計算数理工学論文集 Vol. 18 (2018 年 12 月)，論文 No. 07-181201 JASCOME

2次元弾性波周期散乱解析のための境界要素法とそのトポロジー最適化への応用

A BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR TWO-DIMENSIONAL ELASTIC PERIODIC SCATTERING AND ITS APPLICATIONS TO TOPOLOGY OPTIMSATION

松島　慶 [1)]，飯盛　浩司 [2)]，高橋　徹 [3)]，松本　敏郎 [4)]

Kei MATSUSHIMA, Hiroshi ISAKARI, Toru TAKAHASHI and Toshiro MATSUMOTO

1) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464-8603　名古屋市千種区不老町，　E-mail: k_matusima@nuem.nagoya-u.a.ac.jp)
2) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464-8603　名古屋市千種区不老町，　E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.a.ac.jp)
3) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464-8603　名古屋市千種区不老町，　E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.a.ac.jp)
4) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464-8603　名古屋市千種区不老町，　E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.a.ac.jp)

This paper presents a boundary element method for elastic wave scattering by periodically allocated cavities in an unbounded elastic matrix and its applications to topology optimisation. Periodic Green's function is employed as the kernels of layer potentials, which enables us to analyse the scattering problem accurately. We propose an efficient calculation of this Green's function using Poisson's summation formula and Kummer's transformation. After that, a new topological derivative is derived by using the adjoint variable method and incorporated into a level-set-based topology optimisation algorithm. We finally demonstrate a numerical example of the topology optimisation and confirm its effectiveness.

Key Words: Boundary element method, Topology optimisation, Elastic wave, Periodic scattering

1. 緒言

弾性メタマテリアル [(1)] やフォノニック結晶 [(2)] と呼ばれる弾性体周期構造は，弾性波に対して通常の物質が有しない特異な性質を示す．例えばフォノニック結晶中を伝播する弾性波は一般に複雑な分散関係を示し，バンドギャップと呼ばれる周波数帯においては弾性波の伝播を許容しない．

このような工学的に望ましい性質を示す周期構造の制振技術への応用に向けて，その設計手法の確立が必要とされている．近年，トポロジー最適化に基づく弾性体周期構造の設計法がいくつか提案されており，例えば Sigmund and Jensen[(3)] は広いバンドギャップを有するフォノニック結晶を，Noguchi et al.[(4)] は弾性場–音響場連成系において入射する音波を横波に変換するメタサーフェスをトポロジー最適化を用いて設計している．

これらのトポロジー最適化は感度解析に有限要素法を用いているが，有限要素法は弾性波解析に必ずしも適しているとは言えない．特に，無限遠方で放射条件が課される散乱解析は，解析領域の打ち切りと PML などの吸収境界を必要とするために，高い解析精度を得ることは困難である．一方で，境界要素法は適切な Green 関数を用いることによって散乱波の放射を厳密に表現することが可能であり，比較的小さい解析規模で高精度な解を得ることが期待できる．したがって，境界要素法は高精度な散乱解析を要する複雑なトポロジー最適化問題に対して特に有用であると考えられ，様々な波動場に関するトポロジー最適化においてその有効性が確かめられてきた [(5, 6)]．

本研究は，2 次元弾性体母材の内部に 1 周期的に空孔が配列されたモデルについて，弾性波散乱解析のための境界要素法とそのトポロジー最適化への応用について論じる．特に，この境界要素法に必要となる周期 Green 関数の高効率な計算法を新たに提案し，またトポロジー最適化の設計感度として用いられるトポロジー導関数の導出を行う．これらに基づく感度解析とレベルセット法に基づくトポロジー最適化アルゴリズム [(7)] を組み合わせて，弾性体周期構造の新たなトポロジー最適化法を提案する．数値例では，入射する P 波を S 波に変換する周期構造の設計を題材としてトポロジー最適化

2018 年 9 月 28 日受付，2018 年 10 月 26 日受理
¶Dedicated to the memory of Prof. Shoichi KOBAYASHI

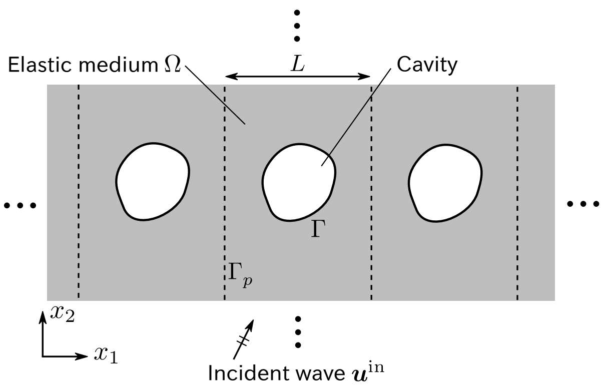

Fig. 1　Periodic scattering of an incident elastic wave.

を行った例を示し，提案手法の有効性を確認する．

2. 弾性波周期散乱

2.1. 問題設定

Fig.1 のように，Lamé 定数を (λ,μ)，質量密度を ρ とする平面ひずみ状態の等方線形弾性体母材の内部に空孔が x_1 方向に周期的に配列された構造を考える．この周期構造の周期長を L，ユニットセルの 1 つを $U=(-L/2,L/2)\times\mathbb{R}$ として，その内部の母材領域を $\Omega\subset U$ で定義する．ここで，ある定数 $\beta\in\mathbb{R}$ について次の擬周期条件を満たすような角周波数 ω の入射波 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{in}}$ を与える．

$$u_i^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}+L\boldsymbol{e}_1)=u_i^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \tag{1}$$

ここに，$\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2)$ は (x_1,x_2) 座標系の正規直交基底である．$\boldsymbol{u}^{\mathrm{in}}$ は周期的に配列された空孔によって散乱し，その全変位場 $\boldsymbol{u}$ と全応力場 $\boldsymbol{\sigma}$ は次の周期境界値問題に支配される．

$$\sigma_{ji,j}(\boldsymbol{x})+\rho\omega^2u_i(\boldsymbol{x})=0\quad \boldsymbol{x}\in\Omega \tag{2}$$

$$t_i(\boldsymbol{x}):=\sigma_{ji}(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{x})=0\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma \tag{3}$$

$$u_i(\boldsymbol{x}+L\boldsymbol{e}_1)=u_i(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma_p \tag{4}$$

$$u_{i,1}(\boldsymbol{x}+L\boldsymbol{e}_1)=u_{i,1}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma_p \tag{5}$$

$$\text{Radiation condition for } u_i-u_i^{\mathrm{in}} \text{ as}\quad x_2\to\pm\infty \tag{6}$$

ここに，$\boldsymbol{n}$ は Ω の境界 $\Gamma=\partial\Omega$ の上で Ω に対して外向きの単位法線ベクトルであり，$\Gamma_p=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2\mid x_1=-L/2\}$ は周期境界である．

2.2. 境界要素法

本研究は周期境界値問題 (2)–(6) を Burton-Miller 型境界積分方程式

$$\left[\left\{\left(\frac{1}{2}\mathcal{I}+\mathcal{D}\right)+\alpha\mathcal{N}\right\}\boldsymbol{u}\right]_i-\left[\left\{\mathcal{S}+\alpha\left(\mathcal{D}^*-\frac{1}{2}\mathcal{I}\right)\right\}\boldsymbol{t}\right]_i =u_i^{\mathrm{in}}+\alpha C_{ijkl}u_{k,l}^{\mathrm{in}}n_j \tag{7}$$

を選点法・区分一定要素で離散化し，$\mathcal{H}$ マトリクス法 [8] で高速化された線形代数演算を用いて解く．ここに，$\alpha\in\mathbb{C}$ は Burton-Miller 法の結合定数である．α は任意であるが，離散化して得られる連立一次方程式が良条件となり，かつ見かけの固有値問題を適切に回避するためには，α を次式で定めると良いことが数値的に確かめられている [9]．

$$\alpha=-\frac{\mathrm{i}}{\omega\sqrt{\rho\mu}} \tag{8}$$

また，$\mathcal{I}$ は恒等作用素であり，$\mathcal{S}$，$\mathcal{D}$，$\mathcal{D}^*$ および $\mathcal{N}$ は次式で定義される積分作用素である．

$$(\mathcal{S}\boldsymbol{\phi})_i(\boldsymbol{x})=\int_\Gamma G_{ij}^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\phi_j(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma_y \tag{9}$$

$$(\mathcal{D}\boldsymbol{\phi})_i(\boldsymbol{x})=-\mathrm{v.p.}\int_\Gamma C_{kljm}G_{ki,l}^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_m(\boldsymbol{y})\phi_j(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma_y \tag{10}$$

$$(\mathcal{D}^*\boldsymbol{\phi})_i(\boldsymbol{x})=\mathrm{v.p.}\int_\Gamma C_{kljm}G_{ki,l}^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_m(\boldsymbol{x})\phi_j(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma_y \tag{11}$$

$$(\mathcal{N}\boldsymbol{\phi})_i(\boldsymbol{x}) =-\mathrm{p.f.}\int_\Gamma C_{impq}C_{kljn}G_{kp,lq}^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_m(\boldsymbol{x})n_n(\boldsymbol{y})\phi_j(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma_y \tag{12}$$

ここに，‘v.p.’，‘p.f.’ はそれぞれ Cauchy の主値積分，発散積分の有限部分を表す．$\boldsymbol{C}$ は弾性テンソルであり，Kronecker のデルタ δ_{ij} を用いて次式で表される．

$$C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{13}$$

また，G_{ij}^p は周期 Green 関数であり，Dirac のデルタ関数 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ で表される方程式

$$(\lambda+\mu)G_{kl,ik}^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\mu G_{ij,kk}^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\rho\omega^2G_{ij}^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) =-\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ij} \tag{14}$$

の解である Green 関数のうち，さらに擬周期条件

$$G_{ij}^p(\boldsymbol{x}+L\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{y})=G_{ij}^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \tag{15}$$

と放射条件を満足するものである．

2.3. 周期 Green 関数

境界積分方程式 (7) を解くためには，周期 Green 関数 G_{ij}^p の計算が必要である．本節では，G_{ij}^p のいくつかの表現を示した後に，提案法である Kummer 変換を用いた計算法について述べる．

2.3.1. 基本解の格子和による表現

2 次元動弾性学の基本解 G_{ij} は第 1 種 n 次の Hankel 関数 $H_n^{(1)}$ および弾性波の縦波の波数 $k_{\mathrm{L}}=\omega\sqrt{\rho/(\lambda+2\mu)}$ と横波の波数 $k_{\mathrm{T}}=\omega\sqrt{\rho/\mu}$ を用いて，次式で与えられる．

$$G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{\mathrm{i}}{4\mu}\left\{H_0^{(1)}(k_{\mathrm{T}}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\delta_{ij} +\frac{1}{k_{\mathrm{T}}^2}\frac{1}{\partial y_i\partial y_j}\left(H_0^{(1)}(k_{\mathrm{T}}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)-H_0^{(1)}(k_{\mathrm{L}}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\right)\right\} \tag{16}$$

周期 Green 関数 G_{ij}^p は G_{ij} の格子和

$$G_{ij}^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_{ij}(\boldsymbol{x}-nL\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\beta} \tag{17}$$

で表すことができる．しかし，弾性定数 λ，μ の虚部が小さいとき式 (17) の無限和の収束は非常に遅く，数値計算に適していない．

2.3.2. Poisson の和公式による表現

以下では，簡単のために λ, $\mu > 0$ とする．まず，$x_2 - y_2 \neq 0$ を仮定する．式 (17) の両辺を x_1 に関して Fourier 変換し，Poisson の和公式を適用すると次式を得る (複合同順).

$$G_{ij}^{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} G_{ij}^{p+}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & (x_2 - y_2 > 0) \\ G_{ij}^{p-}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & (x_2 - y_2 < 0) \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &G_{ij}^{p\pm}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big\{ F_{ij}^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m) \exp\Big(\mathrm{i}k_{\mathrm{L}} \boldsymbol{p}^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\Big) \\ &\qquad + F_{ij}^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m) \exp\Big(\mathrm{i}k_{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\Big) \Big\} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\xi_m = (\beta + 2m\pi)/L \tag{20}$$

$$F_{ij}^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m) = \frac{1}{(\lambda + 2\mu)\sqrt{k_{\mathrm{L}}^2 - \xi_m^2}} d_i^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m) d_j^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m) \tag{21}$$

$$F_{ij}^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m) = \frac{1}{\mu\sqrt{k_{\mathrm{T}}^2 - \xi_m^2}} d_i^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m) d_j^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m) \tag{22}$$

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m) = \frac{1}{k_{\mathrm{L}}} \left(\xi_m,\ \pm\sqrt{k_{\mathrm{L}}^2 - \xi_m^2}\right)^T \tag{23}$$

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m) = \frac{1}{k_{\mathrm{T}}} \left(\pm\sqrt{k_{\mathrm{T}}^2 - \xi_m^2}, -\xi_m\right)^T \tag{24}$$

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m) = \frac{1}{k_{\mathrm{L}}} \left(\xi_m,\ \pm\sqrt{k_{\mathrm{L}}^2 - \xi_m^2}\right)^T \tag{25}$$

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m) = \frac{1}{k_{\mathrm{T}}} \left(\xi_m,\ \pm\sqrt{k_{\mathrm{T}}^2 - \xi_m^2}\right)^T \tag{26}$$

ここに，式 (21)–(26) に現れる平方根は偏角の主値 $\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \to (-\pi, \pi]$ を用いて定められる主値 $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\, z\right)$ を取るものとする．このとき，式 (19) 右辺の項は $m \to \pm\infty$ で指数関数的に減衰するため，級数は素早く収束することが期待される．しかし，$|x_2 - y_2|$ が小さいとき明らかにその収束性は悪化し，その極限である $x_2 - y_2 = 0$ の場合は発散する．また，Green 関数のもつ $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = 0$ における特異性が式 (19) 右辺に陽に現れないため，その数値積分に困難が生じる．

2.3.3. Kummer 変換による表現

前小節で述べた問題を解決するために，式 (19) に Kummer 変換を適用する．

Kummer 変換は，級数を収束が速い 2 つの級数に分離することで収束性を改善する．今，ある数列 a_n の和で定義される級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束を加速することを考える．ここで，数列 b_n を $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ よりも速く収束し，かつ次の極限が存在するような数列であるとする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \gamma \neq 0 \tag{27}$$

このとき，次の変換は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束を加速し，b_n による $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の Kummer 変換と呼ぶ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \gamma \frac{b_n}{a_n}\right) a_n \tag{28}$$

Kummer 変換による収束加速の性能は b_n の選び方に依存する．Helmholtz 方程式の周期 Green 関数について，Linton[10] は波数を純虚数とした場合の基本解を用い，松本ら [11] は波数が純虚数の 2 つの異なる基本解を用いるように修正することで収束性が改善できることを示した．

本研究は，この修正をさらに一般化して動弾性学の周期 Green 関数 G_{ij}^{p} の計算に適用する．今，式 (16) において弾性率 λ, μ をそれぞれ $-\lambda/a^2$, $-\mu/a^2$ に置き換えた $G_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $\tilde{G}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; a)$ とする．また，式 (21)–(26) を同様の方法で置き換えて $\tilde{F}_{ij}^{\mathrm{L}\pm}$, $\tilde{F}_{ij}^{\mathrm{T}\pm}$, $\tilde{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{L}\pm}$, $\tilde{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{T}\pm}$, $\tilde{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{L}\pm}$, $\tilde{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}\pm}$ を定義する．ここで，$q_s > 0$ と $c_s \in \mathbb{R}$ $(s = 1, \cdots, N_K)$ をそれぞれ N_K 個の定数として

$$\sum_{s=1}^{N_K} c_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{ij}(\boldsymbol{x} - nL\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{y}; \sqrt{q_s}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\beta} \tag{29}$$

による Kummer 変換を式 (19) に施すと，

$$\begin{aligned} G_{ij}^{p\pm}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = &\sum_{s=1}^{N_K} c_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{ij}(\boldsymbol{x} - nL\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{y}; \sqrt{q_s}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\beta} \\ &+ \hat{G}_{ij}^{\pm}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\hat{G}_{ij}^{\pm}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[F_{ij}^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m) \exp\Big(\mathrm{i}k_{\mathrm{L}} \boldsymbol{p}^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\Big) \\ &\qquad + F_{ij}^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m) \exp\Big(\mathrm{i}k_{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\Big) \\ &- \sum_{s=1}^{N_K} c_s \tilde{F}_{ij}^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m; \sqrt{q_s}) \exp\Big(\mathrm{i}\sqrt{q_s} k_{\mathrm{L}} \tilde{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m; \sqrt{q_s}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\Big) \\ &- \sum_{s=1}^{N_K} c_s \tilde{F}_{ij}^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m; \sqrt{q_s}) \exp\Big(\mathrm{i}\sqrt{q_s} k_{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m; \sqrt{q_s}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\Big) \Big] \end{aligned} \tag{31}$$

を得る．ここで，式 (30) 右辺第 1 項の級数内の各項は $n \to \pm\infty$ で指数関数的に減衰し，速やかに収束する．第 2 項の級数 $\hat{G}_{ij}^{\pm}$ は，次の条件を満たすとき $O(|m|^{-2N_K - 1})$ の級数となり，$x_2 - y_2 = 0$ の場合においても収束する．

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_{N_K} \\ q_1^2 & q_2^2 & \cdots & q_{N_K}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{N_K} & q_2^{N_K} & \cdots & q_{N_K}^{N_K} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N_K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^{N_K} \end{pmatrix} \tag{32}$$

つまり，N_K を大きくするほど式 (30) 右辺第 2 項は素早く収束するが，反対に第 1 項は 1 回の和に要する計算が煩雑になり，収束までの計算時間は大きくなる．したがって，計算環境に応じて最適な N_K を調べる必要がある．

2.4. 遠方場における平面波振幅

散乱解析において，散乱波の遠方場における挙動は興味の対象の 1 つである．周期構造を散乱する弾性波は遠方で平面波の重ね合わせとして近似できることが知られている [12]．実際，Poisson の和公式で表現された周期 Green 関数 (19) を変位 $\boldsymbol{u}$ の積分表現に代入することで，次式を得る (複合同順).

$$\begin{aligned} u_i(\boldsymbol{x}) \sim &\sum_{m \in I_{\mathrm{L}}} A_m^{\mathrm{L}\pm} d_i^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m) \exp\Big(\mathrm{i}k_{\mathrm{L}} \boldsymbol{p}^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m) \cdot \boldsymbol{x}\Big) \\ &+ \sum_{m \in I_{\mathrm{T}}} A_m^{\mathrm{T}\pm} d_i^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m) \exp\Big(\mathrm{i}k_{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m) \cdot \boldsymbol{x}\Big) \\ &+ u_i^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}) \quad x_2 \to \pm\infty \end{aligned} \tag{33}$$

$$A_m^{\mathrm{L}\pm} = \frac{\mathrm{i}}{2L(\lambda+2\mu)\sqrt{k_\mathrm{L}^2-\xi_m^2}} \int_\Gamma \Big\{ d_i^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m)\sigma_{ji}n_j + \mathrm{i}k_\mathrm{L}\left(\lambda\delta_{ij}+2\mu p_i^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m)p_j^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m)\right)u_i n_j \Big\} \times \exp\left(-\mathrm{i}k_\mathrm{L}\boldsymbol{p}^{\mathrm{L}\pm}(\xi_m)\cdot\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{34}$$

$$A_m^{\mathrm{T}\pm} = \frac{\mathrm{i}}{2L\mu\sqrt{k_\mathrm{T}^2-\xi_m^2}} \int_\Gamma \Big\{ d_i^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m)\sigma_{ji}n_j + \mathrm{i}k_\mathrm{T}\mu\left(p_i^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m)d_j^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m)+d_i^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m)p_j^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m)\right)u_i n_j \Big\} \times \exp\left(-\mathrm{i}k_\mathrm{T}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}\pm}(\xi_m)\cdot\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{35}$$

$$I_\mathrm{L} = \{m\in\mathbb{Z} \mid k_\mathrm{L}^2-\xi_m^2>0\} \tag{36}$$

$$I_\mathrm{T} = \{m\in\mathbb{Z} \mid k_\mathrm{T}^2-\xi_m^2>0\} \tag{37}$$

すなわち，遠方場において散乱波は有限個の平面 P 波と S 波の重ね合わせとなり，その個数と進行方向は ω，L，β のみに依存する．一方で，それらの振幅 $A_m^{\mathrm{L}\pm}$，$A_m^{\mathrm{T}\pm}$ は式 (34), (35) の境界積分で求められる．

3. トポロジー最適化

本研究は，前節で定義した弾性波周期散乱場における空孔 $U\setminus\overline{\Omega}$ の分布のトポロジー最適化問題を考える．

3.1. トポロジー導関数

2 階対称テンソル値関数 $\boldsymbol{\phi}$ を用いて次式のように定義される線形汎関数 f を考える．

$$f(\boldsymbol{u};\Gamma) = \int_\Gamma \phi_{ij}(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma \tag{38}$$

今，中心 $\boldsymbol{x}^0$，半径 ε の微小な円形空孔 $\Omega_\varepsilon\subset\Omega$ が新たに発生する場合を考える．ここで，Ω_ε の境界 $\partial\Omega_\varepsilon$ において表面力が 0 である境界条件を課し，またこの上で単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を Ω_ε に対して内向きに定義する．このトポロジーの変化に対応して，変位 $\boldsymbol{u}$，応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と f が次式のように変化すると仮定する．

$$u_i(\boldsymbol{x})\to u_i(\boldsymbol{x})+\delta u_i(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x}\in U \tag{39}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})\to \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})+\delta\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x}\in U \tag{40}$$

$$f(\boldsymbol{u};\Gamma)\to f(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u};\Gamma\cup\partial\Omega_\varepsilon) \tag{41}$$

f のトポロジー導関数を求めるためには，式 (41) より定義される f の変化量

$$\delta f(\boldsymbol{x}^0) = f(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u};\Gamma\cup\partial\Omega_\varepsilon)-f(\boldsymbol{u};\Gamma) = f(\delta\boldsymbol{u};\Gamma)+f(\boldsymbol{u};\partial\Omega_\varepsilon)+f(\delta\boldsymbol{u};\partial\Omega_\varepsilon) \tag{42}$$

の $\varepsilon\to 0$ に関する漸近展開を求める必要がある．式 (42) 右辺第 2 項は Gauss の発散定理を用いて容易に評価でき，次式を得る．

$$f(\boldsymbol{u};\partial\Omega_\varepsilon) = \pi\varepsilon^2\left(-\phi_{ij}(\boldsymbol{x}^0)D_{ijkl}\sigma_{kl}(\boldsymbol{x}^0)-\phi_{ij,j}(\boldsymbol{x}^0)u_i(\boldsymbol{x}^0)\right)+O(\varepsilon^3) \tag{43}$$

ここに，$\boldsymbol{D}$ はコンプライアンステンソルであり，平面ひずみ状態の場合次式で与えられる．

$$D_{ijkl} = \frac{1}{4\mu}\left(-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{44}$$

式 (42) 右辺第 3 項は次式で評価できることが分かる [6]．

$$f(\delta\boldsymbol{u};\partial\Omega_\varepsilon) = \pi\varepsilon^2\big(\phi_{kl}(\boldsymbol{x}^0)D_{klmn} - \phi_{ij}(\boldsymbol{x}^0)\left(I_{ijkl}-S_{ijkl}\right)^{-1}D_{klmn}\big)\sigma_{mn}(\boldsymbol{x}^0)+O(\varepsilon^3) \tag{45}$$

ここに，$\boldsymbol{S}$ は Eshelby テンソルであり，次式で与えられる．

$$S_{ijkl} = \frac{1}{4(\lambda+2\mu)}\left\{(\lambda-\mu)\delta_{ij}\delta_{kl}+(\lambda+3\mu)(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\right\} \tag{46}$$

式 (42) 右辺第 1 項は随伴変数法を用いて評価する．随伴変数 $\tilde{\boldsymbol{u}}$，$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ を次の境界値問題の解とする．

$$\tilde{\sigma}_{ji,j}(\boldsymbol{x})+\rho\omega^2\tilde{u}_i(\boldsymbol{x})=0 \quad \boldsymbol{x}\in\Omega \tag{47}$$

$$\tilde{\sigma}_{ji}(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{x})=\phi_{ji}(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x}\in\Gamma \tag{48}$$

$$\tilde{u}_i(\boldsymbol{x}+L\boldsymbol{e}_1)=\tilde{u}_i(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} \quad \boldsymbol{x}\in\Gamma_p \tag{49}$$

$$\tilde{u}_{i,1}(\boldsymbol{x}+L\boldsymbol{e}_1)=\tilde{u}_{i,1}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} \quad \boldsymbol{x}\in\Gamma_p \tag{50}$$

$$\text{Radiation condition for } \tilde{u}_i(\boldsymbol{x}) \text{ as} \quad x_2\to\pm\infty \tag{51}$$

このとき，$\delta\boldsymbol{u}$ と $\tilde{\boldsymbol{u}}$ に $\Omega\setminus\overline{\Omega_\varepsilon}$ における相反定理を適用することで次式を得る．

$$f(\delta\boldsymbol{u};\Gamma) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(\delta\sigma_{ij}\tilde{u}_i-\tilde{\sigma}_{ij}\delta u_i\right)n_j\mathrm{d}\Gamma = \pi\varepsilon^2\big\{\tilde{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{x}^0)\left(I_{ijkl}-S_{ijkl}\right)^{-1}D_{klmn}\sigma_{mn}(\boldsymbol{x}^0) - \rho\omega^2\tilde{u}_i(\boldsymbol{x}^0)u_i(\boldsymbol{x}^0)\big\}+O(\varepsilon^3) \tag{52}$$

f のトポロジー導関数 $\mathcal{T}$ を

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta f(\boldsymbol{x})}{\pi\varepsilon^2} \tag{53}$$

で定義すると，式 (42)，(43)，(45)，(52) より $\mathcal{T}$ は次式となる．

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \left(\tilde{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{x})-\phi_{ij}(\boldsymbol{x})\right)\left(I_{ijkl}-S_{ijkl}\right)^{-1}D_{klmn}\sigma_{mn}(\boldsymbol{x}) - \left(\rho\omega^2\tilde{u}_i(\boldsymbol{x})+\phi_{ij,j}(\boldsymbol{x})\right)u_i(\boldsymbol{x}) \tag{54}$$

3.2. B スプライン曲面のレベルセットに基づくトポロジー最適化アルゴリズム

本研究は，トポロジー最適化アルゴリズムに飯盛ら [7] が提案する方法を用いる．まず，ユニットセル U 内に固定設計領域 D を定義し，その内部の母材 Ω と空孔 $D\setminus\overline{\Omega}$ をレベルセット関数 $\phi: D\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を用いて次式のように表現する．

$$\Omega(t) = \{\boldsymbol{x} \mid \phi(\boldsymbol{x},t)<0\} \tag{55}$$

$$\Gamma(t) = \{\boldsymbol{x} \mid \phi(\boldsymbol{x},t)=0\} \tag{56}$$

$$D\setminus\overline{\Omega(t)} = \{\boldsymbol{x} \mid \phi(\boldsymbol{x},t)>0\} \tag{57}$$

この ϕ を仮想時間 t に関してトポロジー導関数 $\mathcal{T}$ と Amstutz and Andrä の式 [13] に基づき更新する．ここで，ϕ の空間方向の離散化に B スプライン基底関数を用いる．この際，基底関数の個数や次数を変化させることによって，得られる最適形状の複雑さを制御することが可能となる．

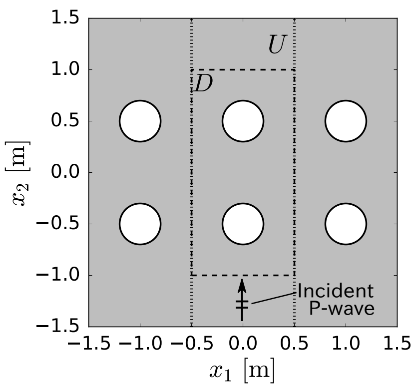

Fig. 2　Initial configuration.

3.3. 数値例

提案する境界要素法と導出したトポロジー導関数を用いて，本節では入射する P 波を S 波に変換する周期構造の設計を行う．

まず，入射波 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{in}}$ は $+x_2$ 方向に進行する平面 P 波であるとする．トポロジー最適化の目的汎関数 J を式 (34)，(35) で表された遠方場における散乱波振幅を用いて次式で定める．

$$J = \frac{\omega L}{2E^{\mathrm{in}}}\Big\{\sum_{m\in I_{\mathrm{L}}} (\lambda+2\mu)\, p_2^{\mathrm{L}+}(\xi_m)|A_m^{\mathrm{L}+}|^2 + \sum_{m\in I_{\mathrm{L}}} (\lambda+2\mu)\, p_2^{\mathrm{L}-}(\xi_m)|A_m^{\mathrm{L}-}|^2 - \sum_{m\in I_{\mathrm{T}}} \mu p_2^{\mathrm{T}+}(\xi_m)|A_m^{\mathrm{T}+}|^2 + \sum_{m\in I_{\mathrm{T}}} \mu p_2^{\mathrm{T}-}(\xi_m)|A_m^{\mathrm{T}-}|^2\Big\} \tag{58}$$

ここに，E^{in} はユニットセル U に単位時間あたりに入射するエネルギーである．ここで，エネルギー保存則より J は $-1 \le J \le 1$ を満たし，$J=-1$ は遠方場 $x_2 \to +\infty$ における散乱波が $+x_2$ 方向に進行する平面 S 波のみとなる場合に成り立ち，かつその場合に限る．よって，J を最小化する構造をトポロジー最適化によって求めることで，入射する P 波を S 波に変換する周期構造を設計することができる．

本数値例では，母材は鋼 ($\rho = 7.80\times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，Young 率 205 GPa，Poisson 比 0.30) とし，$L = 1\,\mathrm{m}$ の周期構造に垂直に周波数 5.5 kHz の平面 P 波を与える．なお，このとき $I_{\mathrm{L}} = \{0\}$，$I_{\mathrm{T}} = \{-1, 0, 1\}$ である．すなわち，散乱波はそれぞれ $x_2 \to \pm\infty$ で 0 次の平面 P 波と $-1, 0, 1$ 次の平面 S 波に分離する．固定設計領域 D は $D = (-0.5\,\mathrm{m}, 0.5\,\mathrm{m})\times(-1.0\,\mathrm{m}, 1.0\,\mathrm{m})$ とし，初期形状は Fig.2 のように円形の空孔が U 内に 2 つ並んだ状態とする．

まず，初期形状 (Fig.2) について $A_m^{\mathrm{L}\pm}$ と $A_m^{\mathrm{T}\pm}$ を計算した結果を Fig.3 に示す．この図において，赤 (resp. 青) の矢印の方向は，遠方場における散乱波の平面 P 波 (resp. S 波) の進行方向を表し，その長さは振幅の大きさ $|A_m^{\mathrm{L}\pm}|$ (resp. $|A_m^{\mathrm{T}\pm}|$) を入射波の振幅の大きさで正規化した値を表す．同様に，赤の破線は入射 P 波の方向と大きさを示している．

次に，トポロジー最適化を行い得られた結果を示す．Fig.4 は最適化ステップに対する J の値の履歴を示している．この結果から，初期形状 (step 0) では J がほぼ理論的最大値 1 を取っているにも関わらず，最適形状 (step 19) では理論的最小値 -1 にほぼ到達している．実際に，得られた最適形状 (Fig.5) について Fig.3 と同様に遠方場振幅をプロットした結果を Fig.6 に示すと，平面 P 波を入射しているにも関わらず遠方場 $x_2 \to +\infty$ ではほぼ S 波のみが伝播していることが確かめられる．

これらの結果から，提案手法によるトポロジー最適化は入射する P 波を S 波に変換する周期構造を正しく設計できることが確かめられた．本数値例では遠方場振幅を目的汎関数

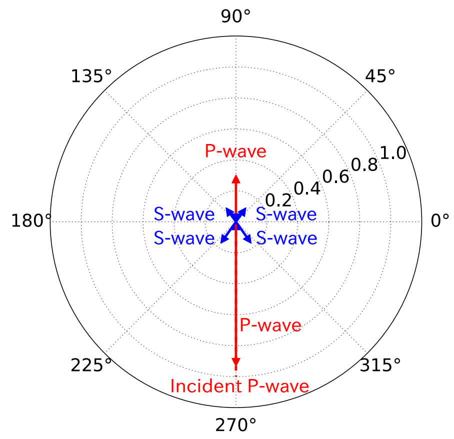

Fig. 3　Far-field amplitudes $|A_m^{\mathrm{L}\pm}|$ (red arrows) and $|A_m^{\mathrm{T}\pm}|$ (blue arrows) for the initial configuration.

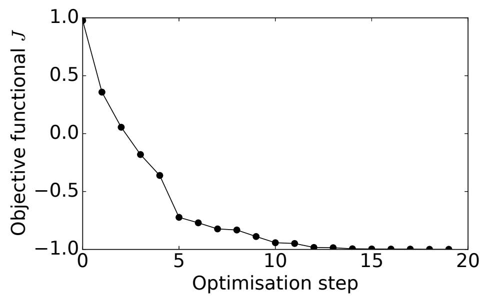

Fig. 4　History of the objective functional J.

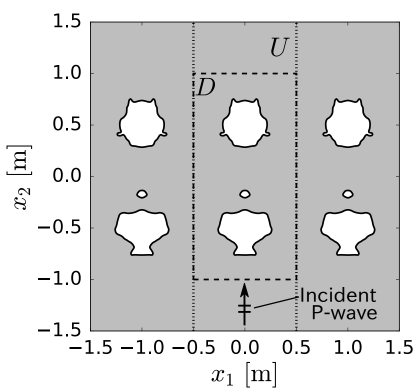

Fig. 5　Optimal configuration.

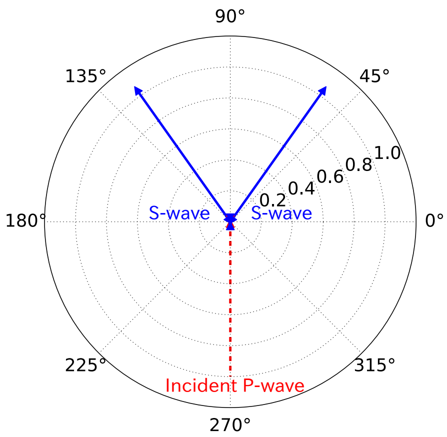

Fig. 6　Far-field amplitudes $|A_m^{\mathrm{L}\pm}|$ (red arrows) and $|A_m^{\mathrm{T}\pm}|$ (blue arrows) for the optimal configuration.

とする場合のトポロジー最適化を示したが，本研究の提案手法は目的汎関数が式 (38) の形の境界積分で定義されるあらゆるトポロジー最適化に適用可能であり，例えば観測点における変位や応力の最適化への適用も容易である．

4. 結言

本研究は，2 次元 1 周期弾性波散乱解析のための境界要素法を開発し，それを応用した弾性体周期構造のトポロジー最適化法を提案した．開発した境界要素法は周期 Green 関数の収束性の問題を解決するために，Poisson の和公式と Kummer 変換を用いた新しい周期 Green 関数の計算法を適用した．また，トポロジー最適化の設計感度であるトポロジー導関数を随伴変数法を用いて新たに導出し，B スプライン曲面のレベルセットに基づくトポロジー最適化アルゴリズムと組み合わせることによって弾性体周期構造の新たなトポロジー最適化法を示した．数値例では，入射する平面 P 波を S 波に変換する周期構造の設計を目的としてトポロジー最適化を行い，提案するトポロジー最適化法の有効性を確認した．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP16H04255，JP17K14146 の助成を受けたものです．

参考文献

(1) Zhou, X., Liu, X., and Hu, G. Elastic metamaterials with local resonances: an overview. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, Vol. 2, No. 4, p. 41001, 2012.

(2) III, R.H.O. and El-Kady, I. Microfabricated phononic crystal devices and applications. *Measurement Science and Technology*, Vol. 20, No. 1, p. 12002, 2009.

(3) Sigmund, O. and Jensen, J.S. Systematic design of phononic band–gap materials and structures by topology optimization. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 361, No. 1806, pp. 1001–1019, 2003.

(4) Noguchi, Y., Yamada, T., Otomori, M., Izui, K., and Nishiwaki, S. An acoustic metasurface design for wave motion conversion of longitudinal waves to transverse waves using topology optimization. *Applied Physics Letters*, Vol. 107, No. 22, p. 221909, 2015.

(5) Isakari, H., Nakamoto, K., Kitabayashi, T., Takahashi, T., and Matsumoto, T. A multi-objective topology optimisation for 2D electro-magnetic wave problems with the level set method and BEM. *European Journal of Computational Mechanics*, Vol. 25, No. 1-2, pp. 165–193, 2016.

(6) 松島慶, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. 粘弾性介在物を用いた弾性波エネルギー吸収体のトポロジー最適化. 計算数理工学論文集, Vol. 17, pp. 77–82, 2017.

(7) 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. B スプライン曲面のレベルセットを用いたトポロジー最適化. 計算数理工学論文集, Vol. 17, pp. 125–130, 2017.

(8) Bebendorf, M. *Hierarchical matrices*. Springer Berlin: Heidelberg, 2008.

(9) Matsushima, K., Isakari, H., Takahashi, T., and Matsumoto, T. An investigation of eigenfrequencies of boundary integral equations and the Burton-Miller formulation in two-dimensional elastodynamics. *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, Vol. 6, No. 6, pp. 1037–1127, 2018.

(10) Linton, C.M. The Green's function for the two-dimensional Helmholtz equation in periodic domains. *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 33, No. 4, pp. 377–401, 1998.

(11) 松本安弘, 新納和樹, 西村直志. $\mathcal{H}$ 行列演算を用いた 2 次元 Helmholtz 方程式の 1 周期境界値問題の高速直接解法について. 計算数理工学論文集, Vol. 14, pp. 79–84, 2014.

(12) 坂本和穂, 大谷佳広, 西村直志. 2 次元弾性波動問題における周期多重極境界積分方程式法について. 計算数理工学論文集, Vol. 8, pp. 77–82, 2008.

(13) Amstutz, S. and Andrä, H. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 216, No. 2, pp. 573–588, 2006.