xeon E5-2650 v4 (2.2GHz), Parallel Computation is Prosessed with OpenMP, Unit: sec.

	single core	24 cores
FBP (interpolate)	0.190	0.139
FBP (non-interpolate)	321	20.7
Proposed	44.0	2.75

さて提案手法は，楕円領域 E 内では FBP による Fig. 5 と同程度の再構成結果を与えている．一方 $D \setminus E$ では $\mu(x) = 0$ と拡張しているため，値 0 に対応する黒色となるべきであるが，Fig. 6 においては，実線で示す単位円 ∂D の内部で，特に ∂D の近傍で白色で示される部分がある．この白い領域は，再構成された値が凡例に示す $0 \le \mu(x) \le 1.2$ の範囲外の値となったことを示している．これは，再構成する点 z が積分路の ∂D に近づくことで，(9) の分母に現れる $\zeta_k - z$ が 0 に近づき計算精度が悪化しているためと考えられる．

そこで，積分公式 (8) の積分路を半径 $R = 1.1$, 1.2 の円として求めた $\mu(x)$ をそれぞれ Fig. 7, Fig. 8 に示す．ただし Radon 変換 (5) も半径 1.1, 1.2 の円周上で取得し，D が単位円と仮定して導出した $U_1(z)$ の定義 (9) は半径 R の円でも $\zeta_k = Re^{2\pi ik/K}$ とすれば適用可能であることに注意する．

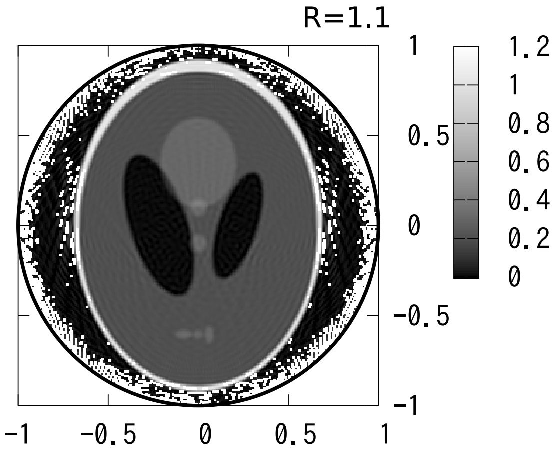

Fig. 7: Reconstruction Result by Proposed Method by Integral Path with $K = 360$, $N = 360$, $M = 180$ and Radius 1.1

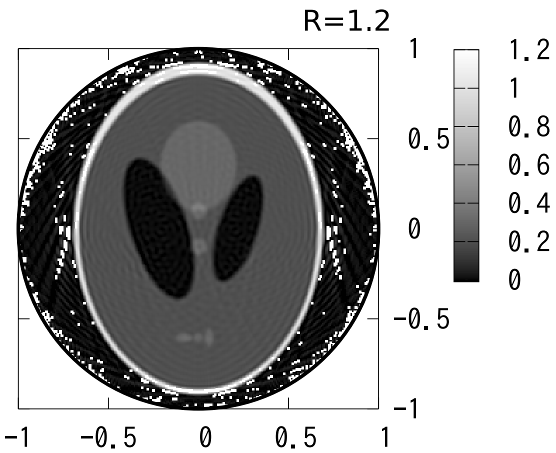

Fig. 8: Reconstruction Result by Proposed Method by Integral Path with $K = 360$, $N = 360$, $M = 180$ and Radius 1.2

計算結果より，積分路を境界 ∂D から分離することで，∂D の近傍でも $\mu(x) = 0$ が得られており，また E においても極端な画質の劣化はみられない．

積分路と ∂D との距離が $U_1(z)$ の精度に与える影響を調べるため，$z = (r, \alpha)$ と極座標で表して

$$\mathrm{Error}(r) = \max_{\alpha_j} |U_1(r, \alpha_j) - u_1(r, \alpha_j)|, \quad \alpha_j = \frac{2\pi j}{J} \tag{10}$$

を求めたものを Fig. 9 に示す．ただし $u_1(z)$ の計算には，(2) と $u(x, \xi)$ の定義より，S^1 の 2048 個の等分点 ξ_n で $u(x, \xi)$ を厳密に求めて，離散 Fourier 変換をもちいた．また各 $r = |z|$ ごとに 3600 方向の α_j で誤差を求めて最大値を図示した．図中，縦軸に対数軸で誤差を示していることに注意する．$R = 1$ のときは，z が ∂D に近づくことにより，すなわち $r = |z|$ が 1 に近づくことにより，誤差が急激に増大することがわかる．一方，$R = 1.1$ または 1.2 の場合は，境界から離れた位置で誤差が増大するものの，境界付近でも同程度の精度で計算できていることがわかる．なお，ξ 方向の離散化数を 4096 点としても $\mathrm{Error}(r)$ はほとんど変わらず，$u_1(z)$ は高精度に求まっていることに注意しておく．

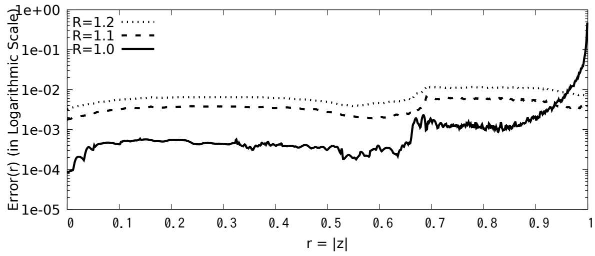

Fig. 9: Errors in $U_1(z)$ Measured by (10)

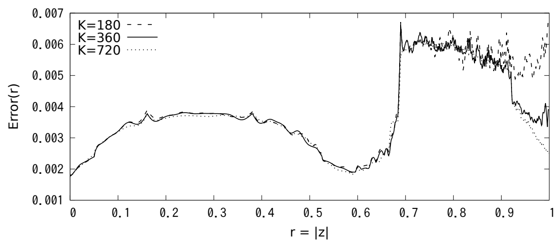

Fig. 10: Error Dependency on K (Number of Spacial Measurement Nodes), with $R = 1.1$, $N = 360$, and $M = 180$

次に境界上での積分 (8) の離散化にもちいる K, N, M の 3 つの値の影響を，$R = 1.1$ の場合に調べる．積分の標本点数が $K = 180, 360, 720$ (ただし $N = 360$, $M = 180$) での誤差を Fig. 10 に，観測の角度方向の数が $N = 180, 360, 720$ (ただし $K = 360$, $M = 180$) での誤差を Fig. 11 に，(8) の級数の打ち切り次数が $M = 90, 180, 360$ (ただし $K = 360$, $N = 360$) での誤差を Fig. 12 に，それぞれ示す．3 つの図では縦軸の範囲が異なるが，いずれにも Fig. 7 でもちいた $K = 360$, $N = 360$, $M = 180$ は共通して現れている．計算結果より，これらのパラメータの範囲では，K は境界近傍の精度に影響を与えること，角度方向は $N = 360$ で充分なこと，また M を大きくとると誤差が増大することがわかる．

また，$[-0.2, 0.2] \times [-0.7, -0.5]$ の矩形領域だけでの局所的再構成として，この矩形を改めて 128×64 等分して得られる格子上で μ を求めた結果を Fig. 13, Fig. 14 に，それらの $x_2 = -0.6$ での断面を Fig. 15 に示す．ただし Radon 変換の観測点数と離散化パラメータは，上述の Fig. 5 および Fig. 7 と同一である．局所的再構成でも，提案手法は FBP と同様の良好な結果となっている．

6. 結言

本論文では Cauchy 型の積分公式に基づく X 線 CT の実現可能性と，その積分公式の離散化 (9) の境界近くでの挙動を数値的に示した．X 線 CT に限れば FBP は完成された手法であり，本提案手法はその置き換えとなるものではない．しかし一方で，従来手法は X 線の直進性を本質的に利用しており，光トモグラフィや陽電子断層撮像法など，散乱を考

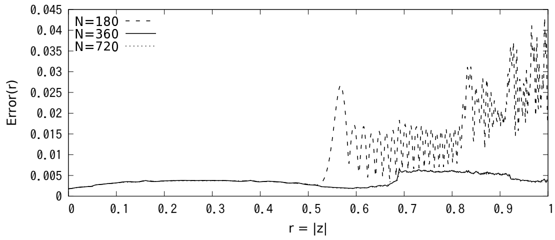

Fig. 11: Error Dependency on N (Number of Measurement Angles), with $R = 1.1$, $K = 360$, and $M = 180$

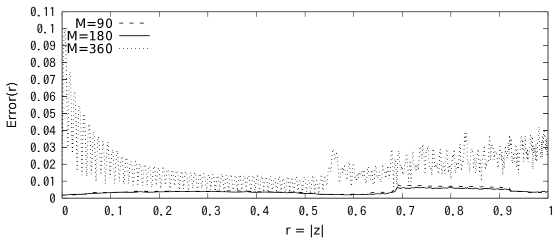

Fig. 12: Error Dependency on M (Truncation of Series), with $R = 1.1$, $K = 360$, and $N = 360$

慮すべき次世代断層撮影法への適用において高解像度化は実現されていない．本研究の提案手法は従来手法と同等であるのみならず，散乱を含む場合への適用可能性が研究されている [3]．本研究で示した数値的実現の基礎付けをもとに，一層の研究の進展が期待される．

謝辞　第一著者は科研費 (挑戦的研究 (萌芽) No. 18K18719, 基盤研究 (A) No. 16H02155, 基盤研究 (C) No. 18K07712) の助成を，第二著者は NSF grant DMS-1907097 の助成を受けました．

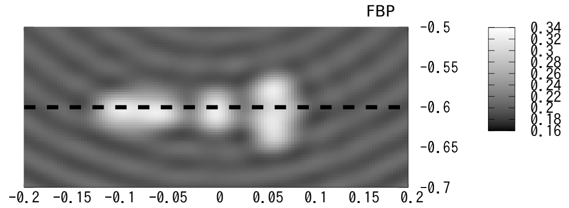

Fig. 13: Locally Reconstructed $\mu(x)$ by Filtered Back-projection in Rectangle $[-0.2, 0.2] \times [-0.7, -0.5]$. Section Along Dotted Line is Shown in Fig. 15

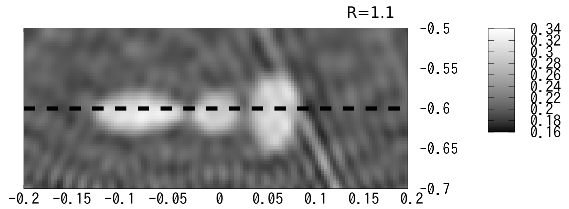

Fig. 14: Locally Reconstructed $\mu(x)$ by Proposed Method in Rectangle $[-0.2, 0.2] \times [-0.7, -0.5]$. Section Along Dotted Line is Shown in Fig. 15

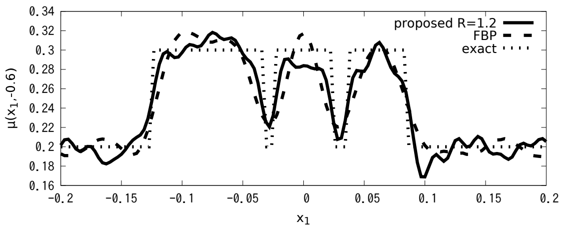

Fig. 15: Section of Locally Reconstructed $\mu(x)$ (Fig. 13 and Fig. 14) on $x_2 = -0.6$

参考文献

(1) A. L. Bukhgeim : *Inversion Formulas in Inverse Problems*, Linear Operators and Ill-Posed Problems by M. M. Lavrentiev and L. Ya. Savalev, (1995), Plenum, New York, pp. 323–378.

(2) D. V. Finch : *The Attenuated X-ray Transform: Recent Developments*, in Inside Out: Inverse Problems and Applications, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **47** (2003), Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 47–66.

(3) H. Fujiwara, K. Sadiq, and A. Tamasan, *A Fourier Approach to the Inverse Source Problem in an Absorbing and Non-weakly Scattering Medium*, submitting.

(4) J. H. Hubbell and S. M. Seltzer : *X-Ray Mass Attenuation Coefficients*, NIST Standard Reference Database 126 (NISTIR 5632) (2004).

(5) A. C. Kak and M. Slaney : *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, (1988), IEEE Press, New York.

(6) F. Natterer and F. Wübbeling : *Mathematical Methods in Image Reconstruction*, (2001), SIAM, Philadelphia.

(7) J. Radon : *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Kl., **69** (1917), pp. 262–277.
(English translation : *On the Determination of Functions from Their Integral Values Along Certain Manifolds*, in IEEE Trans. Med. Imaging, **MI-5**(1986), pp. 170–176.)

(8) L. A. Shepp and B. F. Logan : *The Fourier Reconstruction of a Head Section*, IEEE Trans. Nuclear Sci., **NS-21** (1974), pp. 21–43.

(9) P. A. Toft, *The Radon Transform — Theory and Implementation*, Ph.D. Thesis, Technical University of Denmark (1996).