

生体中を伝播する粘弾性波の非適合有限要素法による高精度数値計算

EFFICIENCY OF NONCONFORMING FINITE ELEMENT METHODS FOR VISCOELASTIC WAVES PROPAGATING IN HUMAN TISSUE

前川 秀¹⁾

Suguru MAEKAWA

1) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町 36-1, E-mail: smaekawa@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

We shall discuss numerical methods for the time harmonic Kelvin-Voigt viscoelastic equation in order to realize MR Elastography. The standard P1 finite element method shows locking in numerical computations of viscoelastic waves propagating in human tissue. By analogy of elastic equation, it appears that nonconforming finite element method is efficient to solve the difficulty. The efficiency of the proposed method is demonstrated through numerical computations.

Key Words: MR Elastography, Viscoelastic Equations, Nonconforming Finite Element Method

1. はじめに

本稿では, MR エラストグラフィの実現のために, time harmonic な Kelvin - Voigt 型粘弾性方程式

$$\begin{aligned}
 -\rho\omega^2 u_j &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left((\mu + i\omega\eta) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\lambda + i\omega\zeta) \operatorname{div} u \right) + g_j \quad \text{in } \Omega \quad (j = 1, 2) \quad (1) \\
 u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega
 \end{aligned}$$

の数値計算手法について論じる. ここで未知関数 u は Ω 上の C^2 値関数であり, $\rho, \omega, \mu, \eta, \lambda, \zeta$ は既知の定数でそれぞれ密度, (下で述べる単振動加振の) 周波数, 剛性率, ずり粘性率, Lamé の第一定数, 体積粘性率を表す. また g_j は下で述べる単振動加振から定まる既知関数である.

MR エラストグラフィ⁽¹¹⁾とは, 生体表面での単振動加振により励起された生体内を伝播する波を MR 装置により観測し, そのデータを元に非侵襲的かつ定量的に生体の剛性率を算出する技術である. この技術により, 癌の早期発見や肝硬変の非侵襲的な進行度診断が可能になると考えられている. 生体表面での単振動加振により励起された生体中を伝播する波の数値モデルの1つとして time harmonic な Kelvin-Voigt 型粘弾性方程式 (1) が提案されており⁽¹³⁾, MR エラストグラフィはこの方程式の係数同定逆問題として定式化される.

MR エラストグラフィの実現のために, 方程式 (1) の高精度かつ信頼性の高い数値計算手法が望まれている. 生体中を伝播する波の数値モデルは (1) 以外にも提案されているが⁽¹²⁾, 生体中の波の伝播現象は生体中での物理現象であり, この現象が従う数値モデルを実験的に確かめることはできない. 従ってこの数値モデルの検証のためには, モデルとなる方程式を1つ選び係数同定を行い, それにより得られた係数をもとに方程式の数値計算を行い, その結果と MR 装置により観測された波を比較する必要がある. そしてそのためには, 選んだ方程式に対する高精度かつ信頼性の高い数値計算手法が必要不可欠である.

しかしながら生体を想定した係数 $\mu, \lambda, \eta, \zeta$ の設定では, 連続かつ区分線型な要素 (P_1 要素) を用いる一般的な有限要素法による数値計算では定量的に大きな誤差が生じ, 高精度な数値解を得るためには離散化パラメータを極めて小さく設定しなければならず, 特に3次元問題の取り扱いでは計算の大規模化という困難が伴う. そのため, 数値モデル (1) に基づく MR エラストグラフィの開発に至っておらず, その近似モデル⁽¹²⁾や, 種々のデータ解析⁽¹⁰⁾による対応が提案されている.

一方, 弾性体方程式においても同様の数値計算の精度上の困難さが指摘されており, locking 現象とよばれる⁽²⁾. この locking の数理的な解析は Babuška-Suri⁽¹⁾に端を発し, 実用上の回避策として幾つか提案がなされてきた^(3, 4, 8). 弾性体方程式と方程式 (1) は共通点が多く, 弾性体方程式の数値

計算における locking の回避策が方程式 (1) の数値計算に対しても有効であると期待される．本研究では，その回避策の1つである非適合有限要素法に着目した．time harmonic な粘弾性方程式に対する非適合有限要素法については，特別な境界条件を課した上で Ha ら (7) による数学解析および数値計算がある．しかしながら Ha らの課した境界条件は本研究で扱うものと本質的に異なるため，本研究で扱う数値計算に Ha らの数学解析は適用できない．また，Ha らの数値計算は砂岩を対象としたもののみであり，本研究で扱う生体を想定した係数設定とは大きく異なる．特に λ/μ の値が5桁ほど異なり，locking はこの値が大きい時に生じる現象であるため，粘弾性方程式の locking の回避に対して非適合有限要素法が有効であるかは明らかになっていない．

そこで本稿では方程式 (1) に対して非適合有限要素法を適用し，生体を想定した係数設定における非適合有限要素法の有効性を数値計算により確かめる．まず，2節で P_1 要素を用いる有限要素法により数値計算を行い，離散化誤差のパラメータ依存性を確認する．次に，3節で本稿の提案手法である非適合有限要素法について述べる．最後に，4節で P_1 要素を用いた有限要素法と非適合有限要素法の比較を行い，特に生体を想定した設定において提案手法が有効であることを数値計算により示す．

方程式 (1) の係数同定について，例えば方程式 (1) を繰り返し解いて最小二乗法により係数同定するという手法が考えられる．方程式 (1) の高精度数値計算を実現する本研究の結果は，方程式 (1) に基づく MR エラストグラフィの実現に寄与するものと考えている．

2. Locking

本節では， P_1 要素を用いた有限要素法による数値計算を行い，方程式の係数比 λ/μ に関する誤差の依存性を数値計算により定量的に調べる．

まず，方程式の弱解を定義する． $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を多角形領域とし， $V_0 := (H_0^1(\Omega))^2 \cap (H^2(\Omega))^2$ とおく．また，(1) の弱定式化に用いる半双線型形式を

$$\begin{aligned} a(u, v) = & \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\mu + i\omega\eta}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)} dx \\ & + \int_{\Omega} (\lambda + i\omega\zeta) \operatorname{div}(u) \overline{\operatorname{div}(v)} dx \\ & - \int_{\Omega} \rho\omega^2 u \cdot \bar{v} dx \end{aligned} \quad (2)$$

と定める．次を満たす $u \in V_0$ が存在する時，それを (2) に対する弱解と呼ぶ．

$$a(u, v) = \int_{\Omega} g \cdot \bar{v} dx \quad \text{for all } v \in V_0.$$

次に，(2) に対する有限要素解を定義する． \mathcal{T}^h を Ω の正則な三角形分割 (3) とし， $\sup_{K \in \mathcal{T}^h} \operatorname{diam} K = h$ とする．また， Ω から C^2 への連続関数で， \mathcal{T}^h の各要素に制限すると各成分が1次多項式となるものの全体を V^h とし， $V_0^h := \{u_h \in V^h \mid u_h = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ とおく．次を満たす

$u_h \in V_0^h$ が存在する時，それを (2) に対する (P_1 要素を用いる) 有限要素解と呼ぶ．

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} g \cdot \bar{v}_h dx \quad \text{for all } v_h \in V_0^h.$$

本稿では弱解および有限要素解がただ一つ存在する設定で数値計算を行うため，解の一意存在性についてここでは詳細には議論しないが，例えば方程式 (1) の H^1 正則性をもつ弱解の一意存在性などが知られている (9)．

以上の準備のもとで，有限要素法による数値計算を行う． $\Omega = (0, 1)^2$ ， $\omega = 2\pi \times 50$ [rad/s]， $\rho = 10^3$ [kg/m³]， $\mu = 2 \times 10^3$ [Pa]， $\zeta = 1$ [Pa · s]， $\eta = 3$ [Pa · s] とし，

$$\begin{aligned} g = & \frac{\rho\omega^2}{2\pi} \begin{pmatrix} -(1 - \cos 2\pi x_1) \sin 2\pi x_2 \\ \sin 2\pi x_1 (1 - \cos 2\pi x_2) \end{pmatrix} \\ & - 2\pi(\mu + i\omega\eta) \begin{pmatrix} -2 \cos 2\pi x_1 \sin 2\pi x_2 + \sin 2\pi x_2 \\ 2 \sin 2\pi x_1 \cos 2\pi x_2 - \sin 2\pi x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく．この時，厳密解は

$$\frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} -(1 - \cos 2\pi x_1) \sin 2\pi x_2 \\ \sin 2\pi x_1 (1 - \cos 2\pi x_2) \end{pmatrix}$$

で与えられる．

λ について，はじめに2通りの場合を考える．1つは $\lambda = 10^9$ [Pa] の場合であり，これは人間の肝臓に相当する設定である．この場合に精度よく計算できる数値計算手法が本稿の主眼である．また，比較のために $\lambda = 10^3$ の場合も考える．

$\lambda=10^3$ —

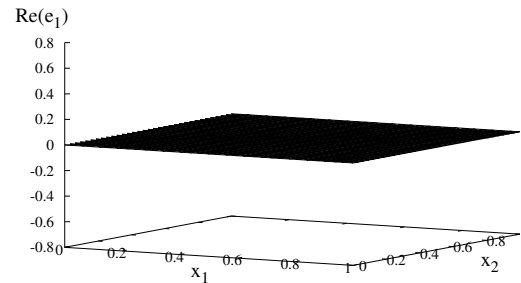


Fig. 1 The Profile of the Error of the P1-FE Solution in $\lambda = 10^3$ Case.

$\lambda=10^9$ —

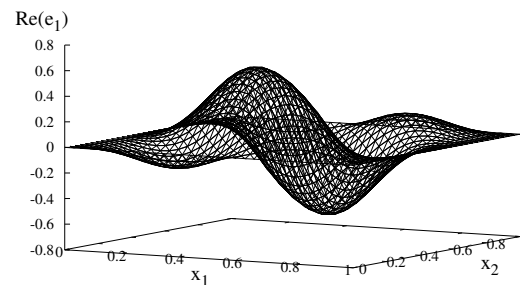


Fig. 2 The Profile of the Error of the P1-FE Solution in $\lambda = 10^9$ Case.

Fig.1, Fig.2にそれぞれ $\lambda = 10^3$ の場合， $\lambda = 10^9$ の場合の数

値解の第一成分の実部の誤差のプロファイルを示す．本計算では，一辺の分割数が 32 の一様な三角形分割を用いた．ここで一様な三角形分割とは， Ω を格子状に l^2 個の正方形に分割し，さらに $(1, 0)$ ， $(0, 1)$ を通る直線と平行な方向に切れ目を入れることで得られる三角形分割を指す (Fig. 3)．また，

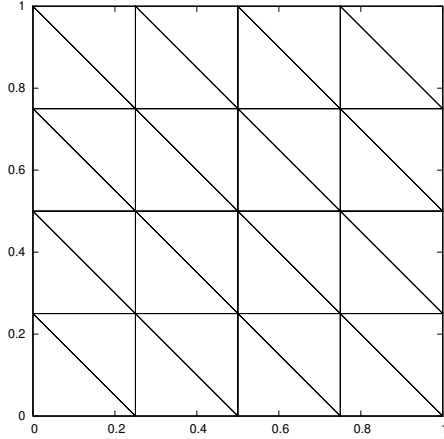


Fig. 3 Example of Uniform Mesh ($l = 4$).

数値誤差として有限要素法に由来する誤差を論じるために，連立方程式の求解には厳密解法である LU 分解を用い，倍精度で数値計算を行った．

Fig.1, Fig.2 が数値解そのものではなく，誤差のプロファイルであることに注意すると， $\lambda = 10^3$ の場合に比べて， $\lambda = 10^9$ の場合は誤差が著しく大きくなるのがわかる．その $(H^1(\Omega))^2$ ノルムの比は約 33 であった．

離散化誤差のパラメータ依存性をより詳しく見るために， λ の値を 10^3 から 10^9 まで変化させたとき，すなわち λ/μ の値を 5×10^{-1} から 5×10^5 まで変化させたときの $(H^1(\Omega))^2$ ノルム誤差 $\|e\|_1$ を Fig.4 に両対数グラフで示す．Fig.4 の通り，

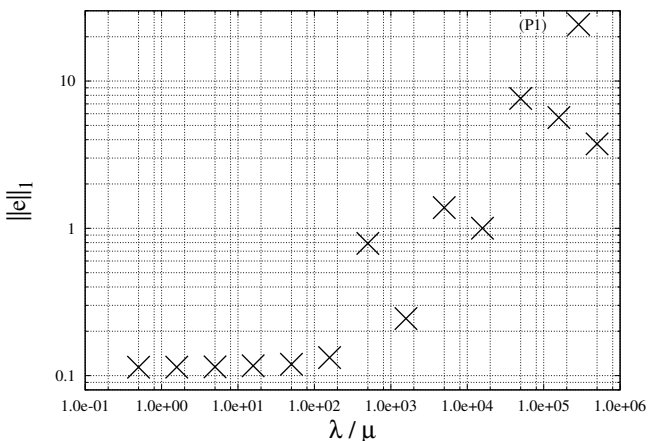


Fig. 4 Errors of P1-FE Solutions for Fixed h

λ/μ が大きくなるにつれて誤差は増大しており， $\lambda = 10^3$ の場合との誤差の $(H^1(\Omega))^2$ ノルムの比は最大で約 67 であった．

本節の数値計算結果から， P_1 要素を用いる有限要素法では λ/μ の値が大きい場合に定量的に大きな誤差が生じることが示された．この現象に関して，弾性体方程式の場合について

は Babuška-Suri⁽²⁾ で詳細に論じられている．例えば，厳密解が十分滑らかなとき一様な三角形分割上で P_1 ， P_2 および P_3 要素を用いる有限要素法は locking を生じること，ならびに任意の quasiuniform な三角形分割⁽⁵⁾ 上で P_k 要素 ($k \geq 4$) を用いる有限要素法は locking を生じないことなどが知られている．ただし，Babuška-Suri⁽²⁾ の結果は弱定式化に用いる双線型形式が Hermite 形式であることに強く依存しており，本研究で用いる半双線型形式 (2) は Hermite 形式でないことから，Babuška-Suri⁽²⁾ の議論を直接適用することはできないことに注意する．

3. 非適合有限要素法

本節では，time harmonic な粘弾性方程式 (1) に対して，本稿の提案手法である非適合有限要素法について述べる．

本稿では特に Crouzeix-Raviart 要素⁽⁶⁾ を用いた． P_1 要素を用いる有限要素法が三角形分割の各頂点上に未知数をおくのに対し，これは各辺の中点上に未知数をおく手法である．これにより不連続性をもつ近似解が許されることに注意する．

\mathcal{T}^h の各辺の中点の集合を $E = \{e_j\}_{j=1}^{N_e}$ とする．また $\tilde{\varphi}_j$ ($j = 1, \dots, N_e$) を Ω 上の区分線型関数で $\tilde{\varphi}_j(e_j) = \delta_{jk}$ なるものとし， $\tilde{V}^h := (\text{span}\{\tilde{\varphi}_j\}_{j=1}^{N_e})^2$ ， $\tilde{V}_0^h := \{u_h \in \tilde{V}^h \mid u_h(e_j) = 0 \text{ for all } e_j \in \partial\Omega\}$ とおく．半双線型形式を

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u, v) = & \sum_{i,j=1}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}^h} \int_T \frac{\mu + i\omega\eta}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)} dx \\ & + \sum_{T \in \mathcal{T}^h} \int_T (\lambda + i\omega\zeta) \text{div}(u) \overline{\text{div}(v)} dx \\ & - \int_{\Omega} \rho\omega^2 u \cdot \bar{v} dx \end{aligned} \quad (3)$$

と定め，次を満たす $u_h \in \tilde{V}_0^h$ が存在する時，それを (3) に対する非適合有限要素解と呼ぶ．

$$\tilde{a}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} g \cdot \bar{v}_h dx \quad \text{for all } v_h \in \tilde{V}_0^h.$$

半双線型形式 (3) について，被積分関数に近似解の導関数を含む項の積分範囲が，弱形式 (2) と異なり各三角形 T ごとに分割されていることに注意する．これは三角形分割の各辺上で近似解が不連続であることを許しているからである．

4. 数値計算例

本節では，提案する非適合有限要素法が time harmonic な粘弾性方程式で生体を想定した係数設定において高精度計算を実現することを示す．併せて P_1 要素を用いる数値計算結果を示し，提案手法の有効性を示す．

2 節と同様の問題設定で， λ/μ の値を 5×10^{-1} から 5×10^5 まで変化させた時の， P_1 要素を用いる有限要素法による数値計算結果 (P1) および非適合有限要素法による数値計算結果 (NC) それぞれの誤差の $(H^1(\Omega))^2$ ノルムを Fig.5 に両対数グラフで示す．ただし $\|e\|_1$ は前節最後の注意と同様の理由から，積分範囲を各三角形ごとに分割して計算する．2 節

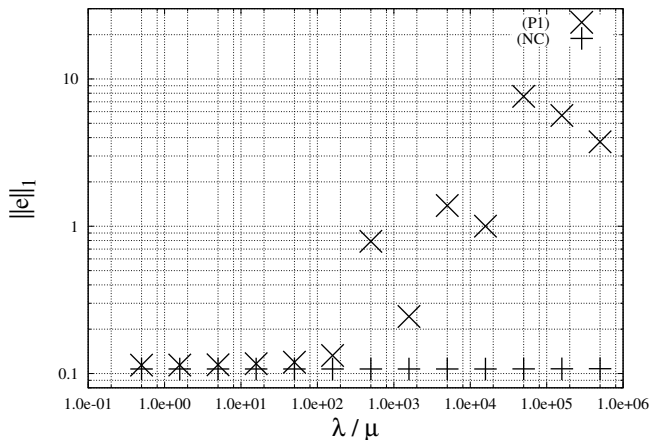


Fig. 5 Errors of P1-FE Solutions and NC-FE Solutions for Fixed h

で確認したように λ/μ の値が大きくなるにつれて (P1) の誤差は増大するが, (NC) の誤差は λ/μ の値によらずほぼ一定であった.

また, Fig. 6 は $\lambda/\mu = 5 \times 10^5$ (すなわち $\lambda = 10^9$) で固定し, h を変化させた時の h と (P1) 及び (NC) の誤差の $(H^1(\Omega))^2$ ノルムとの関係を両対数グラフで示したものである. これより, (NC) の誤差の $(H^1(\Omega))^2$ ノルムは $O(h)$ で収

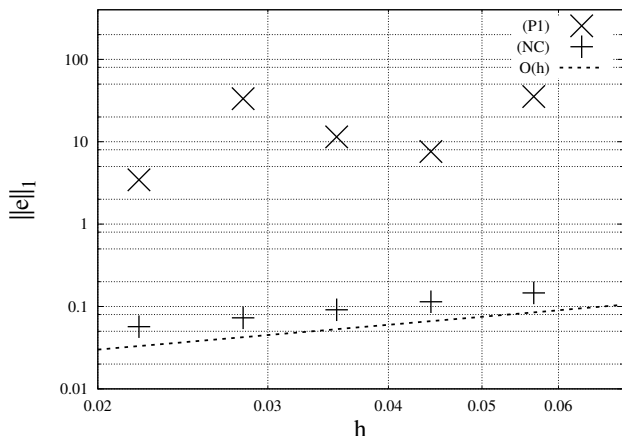


Fig. 6 Convergence of Errors of P1-FE Solutions and NC-FE Solutions.

束しているものと考えられる. 一方, (P1) による計算結果は, この範囲の h では収束の様子は見られない.

5. 結論

本研究では, time harmonic な粘弾性方程式の数値計算手法として非適合有限要素法を用いることを提案した. P_1 要素を用いると locking が生じること, また非適合有限要素法によりそれを回避しうることを見出し, 数値計算により確認した. 特に, 生体を想定した設定における非適合有限要素法の有効性が示された.

本手法により, 例えば最小二乗法による係数同定などが可能になる. 今後は本手法を用いた time harmonic な粘弾性方程式の係数同定手法について検討を行っていききたい.

6. 謝辞

本研究の一部は科研費 26400198, 16H02155, および 18K18719 の助成を受けて行ったものです.

参考文献

- (1) I. Babuška and M. Suri, On Locking and Robustness in the Finite Element Method, *SIAM J. Numer. Anal.*, **29**(1992), pp. 1261–1293.
- (2) I. Babuška and M. Suri, Locking Effects in the Finite Element Approximation of Elasticity Problems, *Numer. Math.*, **62**(1992), pp. 439–463.
- (3) S. Brenner and R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, (2008), Springer.
- (4) C. Carstensen, et al., Locking-free Adaptive Mixed Finite Element Methods in Linear Elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **190**(2000), pp. 1701–1718.
- (5) P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, (1978), SIAM.
- (6) M. Crouzeix and P. -A. Raviart, Conforming and Nonconforming Finite Element Methods for Solving the Stationary Stokes Equations I, *Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle. Mathématique*, **7**(1973), pp. 33–75.
- (7) T. Ha, et al., Nonconforming Finite Element Methods for the Simulation of Waves in Viscoelastic Solids, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **191**(2002), pp. 5647–5670.
- (8) P. Hansbo and M. G. Larson, Discontinuous Galerkin and the Crouzeix-Raviart Element: Application to Elasticity, *ESAIM: M2AN*, **37**(2003), pp. 63–72.
- (9) Y. Jiang, H. Fujiwara and G. Nakamura, Approximate Steady State Models for Magnetic Resonance Elastography, *SIAM J. Appl. Math.*, **71**(2011), pp. 1965–1989.
- (10) A. Manduca, et al., Spatio-Temporal Directional Filtering for Improved Inversion of MR Elastography Images, *Medical Image Analysis*, **7**(4)(2003), pp. 465–473.
- (11) R. Muthupillai, et al., Magnetic Resonance Elastography by Direct Visualization of Propagating Acoustic Strain Waves, *Science*, **269**(1995), pp. 1854–1857.
- (12) 中村玄, MRE データの逆解析手法, 理論応用力学講演会 講演論文集, **61**(2012), OS02-01.
- (13) 山本隆夫, Lagrange 形式に基づく生体の粘弾性描像と MRE 解析, 理論応用力学講演会 講演論文集, **56**(2007), OS2H-02.