

3次元音響問題に関する isogeometric BEMに基づく形状感度解析

A SHAPE SENSITIVITY ANALYSIS BASED ON AN ISOGEOMETRIC BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR 3D ACOUSTIC PROBLEMS

高橋 徹¹⁾, 平井 哲朗²⁾, 佐藤 大輔³⁾, 飯盛 浩司⁴⁾, 松本 敏郎⁵⁾

Toru TAKAHASHI, Tetsuro HIRAI, Daisuke SATO, Hiroshi ISAKARI and Toshiro MATSUMOTO

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t_hirai@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: sato.daisuke@b.mbox.nagoya-u.ac.jp)
 4) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 5) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

First, we formulate an isogeometric boundary element method (IGBEM) for the 3D Helmholtz equation, focusing on the numerical treatment of the singular integral. Second, we apply our IGBEM to the shape sensitivity analysis in the framework of the adjoint variable method. Last, we perform some numerical experiments to validate the present numerical methods.

Key Words: Boundary element method, Isogeometric analysis, NURBS, Shape sensitivity analysis

1. 緒言

境界要素法 (BEM) は境界のみを離散化の対象とするために、形状感度解析あるいは形状最適化問題に適した解法である。この長所は、NURBS 基底を補間関数および形状関数とする離散化体系である isogeometric 解析 (IGA)⁽¹⁾ を採り入れることによって更に顕著となる。なぜならば、(i) 解析対象の表面 (境界) の形状の変更が NURBS 曲面を定義する制御点の変更によって容易に行え、また (ii) 境界メッシュは NURBS 曲面のノット区間を用いて等価的に生成されるので、境界形状の変更に伴うリメッシュはノット挿入によって比較的容易に行え、さらに、(iii) 境界変数も NURBS 基底によって補間されているために、形状導関数を計算するためにしばしば必要となる接線微分が容易に計算でき、しかもその連続性も課すことができるからである。

実際、IGBEM の研究において感度解析あるいは形状最適化を扱った論文は多い (2017 年頃までの研究動向は文献⁽²⁾を参照)。中でも、IGA が CAD ソフトウェア (モデラ) とのシームレスな接続が謳い文句であることもあって、CAE と親密な構造力学 (応力解析) を対象とした研究がほとんどである。一方、BEM が有利とされる波動問題⁽³⁾ に関する研究例は少数である。2次元 Helmholtz 方程式については文

献^(4, 5, 2) が挙げられるが、3次元 Helmholtz 方程式に関する論文は筆者らの知る限りではない。

そこで本論文は、3次元 Helmholtz 方程式に対する IGBEM の構築とその感度解析への適用を目的とする。前者の構築に関しては先行研究^(6, 7, 8) が存在する。中でも、Simpson らの研究⁽⁶⁾ は質と量で共に優れており、本研究で示す IGBEM も内包している。そこで本論文は、実際に問題となる特異積分 (および近特異積分) の方法について詳しく述べることを主眼とする。一方、後者の感度解析については既往の随伴変数法に基づく解析手法であって、理論的に特に目新しさはないが、筆者らが2次元 Helmholtz 方程式に関する IGBEM を形状最適化に応用した先行研究⁽²⁾ に倣って、IGBEM の特徴を活かした形状導関数の離散表現を導く。

以下、2節では解くべき境界値問題と境界積分方程式について述べる。3節ではその IGBEM を定式化する。特異積分の評価手法については節を改めて4節に述べる。構成した IGBEM に基づく形状感度解析手法を5節に述べる。6節では数値解析によって本 IGBEM および感度解析手法の妥当性を検証する。最後、7節で本研究を結論する。

2. 問題定義と境界積分方程式

次の3次元 Helmholtz 方程式に関する外部 Neumann 境界

2018 年 9 月 25 日受付, 2018 年 10 月 15 日受理

[†]Dedicated to the memory of Emeritus Professor Shoichi Kobayashi of Kyoto university.

値問題（硬い散乱体による音響散乱問題）を考える：

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } V \subset \mathbb{R}^3 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S := \partial V \quad (1b)$$

$$u(\mathbf{x}) \rightarrow u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) \quad \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (1c)$$

ここに、 k は波数、 \mathbf{n} は境界 S に対する外向き単位法線ベクトルを表す。この問題を次の境界積分方程式を用いて解く：

$$C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_S \frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y})dS_y = u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) \quad \text{for } \mathbf{x} \in S \quad (2)$$

ここで、 $C(\mathbf{x})$ は自由項であり、滑らかな位置であれば $\frac{1}{2}$ であるが、そうでない場合には次式より求める：

$$C(\mathbf{x}) = 1 - \int_S \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS_y \quad (3)$$

ここに、 $\Gamma(\mathbf{r}) := \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|}$ は 3 次元 Laplace 方程式の基本解である。式 (3) を用いることは正則化に他ならない。

3. Isogeometric 解析

本研究では、元来の IGA の概念⁽¹⁾ に則り、境界積分方程式 (2)（および自由項を決定するための (3)）の形状関数および補間関数として NURBS 基底を採用する。なお、(2) の解法は選点法を用いる。

3.1. 境界 S の表現

境界（閉曲面） S は複数の NURBS 曲面を連結して表現する。各 NURBS 曲面は四角形上で定義されるものとして、曲面パラメータ $s \in [0, 1]$ および $t \in [0, 1]$ を導入する。このとき、ある NURBS 曲面 Π 上の任意点 \mathbf{y} は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s, t) &= \frac{\sum_{k=0}^{n_s-1} \sum_{l=0}^{n_t-1} w_{kl} N_k^{p_s}(s) N_l^{p_t}(t) \mathbf{C}_{kl}}{\sum_{k'=0}^{n_s-1} \sum_{l'=0}^{n_t-1} w_{k'l'} N_{k'}^{p_s}(s) N_{l'}^{p_t}(t)} \\ &= \sum_{k,l} \frac{w_{kl} N_{kl}(s, t)}{W(s, t)} \mathbf{C}_{kl} \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 N_k^p は k 番目の p 次 B-spline 関数、 w_{kl} と \mathbf{C}_{kl} は (k, l) 番目の重みと制御点を表す。次数 (p_s, p_t) 、重みおよび制御点は表現したい S の形状に応じて定まる量である。簡単のために、積 $N_k^{p_s}(s) N_l^{p_t}(t)$ を $N_{kl}(s, t)$ と表し、総和 $\sum_{k,l} w_{kl} N_{kl}(s, t)$ を $W(s, t)$ と表した。

B-spline 関数を定義するためのノット列 $\{s_i\}_{i=0}^{n_s+p_s}$ および $\{t_j\}_{j=0}^{n_t+p_t}$ は、一般には非減少列であればよい。本研究では、NURBS 曲面の縁に外周の制御点が必ず位置するように、ノット列 $\{s_i\}$ （同 $\{t_j\}$ ）の最初と最後の $p_s + 1$ （同 $p_t + 1$ ）個のノットはそれぞれ重なる。

3.2. 境界変数 u の表現

ある NURBS 曲面 Π 上の境界変数 u も次のように NURBS 基底の直積により補間する：

$$u(s, t) = \sum_{k,l} \frac{w_{kl} N_{kl}(s, t)}{W(s, t)} u_{kl} \quad (5)$$

ここで、 u_{kl} は求めるべき未知変数である。なお、clamped なノットを用いているために、 Π の縁上に位置する点 \mathbf{C}_{kl} に

おける u は係数 u_{kl} で表現される。その他の係数 u_{kl} は u と同じ次元を持つが物理的な意味は明確ではない。

境界変数 u は NURBS 曲面同士の交線あるいは交点において連続である必要がある。この連続性の条件は、等しくあるべき未知変数に同一のグローバルな未知番号を与えれば考慮できる。例えば、ある NURBS 曲面 Π の縁の上の制御点 \mathbf{C}_{kl} と別の曲面 Π' の縁の上の制御点 $\mathbf{C}'_{k'l'}$ が同じ位置を占めるとする（同一か否かは二点間の距離によって判定する）。このとき、これら二つの制御点には、全ての NURBS 曲面に渡ってグローバルなインデックス ν を与える。これを面 Π および Π' ではそれぞれ $(k, l) \mapsto \nu$ および $(k', l') \mapsto \nu$ と言った対応関係（写像 Ψ ）として記憶する。ここで、(4) と (5) を比較してわかるように、制御点 \mathbf{C}_{kl} と未知変数 u_{kl} は対等であるから、写像 Ψ はローカルな未知変数のインデックスにグローバルな未知変数のインデックスを割り当てる写像としても使える。

また、写像 Ψ によって、 S 上の任意点 \mathbf{y} および境界変数 u は、 S を構成する NURBS 曲面のインデックスを陽に用いること無しに、

$$\mathbf{y}(s, t) = \sum_{\nu=1}^N R_\nu(s, t) \mathbf{C}_\nu, \quad u(s, t) = \sum_{\nu=1}^N R_\nu(s, t) u_\nu \quad (6)$$

のように表現できる。ここで、 R_ν は対応する NURBS 曲面の基底 $\frac{w_{kl} N_{kl}}{W}$ を表し、 N は（グローバルな）未知数の数を表す。

3.3. 境界積分方程式の離散化

式 (6) の両式を境界積分方程式 (2) に代入すると、次の線形方程式を得る：

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}(\hat{s}, \hat{t})) \sum_{\nu=1}^N R_\nu(\hat{s}, \hat{t}) u_\nu \\ + \int_S \frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{x}(\hat{s}, \hat{t}), \mathbf{y}(s, t)) \sum_{\nu=1}^N R_\nu(s, t) dS_y u_\nu \\ = u^{\text{inc}}(\mathbf{x}(\hat{s}, \hat{t})) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 (\hat{s}, \hat{t}) は境界選点 \mathbf{x} に対応する曲面パラメータであり、 \hat{s} および \hat{t} は Greville 座標⁽⁵⁾ によって定める。各 NURBS 曲面は clamped ノットを用いて張られているため、外周の境界選点は NURBS 曲面の縁に配置される。このとき、隣接する NURBS 曲面の境界選点と重なってしまうが、上記した写像 Ψ を利用して重なった境界選点を同一視すれば、選点の数は未知数の数 N と一致させることができる。

式 (7) は要素 E_{ij} (isogeometric 要素) を導入することによって整理できる。 E_{ij} は、パラメータ空間上で $\{(s, t) \mid s_i \leq s < s_{i+1}, t_j \leq t < t_{j+1}\}$ に相当する S の部分を表す。今、ノット列は clamped であるから、境界積分を行うべき要素の範囲は、 $p_s \leq i \leq n_s - 1$ かつ $p_t \leq j \leq n_t - 1$ に限定される。また、総和 \sum_ν は $E_{i,j}$ に台を持つ NURBS 基底だけに限定できる。ここで、 $N_k^{p_s}(s)$ の台は $[s_k, s_{k+p_s+1}]$ であることに

注意する．以上より，(7) は次のように書ける：

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}(\hat{s}, \hat{t})) &= \sum_{k=i-p_s-1}^{p_s} \sum_{l=j-p_t-1}^{p_t} \frac{w_{kl} N_{kl}(\hat{s}, \hat{t})}{W(\hat{s}, \hat{t})} u_{kl} \\ &+ \sum_{\Pi} \sum_{i=p_s}^{n_s-1} \sum_{j=p_t}^{n_t-1} \int_{E_{ij}} \frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{x}(\hat{s}, \hat{t}), \mathbf{y}(s, t)) \\ &\times \sum_{k=i-p_s-1}^{p_s} \sum_{l=j-p_t-1}^{p_t} \frac{w_{kl} N_{kl}(s, t)}{W(s, t)} dS_y u_{kl} \\ &= u^{\text{inc}}(\mathbf{x}(\hat{s}, \hat{t})) \end{aligned} \quad (8)$$

ここに， \sum_{Π} は S を構成する NURBS 曲面に関する総和を表す．

本研究では，(8) を LU 分解を用いて解く．解 u_{kl} から (5) により S 上の u が求まる．

4. 境界積分の評価

式 (8) に現れる二重層ポテンシャルの特異積分および近特異積分の評価方法について詳しく述べる．鍵となるのは Lachat-Watson の変数変換⁽⁹⁾ であるが，その変換によって (弱い) 特異性を陽にキャンセルするための準備から始める．

4.1. 準備

選点 $\mathbf{x}(\hat{s}, \hat{t})$ をその内部あるいは縁に含む要素 E_{ij} 上での二重層ポテンシャルの特異積分を考える．まず，相対位置ベクトル \mathbf{r} は (4) より次のように表すことができる：

$$\mathbf{r}(s, t) := \mathbf{x}(\hat{s}, \hat{t}) - \mathbf{y}(s, t) = \sum_{k,l} w_{kl} \frac{X_{kl}(s, t)}{W(\hat{s}, \hat{t})W(s, t)} \mathbf{C}_{kl} \quad (9)$$

ここに，

$$\begin{aligned} X_{kl}(s, t) &:= W(s, t)N_{kl}(\hat{s}, \hat{t}) - W(\hat{s}, \hat{t})N_{kl}(s, t) \\ &= \sum_{k',l'} w_{k'l'} (Y_{k'l'}(s, t)N_{kl}(\hat{s}, \hat{t}) - Y_{kl}(s, t)N_{k'l'}(\hat{s}, \hat{t})) \end{aligned} \quad (10)$$

$$Y_{kl}(s, t) := N_{kl}(s, t) - N_{kl}(\hat{s}, \hat{t}) \quad (11)$$

次に， $Y_{kl}(s, t)$ を s および t の多項式として陽に表す．B-spline 基底 $N_k^{p_s}(s)$ と $N_l^{p_t}(t)$ がそれぞれ p_s 次と p_t 次の多項式であることから，それらは

$$N_k^{p_s}(s) = \sum_{i=0}^{p_s} c_{k,i} s^i, \quad N_l^{p_t}(t) = \sum_{j=0}^{p_t} d_{l,j} t^j \quad (12)$$

と表すことができる．係数 $c_{k,i}$ は連立線形方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{s}_0 & \bar{s}_0^2 & \cdots & \bar{s}_0^{p_s} \\ 1 & \bar{s}_1 & \bar{s}_1^2 & \cdots & \bar{s}_1^{p_s} \\ 1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_2^2 & \cdots & \bar{s}_2^{p_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \bar{s}_{p_s} & \bar{s}_{p_s}^2 & \cdots & \bar{s}_{p_s}^{p_s} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{k,0} \\ c_{k,1} \\ c_{k,2} \\ \vdots \\ c_{k,p_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_k^{p_s}(\bar{s}_0) \\ N_k^{p_s}(\bar{s}_1) \\ N_k^{p_s}(\bar{s}_2) \\ \vdots \\ N_k^{p_s}(\bar{s}_{p_s}) \end{bmatrix}$$

から決定できる．ここで， \bar{s}_m は考えている区間 $[s_l, s_{l+1}]$ 上で一様にサンプルした点，つまり $\bar{s}_m := \frac{p_s-m}{p_s} s_l + \frac{m}{p_s} s_{l+1}$ ($m = 0, \dots, p_s$) である．この場合，係数行列は Vandermonde 行列となるために正則である．実際の数値解析では LU 分解によって係数を求める (この意味で本積分方法は半解析的である)．係数 $d_{l,j}$ も同様にして求める．

このとき，(11) の Y_{kl} は次のように表すことができる：

$$Y_{kl}(s, t) = \sum_{i=0}^{p_s} \sum_{j=0}^{p_t} c_{k,i} d_{l,j} (s^i t^j - \hat{s}^i \hat{t}^j)$$

ここで，右辺の $s^i t^j - \hat{s}^i \hat{t}^j$ は

$$\begin{aligned} (s - \hat{s}) &\left(\sum_{m=0}^{i-1} s^m \hat{s}^{i-1-m} \right) \frac{t^j + \hat{t}^j}{2} \\ &+ (t - \hat{t}) \left(\sum_{m=0}^{j-1} t^m \hat{t}^{j-1-m} \right) \frac{s^i + \hat{s}^i}{2}. \end{aligned}$$

と変形できるので，次式を得る：

$$Y_{kl}(s, t) = (s - \hat{s})D_{kl}(s, t) + (t - \hat{t})E_{kl}(s, t) \quad (13)$$

ここに，

$$\begin{aligned} D_{kl}(s, t) &:= \sum_{i=0}^{p_s} c_{k,i} \sum_{m=0}^{i-1} s^m \hat{s}^{i-1-m} \sum_{j=0}^{p_t} d_{l,j} \frac{t^j + \hat{t}^j}{2} \\ E_{kl}(s, t) &:= \sum_{i=0}^{p_s} c_{k,i} \frac{s^i + \hat{s}^i}{2} \sum_{j=0}^{p_t} d_{l,j} \sum_{m=0}^{j-1} t^m \hat{t}^{j-1-m} \end{aligned}$$

なお，(12) より，上式の $\sum_{i=0}^{p_s} c_{k,i} \frac{s^i + \hat{s}^i}{2}$ と $\sum_{j=0}^{p_t} d_{l,j} \frac{t^j + \hat{t}^j}{2}$ はそれぞれ $\frac{N_k^{p_s}(s) + N_k^{p_s}(\hat{s})}{2}$ と $\frac{N_l^{p_t}(t) + N_l^{p_t}(\hat{t})}{2}$ に書き換えることができる．式 (13) より，(10) の X_{kl} も D_{kl} と E_{kl} を用いて表現できる．このとき，(9) の \mathbf{r} およびその大きさ r は次のように書ける：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s, t) &= \sum_{k,l} w_{kl} \sum_{k',l'} w_{k'l'} \frac{\mathbf{C}_{kl}}{W(\hat{s}, \hat{t})W(s, t)} \\ &\times \left[\left\{ (s - \hat{s})D_{k'l'}(s, t) + (t - \hat{t})E_{k'l'}(s, t) \right\} N_{kl}(\hat{s}, \hat{t}) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ (s - \hat{s})D_{kl}(s, t) + (t - \hat{t})E_{kl}(s, t) \right\} N_{k'l'}(\hat{s}, \hat{t}) \right] \\ &= (s - \hat{s})\mathbf{F}(s, t) + (t - \hat{t})\mathbf{G}(s, t) \quad (14) \\ r(s, t) &= \sqrt{(s - \hat{s})^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} + 2(s - \hat{s})(t - \hat{t})\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} + (t - \hat{t})^2 \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}} \quad (15) \end{aligned}$$

ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s, t) &:= \sum_{k,l} w_{kl} \sum_{k',l'} w_{k'l'} \frac{\mathbf{C}_{kl}}{W(\hat{s}, \hat{t})W(s, t)} \\ &\times \left\{ D_{k'l'}(s, t)N_{kl}(\hat{s}, \hat{t}) - D_{kl}(s, t)N_{k'l'}(\hat{s}, \hat{t}) \right\} \\ &= \frac{\sum_{k,l} w_{kl} D_{kl}(s, t)(\mathbf{x} - \mathbf{C}_{kl})}{W(s, t)} \end{aligned}$$

であり， \mathbf{G} の定義は，上式の右辺の関数 D を E で置き換えたものである．

4.2. 変数変換

要素 E_{ij} を Fig. 1 左のように四つの三角形に分割する．以下，図中の三角形 ABC 上の特異積分

$$I(\mathbf{x}) := \int_{\text{ABC}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} \phi dS_y = \int_{\text{ABC}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} \phi J ds dt$$

を考える．ここで， $J(s, t) := \left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \right|$ である．また，関数 ϕ は $(1 - ikr)e^{ikr}$ と NURBS 基底の積であり，点 C (選点) を含めて正則であるから，以下の議論では問題とならない．

積分核が点 C において有する特異性は、適当な積分変数の変換を行うとキャンセルできる。本研究では Lachat-Watson の変数変換⁽⁹⁾を用いる。すなわち、変数 s と t を次のような変数 ξ と η によって表す：

$$\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} + \xi(\mathbf{a} - \hat{\mathbf{s}}) + \xi\eta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \text{for } 0 \leq \xi, \eta \leq 1$$

ここに、 $\mathbf{s} := \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{s}} := \begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} := \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_s \\ a_t \end{pmatrix}$ および $\mathbf{b} := \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_s \\ b_t \end{pmatrix}$ である。このとき、

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \xi} = (\mathbf{a} - \hat{\mathbf{s}}) + \eta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) =: \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_s \\ h_t \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \eta} = \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

であるから、ヤコビアンは次のように計算できる：

$$\left| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \eta} \right| = \xi \{ (a_s - \hat{s})(b_t - a_t) - (a_t - \hat{t})(b_s - a_s) \} \\ =: \xi Q(\xi, \eta)$$

このとき、 $s - \hat{s} = \xi h_s$ および $t - \hat{t} = \xi h_t$ であるから、(14) と (15) より以下の関係式が得られる：

$$\mathbf{r} = \xi (h_s \mathbf{F} + h_t \mathbf{G}) \quad (16)$$

$$r = \xi \sqrt{h_s^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} + 2h_s h_t \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} + h_t^2 \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}} =: \xi R(\xi, \eta) \quad (17)$$

証明には至っていないが、曲面 S が自己交差をしない限り、関数 R は正値であると考えられる。

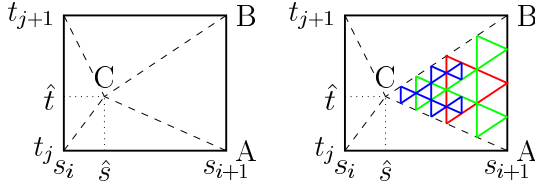


Fig. 1 Split of the element E_{ij} into four sub-triangles (left), and subdivision of the triangle ABC (of level 0) into sub-triangles of levels $1, \dots, D-1$ by the coloured edges (right)

4.3. 二重層ポテンシャルの特異積分

法線ベクトル \mathbf{n} が

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}}{\left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \right|} =: \frac{\mathbf{N}}{J}$$

と表されることから、(16) および (17) より、三角形 ABC 上の二重層ポテンシャル I は次のように評価できる：

$$I(\mathbf{x}) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{((s - \hat{s})\mathbf{F} + (t - \hat{t})\mathbf{G}) \cdot \mathbf{N}}{\xi^3 R^3} \phi \xi Q d\xi d\eta$$

ここで、

$$\mathbf{N} = \frac{\partial(\mathbf{x} - \mathbf{r})}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} - \mathbf{r})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$$

であるから、 \mathbf{N} を (16) によって \mathbf{F} および \mathbf{G} を用いて表すと、 I の被積分関数の分子の各項は次のように書き下せる：

$$(s - \hat{s})\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \\ = \xi^2 \left([\mathbf{F}, \mathbf{F}_s, \mathbf{F}_t] \xi h_s^3 + [\mathbf{F}, \mathbf{F}_s, \mathbf{G}_t] \xi h_s^2 h_t + [\mathbf{F}, \mathbf{F}_s, \mathbf{G}] h_s^2 \right. \\ \left. + [\mathbf{F}, \mathbf{G}_s, \mathbf{F}_t] \xi h_s^2 h_t + [\mathbf{F}, \mathbf{G}_s, \mathbf{G}_t] \xi h_s h_t^2 + [\mathbf{F}, \mathbf{G}_s, \mathbf{G}] h_s h_t \right) \\ =: \xi^2 f(\xi, \eta)$$

$$(t - \hat{t})\mathbf{G} \cdot \mathbf{N} \\ = \xi^2 \left([\mathbf{G}, \mathbf{F}_s, \mathbf{F}_t] \xi h_s^2 h_t + [\mathbf{G}, \mathbf{F}_s, \mathbf{G}_t] \xi h_s h_t^2 + [\mathbf{G}, \mathbf{F}, \mathbf{F}_t] h_s h_t \right. \\ \left. + [\mathbf{G}, \mathbf{F}, \mathbf{G}_t] h_t^2 + [\mathbf{G}, \mathbf{G}_s, \mathbf{F}_t] \xi h_s h_t^2 + [\mathbf{G}, \mathbf{G}_s, \mathbf{G}_t] \xi h_t^3 \right) \\ =: \xi^2 g(\xi, \eta)$$

ここに、 $\mathbf{F}_s := \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s}$ 等であり、微分は陽に実行できる。また、 $[\]$ はスカラー三重積を表す。ゆえに、次式を得る：

$$I(\mathbf{x}) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{f+g}{R^3} \phi Q d\xi d\eta \quad (18)$$

4.4. サブ要素分割

式 (18) の積分は特異性を持たず、 ξ と η のそれぞれに一次元 Gauss 積分公式を適用して評価できる。ところが、後の数値実験でわかるように、高精度の数値結果を得るためには単純な適用では不十分である。

そこで本研究では、文献⁽¹⁰⁾を参考として、Fig. 1 右のように注目する三角形 ABC を再帰的に再分割する方法（サブ要素分割）を採用する。すなわち、 ABC を四つの三角形に分割する（図中の赤色の辺を挿入して行う）。それらをレベル 1 の三角形と呼ぶ。続いて、レベル 1 の各三角形を分割してレベル 2 の三角形を作る（緑色の辺を挿入する）。これを再帰的に繰り返す。あるレベルの三角形を分割する条件は、(i) そのレベルが $D-1$ 以下であること、かつ (ii) $d < 3h$ が満たされることである。ここで、 D は所定の数（6 節の数値実験では $D=7$ とした）、 d は選点 \mathbf{x} （点 C ）から注目する三角形の図心までの距離であり、 h はその三角形の面積の平方根である。

以上の手続きによって生成されたレベル $D-1$ までの三角形に関して、点 C を含む三角形上の積分については 4.3 節に従って評価し、その他の三角形上の積分については三角形用 Gauss 積分公式によって評価する。6 節の数値実験では 7 点の積分公式を用いた。

4.5. 近特異積分の評価

特異積分にサブ要素分割を適用した場合、二次的に精度上で重要となるのは、選点と近い要素に関する積分（近特異積分）である。近特異積分もサブ要素分割により評価する。すなわち、注目する E_{ij} を四つの四角形に等分し、 $d < 3h$ が満足されるまで分割を再帰的に繰り返す。ここで、 d は選点とサブ四角形の図心との距離、 h はそのサブ四角形の面積の平方根である。

5. 形状感度解析

以上で構成した IGBEM と随伴変数法に基づく形状感度解析手法を述べる。

5.1. 形状最適化問題と形状導関数

本論文では、目的関数 \mathcal{J} を所定の観測点 $\mathbf{z}_m \in V$ における音圧 u の和として定義する：

$$\mathcal{J}(u; S) := \sum_{m=1}^M \frac{|u(\mathbf{z}_m)|^2}{2} \quad (19)$$

式 (19) の \mathcal{J} に関する形状導関数 S は、 ϵ を微小な数とするとき、 S 上の各点 \mathbf{y} を $\epsilon \mathbf{V}(\mathbf{y})$ だけ移動して生じる新たな境界 \tilde{S} と音場 \tilde{u} に関する目的関数 $\mathcal{J}(\tilde{u}; \tilde{S})$ を ϵ について展開したときに得られる ϵ の 1 次項の係数である：

$$\mathcal{J}(\tilde{u}; \tilde{S}) = \mathcal{J}(u; S) + \epsilon S(u; S) + O(\epsilon^2) \quad (20)$$

ここで、 S は次のように導くことができる (例えば文献 (11))：

$$S(u; S) = \Re \int_S (k^2 \lambda^* u - \nabla \lambda^* \cdot \nabla u) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \quad (21)$$

ここに、 $(\cdot)^*$ は複素共役、 u は (1) の問題 (主問題) の解、 λ は次の随伴問題の解である：

$$\Delta \lambda(\mathbf{x}) + k^2 \lambda(\mathbf{x}) = - \sum_m u(\mathbf{x}_m) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_m) \quad \text{in } V \quad (22a)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on } S \quad (22b)$$

$$\lambda(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (22c)$$

ここで、(22a) の右辺の $u(\mathbf{z}_m)$ は、主問題を解いた後に内点計算により求まる。また、随伴問題は主問題と同じ形式をしており、本 IGBEM を用いて解くことができる。

5.2. 形状導関数の離散化

数値解析では、微小変形 $\epsilon \mathbf{V}$ は有限として与える必要がある。IGBEM では、境界上の任意点 \mathbf{y} が NURBS 基底を用いて (6) の第一式のように表現されるので、その変形前後の差として $\epsilon \mathbf{V}(\mathbf{y})$ を次のように近似するのが合理的である (2)：

$$\epsilon \mathbf{V}(\mathbf{y}) \approx \tilde{\mathbf{y}}(s, t) - \mathbf{y}(s, t) = \sum_{\nu=1}^N R_{\nu}(s, t) \delta \mathbf{C}_{\nu}$$

ここに、 $\delta \mathbf{C}_{\nu}$ は境界 S を生成する制御点 \mathbf{C}_{ν} と \tilde{S} を生成する制御点 $\tilde{\mathbf{C}}_{\nu}$ の変化量である。このとき、(20) の $\mathcal{J}(\tilde{u}; \tilde{S})$ は次のように離散化できる：

$$\mathcal{J}(\tilde{u}; \tilde{S}) \approx \mathcal{J}(u; S) + \sum_{\nu=1}^N s_{\nu}(u; S) \cdot \delta \mathbf{C}_{\nu} + O(\epsilon^2) \quad (23)$$

ここに、

$$s_{\nu}(u; S) := \Re \int_S (k^2 \lambda^* u - \nabla \lambda^* \cdot \nabla u) R_{\nu} \mathbf{n} dS$$

なお、 ∇u は境界条件 (1b) により法線成分を持たないことから次のように表すことができる (12)：

$$\nabla u = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \mathbf{t} \times \mathbf{n} + \frac{\partial u}{\partial t} \mathbf{n} \times \mathbf{s} \right)$$

ここに、 $\mathbf{s} := \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s}$ 、 $\mathbf{t} := \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}$ である (このとき $J = |\mathbf{s} \times \mathbf{t}|$)。接線微分 $\frac{\partial u}{\partial s}$ および $\frac{\partial u}{\partial t}$ は、NURBS 基底を微分することによって容易に計算できる。 $\nabla \lambda$ についても同様である。

離散化された感度 s_{ν} の境界積分は特異性がないため、isogeometric 要素毎に Gauss 積分公式によって評価できる。

6. 数値実験

数値実験によって開発した IGBEM と感度解析手法の妥当性を検証する。

6.1. 散乱解析

球 (原点中心、半径 0.5) に $+x_3$ 方向に進む平面入射波 $u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = e^{ikx_3}$ を入射する散乱問題を解く。この問題には厳密解が存在するので (13)、それと IGBEM による数値解とを比較する。以下、波数 k は 3 とした。

球面 S は六枚の NURBS 曲面を張り合わせて厳密に構成する (14)。このとき、各面では $n_s = n_t = 4$ かつ $p_s = p_t = 4$ であり、ノット列 $\{s_i\}$ ($\{t_j\}$ も同様) は次のようにする：

$$s_i = \begin{cases} 0 & i = 0, \dots, p_s \\ \frac{i - p_s}{n_s - p_s} & i = p_s + 1, \dots, n_s - 1 \\ 1 & i = n_s, \dots, n_s + p_s \end{cases}$$

未知数の数 (N) は $6n_s n_t$ 程度のため、IGBEM の精度を上げるために n_s および n_t を増加する。具体的には、球形を保持しつつノットを挿入する (1)。

IGBEM の設定としては、特異積分および近特異積分のサブ要素分割を行うか否か、また正則化を行うか否か (つまり、自由項の計算に (3) を用いるか否か) の二点を考慮し、四つのケースを比較する。また、いずれのケースにおいても、1 次元 Gauss 数値積分公式の点数は 3 に固定した。

Fig. 2 は u の厳密解 ($u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) (j_n(kr) - A'_n h_n^{(1)}(kr)) P_n(\cos \theta)$) に対する数値解の相対 l_2 誤差を自由度 N に対してプロットしている。ここで、 j_n は球 Bessel 関数、 $h_n^{(1)}$ は第 1 種球 Hankel 関数、 P_n は Legendre 多項式であり、 $A'_n := j'_n(ka) / h_n^{(1)'}(ka)$ である (プライムは a に関する微分を表す)。また、相対 l_2 誤差を計算するための u の計算点の数は各 NURBS 曲面上で 30×30 、合計 5400 である。要素再分割と正則化を併用すること (図中の “Both”) で誤差の収束が速まることがわかる。

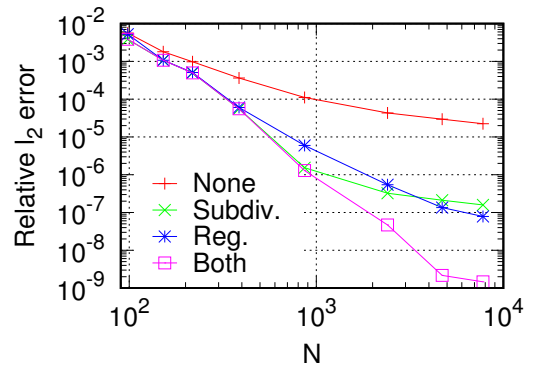


Fig. 2 Relative l_2 error of u . Here, “Subdiv.” and “Reg.” stand for the element subdivision (recall Sections 4.4 and 4.5) and regularization (based on Eq. 3), respectively

6.2. 感度解析

前節の球による散乱解析の設定の基で、目的関数 $\mathcal{J} = \frac{|u(\mathbf{z}_1)|^2}{2}$ の球半径 a に関する感度 $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial a}$ を (21) の形状導関数より求める。この感度の厳密解は、 $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial a} = \Re \left(\frac{\partial u}{\partial a} u^* \right)$ であることから、上に述べた u が含む係数 A'_n の a に関する微分を求めればよく、恒等式 $j_{n+1}(z)n_n(z) - j_n(z)n_{n+1}(z) = 1/z^2$

および $j_{n+2}(z)n_n(z) - j_n(z)n_{n+2}(z) = (2n+3)/z^3$ (ただし, n_n は球 Neumann 関数) を用いると, $A_n'' = \frac{n^2+1}{ka^4 h_n^{(1)'(ka)}}$ と求まる.

式 (23) の形状導関数に基づく感度 $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial a}$ は, 制御点の変化分 $\delta \mathbf{C}_\nu$ が $-\delta a \mathbf{n}$ に相当する (負号は法線 \mathbf{n} が球の内側に向いているため) ことより,

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial a} \approx \sum_{\nu=1}^N \mathbf{s}_\nu \cdot \mathbf{n} \quad (24)$$

のように求まる. ここで, \mathbf{s}_ν の計算に必要な主問題および随伴問題の解析には, サブ要素分割と正則化を併用した IGBEM を用いた.

Table 1 に感度解析結果を示す. 未知数の数 N の増加と共に (24) の値は厳密解に近づいており, 妥当な結果と言える.

Table 1 Result for the shape sensitivity $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial a}$

N	$\mathbf{z}_1 = (0, 0, 1)^T$	$\mathbf{z}_1 = (1, 0, 0)^T$
384	3.157259e-01	6.837717e-01
866	3.170901e-01	6.923847e-01
2402	3.181013e-01	6.962599e-01
Exact	3.187004e-01	6.980664e-01

7. 結論

本論文では, 先行研究⁽⁶⁾の詳細を補う目的で特異積分の処理方法に論点をおいて, 3次元 Helmholtz 方程式に対する isogeometric 境界要素法 (IGBEM) の定式化を行った. そして, IGBEM および随伴変数法に基づく形状感度解析手法を示した. 数値実験では良好な解析結果が得られ, 本数値解析手法の妥当性が示されたと考えられる.

今後の目標は形状最適化への応用である. また, 本論文では計算時間については考察していないが, 本 IGBEM に高速多重極法等の高速化手法を導入⁽¹⁵⁾する必要もある.

謝辞: 本研究は科研費 (18K11335) の助成の元に遂行しました. また, 校閲委員より (15) と (17) の計算ミス指摘して頂き, 数値解析を含めて修正した. 記して謝意を表します.

参考文献

- (1) T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell: Isogeometric analysis CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**(2005), pp. 4135–4195.
- (2) T. Takahashi, T. Yamamoto, Y. Shimba, H. Isakari, T. Matsumoto: A framework of shape optimisation based on the isogeometric boundary element method toward designing thin-silicon photovoltaic devices, *Engineering with Computers*, DOI:10.1007/s00366-018-0606-6, 2018.
- (3) 小林昭一ほか: 波動解析と境界要素法, 2000, 京都大学学術出版会.
- (4) 辰巳領亮: IGBEM を用いた 2次元音響形状最適化, (2017), 卒業論文, 名古屋大学工学部機械・航空工学科電子機械コース.
- (5) C. Liu, L. Chen, W. Zhao, Haibo Chen: Shape optimization of sound barrier using an isogeometric fast multipole boundary element method in two dimensions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **85**(2017), pp. 142–157.
- (6) R. Simpson, M. Scott, M. Taus, D. Thomas, H. Lian: Acoustic isogeometric boundary element analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **269**(2014), pp. 265–290.
- (7) M. Peake, J. Trevelyan, G. Coates: Extended isogeometric boundary element method (XIBEM) for three-dimensional medium-wave acoustic scattering problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **284**(2015), pp. 762–780.
- (8) L. Coox, O. Atak, D. Vandepitte, W. Desmet: An isogeometric indirect boundary element method for solving acoustic problems in open-boundary domains, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **316**(2017), pp. 186–208.
- (9) J.C. Lachat, J.O. Watson: Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **10**(1976), pp. 991–1005.
- (10) M.F. Taus: Isogeometric Analysis for Boundary Integral Equations, (2015), doctoral dissertation.
- (11) G.R. Feijóo, A.A. Oberai, P.M. Pinsky: An application of shape optimization in the solution of inverse acoustic scattering problems, *Inverse Problems*, **20**(2004), pp. 199–228.
- (12) A.F. Peterson: Mapped Vector Basis Functions for Electromagnetic Integral Equations, (2006), Morgan & Claypool Publishers.
- (13) J.J. Bowman, T.B.A. Senior, P.L.E. Uslenghi: *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, (1987), Hemisphere Publishing Corp.
- (14) J.E. Cobb: Tiling the sphere with rational Bézier patches, Report TR UUCS-88-009, (1988), University of Utah, USA.
- (15) T. Takahashi, T. Matsumoto: An application of fast multipole method to isogeometric boundary element method for Laplace equation in two dimensions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **36**(2012), pp. 1766–1775.