

## トンネル発破解析を対象とした 3次元個別要素法の計算効率改善

## ENHANCEMENT OF COMPUTATIONAL PERFORMANCE IN 3-D DISTINCT ELEMENT METHOD FOR TUNNEL BLASTING ANALYSIS

今野 真精<sup>1)</sup>, 阿部 和久<sup>2)</sup>, 若月 和人<sup>3)</sup>, 紅露 一寛<sup>4)</sup>

Shinsei KONNO, Kazuhisa ABE, Kazuhito WAKATSUKI and Kazuhiro KORO

- 1) 新潟大学大学院 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, E-mail:f18e024a@mail.cc.niigata-u.ac.jp)  
2) 新潟大学工学部 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)  
3) 株式会社福田組 (〒 951-8668 新潟市中央区一番堀通町 3 番地 10, E-mail:wakatuki1950@dws.fkd.co.jp)  
4) 新潟大学工学部 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

This paper discusses improvement in computational performance of the 3-D distinct element method for the tunnel blasting analysis. For this purpose, the time increment in time integration method is set adaptively to each element based on its velocity, so that the computation time can be saved. To make ensure the dynamical consistency under different time increments, the time integration is achieved in terms of the impulse. Further enhancement is attempted by parallelizing the calculation process of contact force between elements. Homogenization of computation time is achieved by optimizing the element allocation to each processor based on the performance in the previous time interval. Through numerical examples, efficiency of the proposed methods is validated.

**Key Words:** Computation Time, Time Integration, MPI

## 1. はじめに

トンネルの発破掘削では、その際に発生する振動が近接住居等へ及ぼす影響が懸念される。そのための対策の一つとして、トンネル切羽面にスリット状の溝を掘り新たな自由面を設ける「心抜き自由面発破」と呼ばれる手法が有効とされている<sup>(1)</sup>が、その合理的な設定方法は未だ確立されていない。そこで、著者らは二次元個別要素法による発破解析を通し、当該工法の振動低減メカニズムについて検討してきた<sup>(2, 3, 4, 5)</sup>。その結果、スリット長や自由面から発破孔までの距離(最小抵抗線長)と、放射される波動エネルギーの指向性や大きさとの関係が明らかになりつつある。

過去に実施した実験結果の再現解析<sup>(3, 4)</sup>を通して、切羽面から奥行き方向に平面ひずみ状態を仮定しても破壊性状を概ね再現可能であることを確認した。しかし、スリットを設けない通常の心抜き発破の場合、発破孔が切羽面に対して斜めに設定(Vカット)されるため、その再現解析に二次元モデルを適用することは適切でない。

そのため三次元解析が望ましいものの、当該問題では発破孔近傍のみ細かく破碎され、さらにガス圧の作用により運動速度も局所的に大きくなる。この場合、発破孔近傍の個別要

素サイズ、および安定解を得るための時間増分を十分に小さく取る必要がある。したがって、領域全体の要素総数がそれ程多くなくても解析に相当な時間を要し、時間短縮策が不可欠となる。

本研究では、三次元トンネル発破解析を対象に、個別要素解析の効率化について検討する。具体的には、まず安定且つ適切な解を得るために必要となる時間増分を要素毎に、また時間ステップ毎に適宜設定する手法を提案する。その上で、接触計算過程の並列化を試みる。なお、当該法では要素毎に時間増分が異なるため、各プロセッサで計算する要素を動的に割り当て、計算負荷の平準化を図る。最後に、解析例を通して、これらの手法による効果について検討する。

## 2. 個別要素解析の概要

### 2.1. 破壊前の接触力評価

粒状体を対象とした個別要素解析<sup>(6)</sup>では、多面体や球体等で表した個別要素を自由落下等により解析領域に充填することで初期状態を作成する。これに対し発破解析では、空隙の無い連続体を初期状態とし、さらに直径5cm程度の発破孔を適切に表現する必要がある。そのため本研究では、初期の要素配置を有限要素メッシュジェネレータで作成し、四面体要素により離散化して、それを個別要素データに変換する。

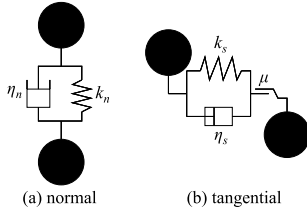


Fig. 1 Contact units between vertices

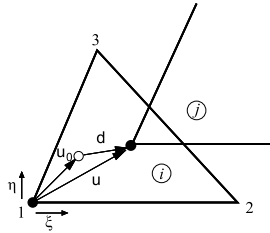


Fig. 2 Relative displacement and local coordinate system

破壊前における要素間接触力は、2つの四面体要素間の接合面の頂点を介して作用するように設定する。接触頂点間には、面に対して法線・接線方向にそれぞれ Fig.1 に示す接触ユニットを設ける。接触要素  $i < j$  に対し、 $i$  番要素をマスター要素、 $j$  番要素をスレーブ要素と定義する。面の法線・接線方向は、マスター要素  $i$  の面に基づき設定する。せん断破壊はクーロンモデルで与え、Fig.2 の様に面内局所座標系  $(\xi, \eta)$  を設定して評価する。接触頂点間の相対変位ベクトル  $\mathbf{u}$  から、残留変位成分  $\mathbf{u}_0$  を除いた変位を  $\mathbf{d}$  とする。弾性域内のせん断応力  $\tau$  は、単位面積当たりのせん断ばね定数  $k_s$  により次式で与える。

$$\tau = k_s |\mathbf{d}|, \quad \mathbf{d} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \quad (1)$$

なお、粘着力  $c$ 、内部摩擦角  $\phi$ 、法線方向応力 (圧縮)  $\sigma$  に対して、破壊条件  $\tau = c + \sigma \tan \phi$  が成り立つ場合は、新たな滑り量  $\mathbf{u}'_0$  を次式により更新する (Fig.3)。

$$\mathbf{u}'_0 = \mathbf{u}_0 + u_a \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}, \quad u_a = |\mathbf{d}| - \frac{\tau}{k_s} \quad (2)$$

法線方向の作用力については、初期の弾性限界応力  $\sigma_f$  に対応する法線方向相対変位  $u_E$  を超過したら、 $-k_f$  の傾きで

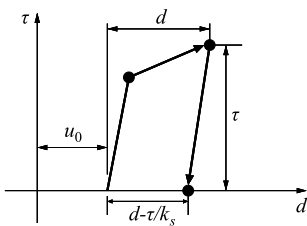


Fig. 3 Failure model in shear stress

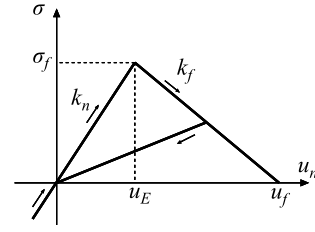


Fig. 4 Failure model in normal stress

応力を低減させる (Fig.4)。その後の除荷時には、除荷開始点から原点に向けて剛性を低下させる。合わせて弾性限界の変位を除荷開始点の変位に更新する。引張変位が  $u_f$  に達したら、完全に破壊したものとす。なお、結合面の3つの頂点のうち何れか1つで破壊状態に達したら、面同士の結合を完全に解放する。

最終的な作用力は、Fig.1 の様に法線・接線方向作用力に、相対速度に減衰係数を乗じて得られる減衰力を加算する。

## 2.2. 破壊後の接触力評価

破壊後の接触状態において、要素頂点と面、面同士、辺同士など幾つかの組み合わせが考えられる。ただし、それらを厳密に評価するのはアルゴリズムが煩雑となり、必ずしも得策ではない。そこで本研究では破壊面を、それに内接する接触球群により表現して、これらにより接触解析を行う方法を採用。破壊面の各辺を等分し、Fig.5 の様に等分線の交点に内接する様に球形接触子を配置する。接触球の直径は、四面体を構成する他の面から球がはみ出さない様に、接触球毎に設定する。なお、接線方向には摩擦力のみ作用するものとする。

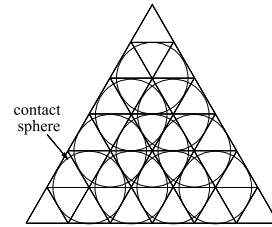


Fig. 5 Arrangement of contact spheres on a face

## 3. 解析時間短縮の工夫

### 3.1. 要素毎の時間増分設定

発破孔近傍の要素は、質量が小さく、非常に高速度で運動するため、安定解を得るには時間増分  $\Delta t$  を短く設定する必要がある。しかし、他の多くの要素はサイズが大きく、また破壊を受けることなくほぼ静止した状態にあり、比較的大きな  $\Delta t$  でも安定解を得ることができる。そこで要素毎に異なる時間増分を設定する。ただし、各要素の時間積分の際に、接触要素間作用力の影響を適切に算定する必要がある。本研究では後述のように、作用力ではなく力積を評価するが、これを接触要素間で正確に共有させる必要があるため、要素毎の時間増分を以下の手順で設定する。

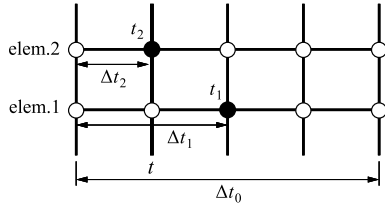


Fig. 6 Time integration with different time increments

まず、1つの時間増分間における要素移動距離の許容最大値  $l$  を、安定解を確保し得る値に規定する。その下で、 $i$  番要素の初期時間増分を最大値  $\Delta t_0$  に設定し、それを適宜  $1/2$  倍していき、要素速度  $|\mathbf{v}_i|$  から  $\Delta t_i \leq l/|\mathbf{v}_i|$  をみたく時間増分を決定する。

要素間接触力は、現時刻  $t$  と何れかの要素時刻とが一致する場合に限り評価する。例えば Fig.6 の様に 1 番と 2 番の要素間接触を考える場合、2 番要素の時刻  $t_2 = t$  において接触力  $\mathbf{F}_{12}$  を求める。なお、図中の●は各要素の時間積分時刻である。ただし、1 番要素の時間積分を行う時刻は  $t_1$  であり、従来法では  $t_1$  においてのみ接触力が評価される。時間増分の不一致によるこの様な時間積分上の問題を解消するために、時刻  $t_2$  における接触力に時間増分を掛けた力積  $\mathbf{F}_{12}\Delta t_2$  を両要素の力積に加算する方法を採用。これにより、 $i$  番要素の時間積分時刻  $t_i$  までの 1 ステップ間に当該要素に加算された力積の総和  $\mathbf{S}_i$  を用いて、次式のように速度更新を行う。

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \mathbf{v}_i^k + \frac{\mathbf{S}_i}{m_i} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{v}_i^{k+1}$  は  $i$  番要素の第  $k+1$  ステップ目の速度、 $m_i$  は質量である。なお、回転成分についても同様にして更新する。

### 3.2. 計算の並列化

個別要素解析のさらなる計算時間短縮策として、MPI 処理による並列計算について検討する。個別要素解析の並列化には、大きく分けて領域分割法と、接触計算過程の並列処理による方法が考えられる。前者は粒子集合体の大規模解析を主に対象としており、メモリ負荷軽減を含む工夫が検討されている<sup>(7)</sup>。なお、発破解析では、細かく破砕される領域は発破孔近傍に限定される。そのため、計算効率上、要素サイズを発破孔近傍のみ細かく設定することが望ましいが、一方で要素総数自体は必ずしも多いとは限らない。従って、領域分割による均等な負荷分散を効率良く行うことは容易ではなく、この手法は発破解析に適していないと考えられる。そこで、本研究では接触計算過程の並列処理を対象に検討する。

個別要素解析の流れ図を Fig.7 に示す。解析時間の大半を占め、且つ並列化可能な箇所は要素間接触判定および接触力計算である。本解析では、最初は接合された状態から、破壊を受け分離するまでの過程を計算する必要がある。前者の状態では、各要素に接触している要素が確定しているため、接触力計算を並列に行う際に、各プロセッサに対し概ね均等に要素を割り当てれば良い。しかし、後者の状態では、接触

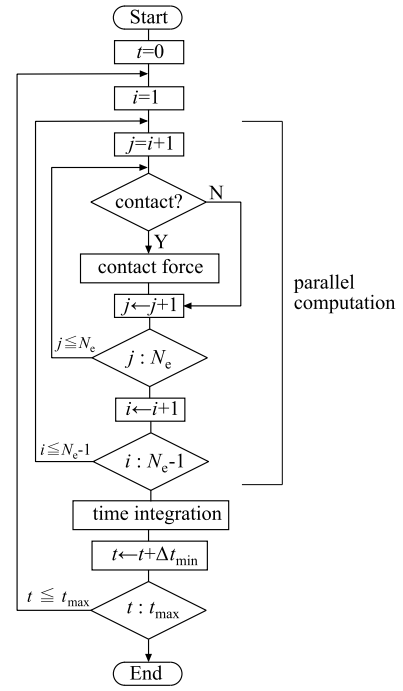


Fig. 7 Flowchart of DE analysis

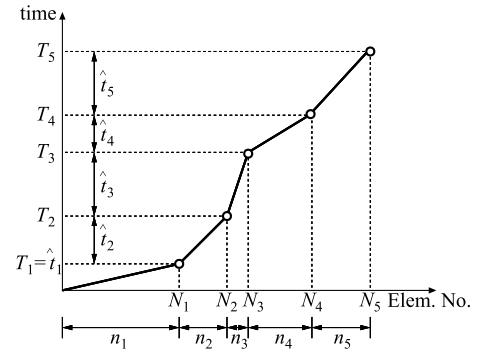


Fig. 8 Relationship between element number and computation time

の可能性のある近傍要素数が要素毎に異なる。また、時間増分も要素毎に異なるため、各時間積分時刻において行われる接触計算量が要素により大きく変動する。そのため本研究では、これら一連の状態の変化に適用可能な手法について検討する。具体的には、直前の状態に基づき、各プロセッサにおける接触計算量が概ね均等になる様に、分担する要素数を再配分する方法を採用。

まず、所定の時間ステップ区間において第  $i$  番プロセッサが接触判定及び接触力計算に要した時間を  $\hat{t}_i$  とし、横軸にプロセッサに割り振られた上限の要素番号  $N_i$ 、縦軸に当該番号以下のプロセッサにおける計算時間の総和  $T_i$  を取ると、Fig.8 の様な図を得る。なお、図中  $n_i$  は  $i$  番プロセッサに割り振られた要素数であり、 $N_i$  は  $n_1 \sim n_i$  の総和と与えられる。

次に、プロセッサ毎の計算時間を平準化するために、全計算時間  $T_n$  より 1 プロセッサ当りの平均計算時間  $\hat{t} = T_n/n$

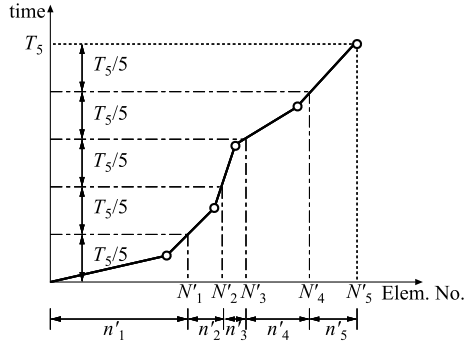


Fig. 9 Adaptive reallocation of elements

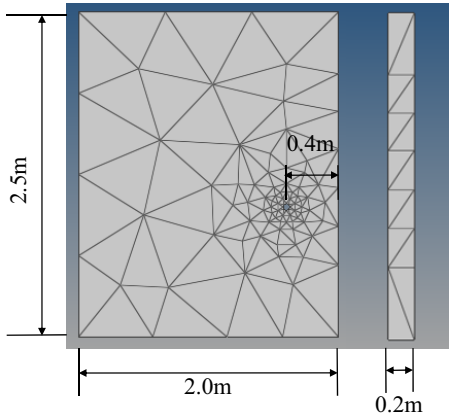


Fig. 10 Analysis domain and its discretization

はプロセッサ総数)を求める. そして,  $t'$  で全計算時間  $T_n$  を等分割し, 各時間に対応する横軸の値を第  $i$  プロセッサが担当する要素番号の新たな上限値  $N'_i$  として与え,  $N'_{i-1} + 1$  から  $N'_i$  までの要素を  $i$  番プロセッサに割り当てる (Fig.9).

#### 4. 解析結果

##### 4.1. 解析条件

本研究では, 既往の研究<sup>(3,4)</sup>で行なわれた自由面発破実験の再現解析を対象とする. その際に, 奥行き 3m のコンクリート供試体の全体モデルでは 1 ケースの計算に一ヶ月以上を要すると予測されるため, これにより効率化手法の組み合わせを種々検討することは現実的でない. そこで, 文献(3,4)に準拠して, 奥行きを 20cm とした準二次元平面モデルを解析対象とする.

解析領域の個別要素分割の様子を Fig.10 に示す. 直径約 5cm の発破孔を右側面から 40cm の位置に設け, その近傍を約 5cm サイズの要素で分割して, 発破孔から遠退くに従いサイズが大きくなるようにした. なお, 節点数と要素数は, それぞれ 277 および 962 である. 1 ステップ間の要素移動距離の許容最大値は, 試算に基づき  $l = 1.0 \times 10^{-8} \text{m}$  と設定した. また, 最大時間増分を  $\Delta t_0 = 1.0 \times 10^{-8} \text{s}$  とした. Fig.5 の接触球は, 各辺を 5 等分割して与えた.

発破孔内に作用するガス圧は, 発破孔に接する要素面に対し法線方向に規定外力として与える. その際の圧力の基本波

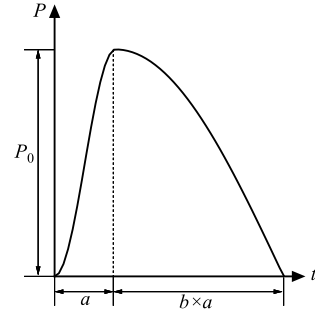


Fig. 11 Pressure waveform

Table 1 Parameters in DE-analysis

Density	2390(kg/m <sup>3</sup> )
Adhesive stress	6.66(MPa)
Coefficient of friction	0.58
Energy release rate of fracture	99.67(N/m)
pre-fracture	
Spring constant (normal)	450(GN/m <sup>3</sup> )
Spring constant (tangent)	90(GN/m <sup>3</sup> )
Damping coefficient (normal)	22.6(MN·s/m <sup>3</sup> )
Damping coefficient (tangent)	10.1(MN·s/m <sup>3</sup> )
post-fracture	
Spring constant (normal)	1.5(GN/m)
Damping coefficient (normal)	3.08(MN·s/m)

形は, 文献(3)における逆推定結果に基づき, 次式により与えた.

$$P(t) = \begin{cases} P_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{a} - 1\right)\right), & 0 \leq t \leq a \\ P_0 \cos\left(\frac{\pi}{2b}\left(\frac{t}{a} - 1\right)\right), & a \leq t \leq (b+1)a \\ 0, & (b+1)a < t \end{cases} \quad (4)$$

ここで,  $P_0$  は最大圧力,  $a$  は圧力の立ち上がり時間,  $b$  は圧力が最大値からゼロまで低下する時間を  $a$  で除した値である (Fig.11). 各パラメータの値は,  $P_0 = 5.75 \times 10^8 \text{ Pa}$ ,  $a = 1.33 \times 10^{-4} \text{ s}$ ,  $b = 2.75$  と設定した<sup>(3)</sup>. その他の主な解析条件を Table 1 に示す.

##### 4.2. 破壊状況の確認

上記条件での解析より得られた, 発破開始後  $1.0 \times 10^{-3} \text{ s}$  における破壊状況を Fig.12(a) に示す. 発破孔近傍は細かく破碎され, 放射状に亀裂が伸びている様子が窺える. 上下方向や自由面方向に伸びる亀裂に関しては Fig.12(b) の実験結果<sup>(3)</sup>を概ね再現できており, 本準二次元解析の妥当性が確認できる.

##### 4.3. 要素毎の時間増分設定による効果

まず, 発破開始から  $1.0 \times 10^{-3} \text{ s}$  までの幾つかの時刻にお

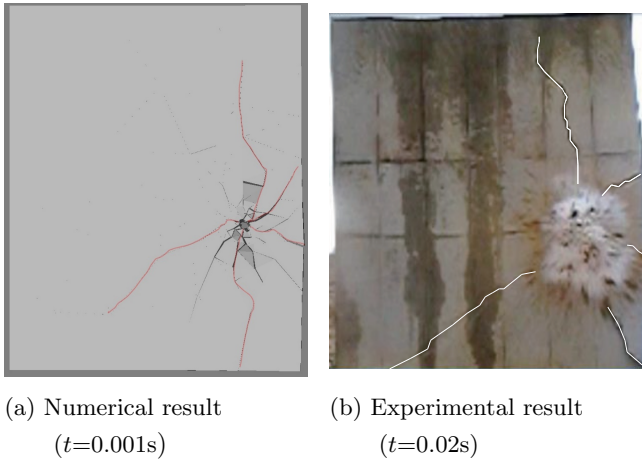


Fig. 12 Comparison of numerical and experimental results

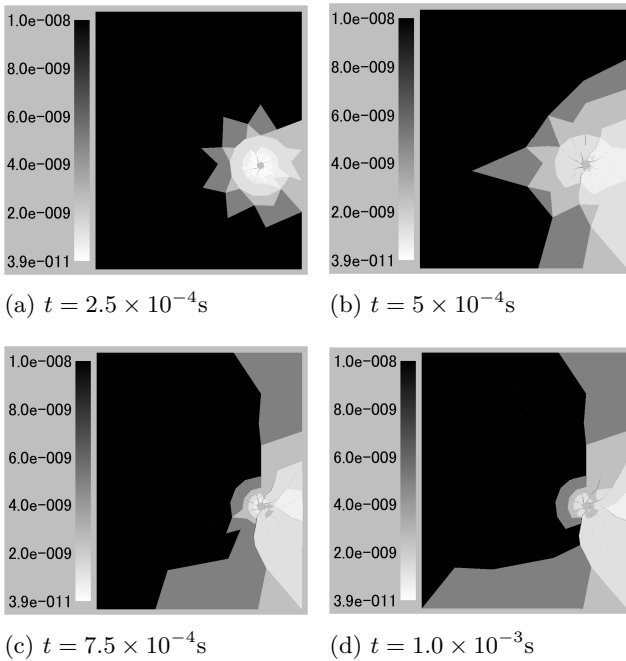


Fig. 13 Distribution of  $\Delta t$

ける，時間増分の空間分布を Fig.13 に示す．発破孔内の圧力作用による周囲への波動伝播に伴い，時間増分が短く設定されている領域が右側面と底面に沿って徐々に広がっていく様子が確認できる．なお，発破後  $2.5 \times 10^{-4}$ s の時点における発破孔近傍要素の時間増分が解析全体の中で最も短い値をとっており，約  $4.0 \times 10^{-11}$ s となった．一方，発破孔から左手遠方に位置する要素はほぼ静止状態にあり，時間増分は最大値  $\Delta t_0 = 1.0 \times 10^{-8}$ s のままであった．

発破開始から作用圧力が上昇し，再びゼロとなる時刻に概ね相当する  $5.0 \times 10^{-4}$ s までの解析に基づき，以下の各種検討を行う．当該時刻までの計算に要した時間は，全要素で同一の時間増分を設定した場合で 3897 分，要素毎に時間増分を設定した場合では 2702 分となり，約 70% まで解析時間を短縮することができた．ちなみに，圧力が立ち上がり出す初期の段階である  $5.0 \times 10^{-5}$ s において比較すると，前者の解析時間が 16 分であるのに対し，後者は 14 分であり，その差は僅かとなっている．この結果より，圧力が立ち上がり破壊

が進展し出す時刻以降において，両者の計算時間に違いが現れており，本手法が発破による一連の破壊過程の計算時間短縮に有効であることがわかる．

なお，全要素同一時間増分での解析と本手法による解析とで，時刻  $5.0 \times 10^{-4}$ s における発破孔近傍に位置する要素変位を比較したところ，それぞれ 2.16mm と 1.93mm であった．破壊過程を対象とした個別要素解析としては，この差異は十分に小さく，本手法による時間積分の妥当性が確認できる．

#### 4.4. 接触計算の並列化による効果

MPI による並列計算に用いるプロセッサ数と，発破後  $5.0 \times 10^{-4}$ s までの解析における加速率 (1 プロセッサによる計算時間と並列計算で要した時間との比) との関係を図.14 に示す．図には個別要素解析全体の計算時間に関する加速率と，その内並列計算を適用している接触解析に要した計算時間に関する加速率の 2 つを示した．なお，計算の際には上述の要素毎の時間増分設定法を適用している．また，各プロセッサへの要素再配分の更新間隔は，試算に基づき 50 ステップに設定した．

Fig.14 には最大 24 プロセッサまでの計算結果を示した．全体の計算時間について見ると，加速率自体は決して高くないものの，16 プロセッサまで概ね線形に増加している．この傾向は接触解析部分の計算時間においても認められる．ちなみに，1 プロセッサでの解析において，接触判定および接触力計算に要した時間は，全計算時間の約 95% を占めていた．このことより，一連の接触解析部分の並列化は，解析時間短縮に本来有効であると考えられる．

なお，少ないプロセッサ数の場合においても加速率が比較的低下している．例えば，4 プロセッサでの加速率は 2 倍弱である．本解析では，Fig.9 に示した方法でマスター要素を各プロセッサに再配分する方法を採用しているが，プロセッサ数が少ない場合，Fig.9 の折れ線による近似精度が低下するため，再配分による平準化効率も低下することが，その原因として考えられる．

$i$  番要素におけるスレーブ要素との接触計算は，全要素数を  $N_e$  個とすると，最大で  $N_e - i$  回となる．この最大値の単純和が各プロセッサに概ね均等配分されるように，各プロセッサが分担するマスター要素数を固定値として割り振った場合についても並列計算を行った．再配分を行う場合の計算時間が 501 分であったのに対し，再配分なしでは 541 分となり，8% 程度ではあるが再配分による効果が確認できた．

要素再配分の有無によるプロセッサ毎の計算時間を Fig.15 に示す．図は  $t = 5.0 \times 10^{-4}$ s までの間になされた接触解析関連の並列計算に費やした時間  $T_i$  を図示したものである．再配分によってプロセッサ番号  $i$  と  $T_i$  との関係はほぼ線形となっており，各プロセッサの接触計算に要する時間が概ね均等に保たれている様子が確認できる．プロセッサ毎の計算時間における最小値と最大値は各々 9023s と 9787s となっており，その比率は約 1.1 倍となっている．一方，再配分を行わない場合，計算時間の最小値と最大値は各々 3493s および 20381s となっており，その比率は約 5.8 倍であった．なお，Fig.15 で

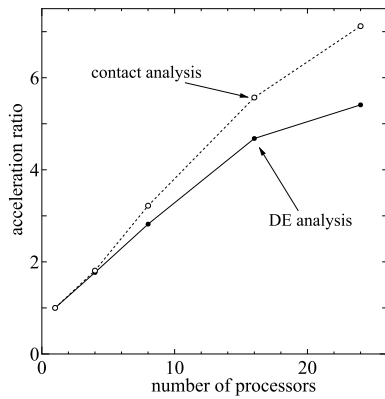


Fig. 14 Relationship between number of processors and acceleration ratio

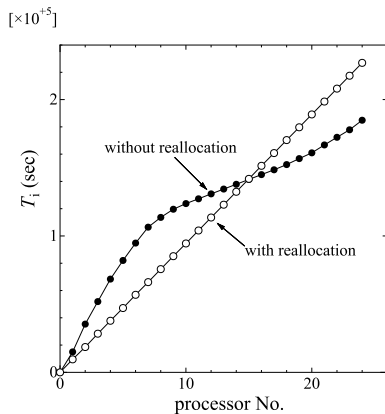


Fig. 15 Computation time in each processor

は、再配分しない場合の方がプロセッサ毎の計算時間の総和が短くなっている。ただし、並列計算の場合、最長の計算時間を有するプロセッサにより全体の計算時間が支配されることとなるため、再配分を行う方が結局計算時間は短くなる。

ちなみに接触計算は、Fig.7の流れ図に示した様にマスター要素とスレーブ要素の二重のループ計算で構成されており、OpenMPによっても比較的容易に並列化可能である。文献(8)では粉粒体の集合体を対象とした解析にOpenMPによる並列化を適用しているが、計算の加速率は8プロセッサで3倍程度となっており、それ以降はほぼ一定値に漸近している。本解析とは問題設定も異なり単純比較はできないものの、MPIに基づく本並列計算では24プロセッサでも加速率は増加傾向にあり、その有効性を再確認することができる。

#### 4.5. 各工夫による効果のまとめ

$t = 5.0 \times 10^{-4}$ s までの解析に要した計算時間に基づき以上の結果を要約する。全要素同一の時間増分を設定して1プロセッサで解析した場合を基準とすると、要素毎に時間増分を設定することによる加速率が1.4倍、さらに接触計算の要素再配分を伴う並列計算により約8倍(24プロセッサ)まで向上させることができた。

#### 5. おわりに

本研究では、三次元個別要素法による発破解析を対象に、

解析時間短縮策について検討した。具体的には、まず時間積分における時間増分を運動速度に基づき要素毎に設定する手法を採った。この場合、時間積分による運動更新のタイミングが要素毎に異なるため、接触要素間作用力の要素間共有では適切に時間積分することができない。そのため、力積を接触要素間で共有し、それを加算することで、要素毎に異なる時間増分でも時間積分可能な手法を構成した。

また、個別要素解析における計算時間の大部分は接触判定と接触力計算に費やされ、且つこれらは並列計算可能であるため、当該過程の並列化について検討した。その際に、破壊進展等により接触計算に要する時間が要素毎および時刻毎に変動するため、各プロセッサに割り振る要素数を適宜調整し、計算負荷の平準化を図った。

これらの工夫により、 $t = 5.0 \times 10^{-4}$ s までの解析を対象とした場合、24プロセッサによる並列計算で約8倍の加速率が得られ、本提案法の有効性を確認することができた。

なお、本論文に示した解析では比較的短い時間内の発破応答を対象としたが、より長時間の破壊過程では、発破孔近傍要素の運動速度が低下するため、時間増分は総じて大きくなる。そのため、解析時間は発破初期の解析に比べ短縮できると考えられる。今後はトンネル発破解析に本解法を適用し、その有効性等についてさらに検討を行うつもりである。

#### 参考文献

- (1) 若月和人, 木村能隆, 多田芳葉, 高橋 渉: 民家直下における心抜き自由面発破の振動低減効果, 土木学会第66回年次学術講演会講演概要集, (2011), VII-387.
- (2) 石沢浩太, 若月和人, 阿部和久, 紅露一寛: 自由面発破による岩盤破壊過程の個別要素解析, 計算数理工学論文集, **13**(2013), pp.61-66.
- (3) 齋藤 優, 若月和人, 阿部和久, 紅露一寛: 個別要素法によるコンクリート供試体発破実験の再現解析, 計算数理工学論文集, **15**(2015), pp.19-24.
- (4) 若月和人, 齋藤 優, 阿部和久, 紅露一寛: 自由面発破の実験と個別要素法を用いた数値解析手法の検証, 土木学会論文集 F1, **71**(3)(2015), pp.L1-L10.
- (5) 若月和人, 齋藤 優, 阿部和久, 紅露一寛: 心抜き自由面発破の個別要素解析と振動低減効果の解明, 土木学会論文集 F1, **72**(3)(2016), pp.L16-L27.
- (6) 粉体工学会編: 粉体シミュレーション入門, 産業図書, (1998).
- (7) 坂口 秀, 西浦泰介: 拘束個別要素法コード HiDEMの開発と産業への応用, JAMSTEC-R IFREE Special Issue, (2009.11), pp.201-209.
- (8) 大塚 順: 個別要素法による粉粒体シミュレーションへのOpenMP並列の適用, ハイパフォーマンスコンピューティングと計算科学シンポジウム, (2012), pp.52.