計算数理工学論文集 Vol. 18 (2018 年 12 月)，論文 No. 13-181201　JASCOME

電界型積分方程式における新しい不連続ガラーキン法と H_{div} 内積を用いた離散化について

A NEW DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR EFIE AND ITS DISCRETISATION WITH H_{div} INNER PRODUCT

窪田 拓人 [1)]，新納 和樹 [2)]，西村 直志 [3)]

Takuto KUBOTA, Kazuki NIINO and Naoshi NISHIMURA

1) 京都大学情報学研究科修士課程　(〒 606-8501　京都市左京区吉田本町　)
2) 京都大学情報学研究科　(〒 606-8501　京都市左京区吉田本町　E-mail: niino@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
3) 京都大学情報学研究科　(〒 606-8501　京都市左京区吉田本町　E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)

This paper presents a discontinuous Galerkin method for the electric field integral eqaution in Maxwell's equations. The proposed method uses a complete set of piecewise linear basis functions within an element in order to obtain a highly accurate numerical solutions. This formulation is also expected to be useful in discretisations with the H_{div} inner product, which is a known remedy for the low frequency breakdown. It is shown through numerical experiments that the proposed approach gives more accurate solutions than the standard Galerkin's method. It is also shown that the proposed approach with the H_{div} inner product discretisation produces a well-conditioned system of equations when the frequency is not extremely small, although it does break down otherwise.

Key Words: Maxwell's equations, Discontinuous Galerkin Method, H_{div} Inner Products

1. 序論

Maxwell 方程式の数値計算はアンテナの設計やレーダーの解析などに応用されることが多く，無限遠を含む領域における解析が重要である．このため，外部問題を精度よく計算できる境界要素法が幅広く用いられている．境界要素法では偏微分方程式を考える領域境界上で定義される積分方程式に変換し，これを解くことで解を求めるが，様々な積分方程式の定式化や数値解法が知られている．Maxwell 方程式に対する境界要素法においてもっとも基本的な定式化である電界型積分方程式 (EFIE) は，導体による波動散乱問題に広く用いられている．通常，RWG (Rao-Wilton-Grisson) 基底 [(1)] 等の H_{div} の基底関数と，ガラーキン法を用いて離散化されるが，更なる精度向上を目的として不連続ガラーキン法 [(2)] の研究も行われている．既往の研究として，RWG の不連続版である Peng 等 [(3)] の研究や，roof top 関数の不連続版である小倉 [(4)] の研究をあげることができる．しかし現状では十分に多くの研究が行われているとは言えず，更なる精度の向上の為に，これまでに試されていない基底関数を使ってみることには意義があると考えられる．そこで本論文では要素内で未知数の各成分に線形近似を用いた (すなわち要素内では通常の P_1 要素に一致する) 不連続ガラーキン法を試みる．

ところで，EFIE は周波数 ω の値が非常に小さい時に低周波破綻を起こすことが知られている．低周波破綻とは，ω の値が非常に小さくなると積分方程式が悪条件になり，解の精度が著しく悪化する現象である．Niino 等 [(5)] は EFIE をガラーキン法，H_{div} 内積と双対基底を用いて離散化することによって低周波破綻を回避できることを示した (低周波破綻の他の回避法については Niino 等 [(5)] の参考文献を参照)．しかし煩雑な双対基底の構成を省略できる定式化が得られればそのメリットは大きい．本論文では，提案手法と H_{div} 内積を用いた電界型積分方程式の不連続ガラーキン法では，双対基底の使用が不要であることを実証する．

2. 定式化

本節では，電界型積分方程式 (EFIE) の定式化を示す．

2.1. 支配方程式

Fig. 1 に示されるような無限領域 $\mathbb{R}^3$ 中の滑らかな境界 Γ をもつ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ に対する散乱問題を考える．また，外部領域を $\Omega_{\mathrm{e}} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ とする．

2018 年 9 月 19 日受付，2018 年 10 月 19 日受理

¶Dedicated to the memory of Prof. Kobayashi

このとき，支配方程式，

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = i\omega\mu\boldsymbol{H}, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega\epsilon\boldsymbol{E} \quad \text{in } \Omega_{\mathrm{e}} \tag{1}$$

を満たし，また境界 Γ において完全導体の境界条件

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma \tag{2}$$

と無限遠方において，散乱波 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}$，$\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}$ に対する Silver-Müller の放射条件を満たす $\boldsymbol{E}$ を求める．ここに ϵ，μ は外部領域における誘電率，透磁率であり，ω は周波数，$\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}$，$\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}$ はそれぞれ入射波の電場，磁場である．さらに $\boldsymbol{n}$ は Ω から Ω_{e} を向いた Γ の単位法線ベクトルである．

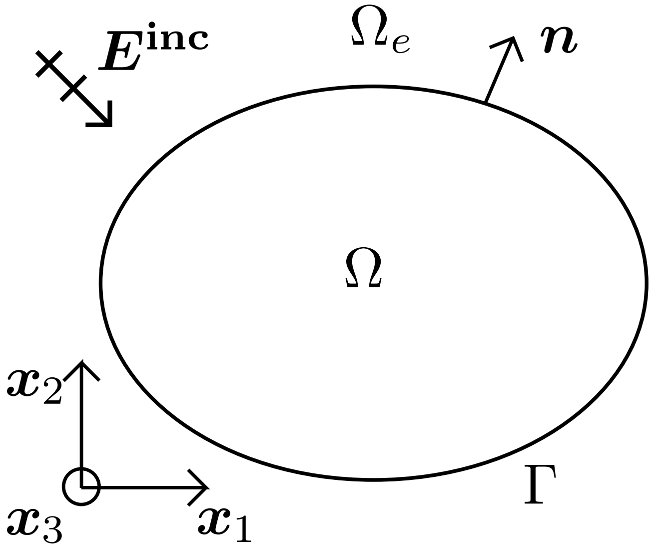

Fig. 1　Problem setting

2.2. 積分方程式

Maxwell 方程式に対する境界積分方程式について述べる．問題設定は 2.1 に従うものとする．Maxwell 方程式 (1) の解 $\boldsymbol{E}$ は，以下の式を満たす.

$$\int_{\Omega_{\mathrm{e}}} \Gamma_{ip}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \left\{ e_{ijk} e_{plm} E_{m,jl}(\boldsymbol{y}) - k^2 E_i(\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y = 0 \tag{3}$$

ここに，e_{ijk} は交代記号，$\Gamma_{ip}(\boldsymbol{x})$ は 3 次元 Maxwell 方程式の基本解であり，

$$\Gamma_{ip}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta_{ip} G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_p} G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4}$$

と表すことができる．k は $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ で表される波数，δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり，$G(\boldsymbol{x})$ は 3 次元 Helmholz 方程式の基本解で，以下の式で表される.

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}|} \tag{5}$$

また，式 (3) において重複して現れる添字については，Einstein の総和の規約をとることとする．電場 $\boldsymbol{E}$ は，$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$，及び G を用いて，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) =& \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{x}) - \int_{\Gamma} \left[\nabla_x G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}) \right. \\ &\left. - i\omega\mu \left(G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{k^2}\nabla_x\nabla_x G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y}) \right) \right] \mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

とかける．ここに ∇_x は $\boldsymbol{x}$ に関する偏微分，$\boldsymbol{x} \in \Omega_{\mathrm{e}}$ である．次に $\boldsymbol{x} \in \Omega_e$ を Γ 上に極限移行し，法線 $\boldsymbol{n}$ との外積をとると，以下の積分方程式が得られる.

$$\begin{aligned}-\frac{\boldsymbol{m}}{2}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{n} \times \mathrm{p.f} \int_{\Gamma} \Big\{ \nabla_x G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}) \\ -i\omega\mu \left(G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{k^2}\nabla_x\nabla_x G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y}) \right) \Big\} \mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

ここに，p.f は発散積分の有限部分を指す．以下では，特に断りのない限り p.f は省略する．また，境界条件より $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}) = 0$，$\boldsymbol{x} \in \Gamma$ であるので，最終的に以下の電界型積分方程式 (EFIE) が得られる.

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{x}) = \\ &\quad i\omega\mu\boldsymbol{n} \times \int_{\Gamma} \left(G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{k^2}\nabla_x\nabla_x G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y}) \right) \mathrm{d}S_y\end{aligned} \tag{6}$$

3. 不連続ガラーキン法

本節では，不連続ガラーキン法を用いて式 (6) を離散化する．基底には不連続な区分線形基底を用いて解を構成する．

3.1. 準備

まず，gap の定義を行う．対象領域を要素分割した場合，要素が共有する辺上において gap を定義することができる．Fig. 2 のような辺 e を共有する 2 つの三角形要素 K^+, K^- を考える．それぞれ 2 つの要素 K^+, K^- 内において，十分に滑らかなベクトル関数 $\boldsymbol{\tau}^+, \boldsymbol{\tau}^-$ が定義されているとする．ここで K^+, K^- が共有する辺 e に対して gap $[\![\boldsymbol{\tau}_e]\!]$ を以下で定義する.

$$[\![\boldsymbol{\tau}_e]\!] := \boldsymbol{\tau}_e^+ \cdot \boldsymbol{\nu}^+ + \boldsymbol{\tau}_e^- \cdot \boldsymbol{\nu}^-$$

ここに，ν^+, ν^- はそれぞれ K^+, K^- 面内における e 上の外

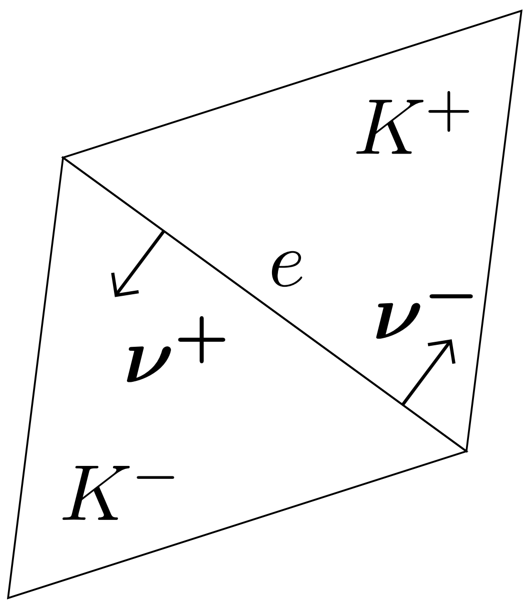

Fig. 2　Definition of gap

向き法線ベクトル，$\boldsymbol{\tau}_e^{\pm}$ は以下の式で定義される．

$$\boldsymbol{\tau}_e^{\pm}(\boldsymbol{x}) := \lim_{\vec{\xi}\in K^{\pm}\to\boldsymbol{x}\in e} \boldsymbol{\tau}^{\pm}(\boldsymbol{\xi})$$

次に，Γ 上の接ベクトルの H_{div} 内積を以下のように定義する．

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{H_{\mathrm{div}(\Gamma)}} := (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{L_T^2(\Gamma)} + c(\mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{u}, \mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{v})_{L^2(\Gamma)} \tag{7}$$

ここに，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{L_T^2(\Gamma)}$ は接ベクトルに対する L^2 内積，c は正の定数である．また，div_Γ は surface divergence を表し，$\mathrm{div}_\Gamma \boldsymbol{t} := -(\nabla\times(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}))\cdot\boldsymbol{n}$ で定義される．

H_{div} 内積に関するその他の事項については Niino 等 (5) を参照されたい．

3.2. 離散化

本論文では，以下のような区分線形基底 (Fig. 3) を用いて解を展開してから，離散化を行う．

$$\boldsymbol{t}_{ip}(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)\cdot\nu_i}{h_i}\boldsymbol{e}_p \quad (i=1,2,3, p=1,2) \tag{8}$$

ここに，ν_i は頂点 $\boldsymbol{x}_i$ の対辺に対する内向き単位法線ベクトル，h_i は頂点 $\boldsymbol{x}_i$ 頂点から対辺に下ろした垂線の長さ，$j\equiv i+1 \pmod 3$，$\boldsymbol{e}_p$ は Γ_e 面内での標準基底である．Peng 等 (2)

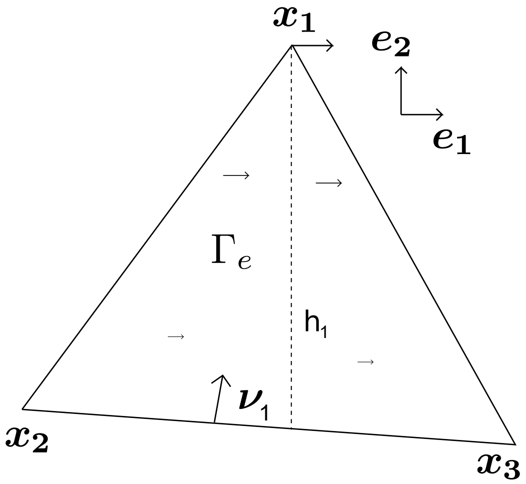

Fig. 3　Basis function $\boldsymbol{t}_{11}(\boldsymbol{x})$

の方法がいわば RWG (Raviart-Thomas) 基底の不連続版であるのに対し，提案する方法はいわゆる Brezzi-Douglas-Marini (BDM) 基底 (6) の不連続版を与えることに注意する．この基底を導入した動機は 2 つあり，一つは自由度の増加による精度の向上である．もう一つは，H_{div} 内積を使用した離散化への適用の容易さである．実際，RWG 基底を未知数の離散化とテスト関数の双方に用いた場合，H_{div} 内積を用いた離散化は悪条件方程式に帰着することが知られている．その理由は RWG 基底で表現可能なベクトルの方向が限定的であるためであり，テスト関数に BC 基底を用いる等の対策が必要である (5)．一方，提案する基底は，要素内で 1 次式で表せる任意の接ベクトル場を張ることができるので，離散化された積分方程式の悪条件化を防ぐことができると考えられる．

式 (6) の両辺に法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と基底関数 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ の外積 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}$ をテスト関数としてかけ，内積を取ることで，離散化を行う．ここでは内積として L_T^2 内積を特殊ケースとして含む H_{div} 内積を使用して定式化を行う．

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}, i\omega\mu\boldsymbol{n}\times\int_\Gamma\{G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{1}{k^2}\nabla_x\nabla_x G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y})dS_y)_{H_{\mathrm{div}}}$$
$$=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J},\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\times\boldsymbol{n})_{H_{\mathrm{div}}}$$

すなわち

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J},\boldsymbol{n}\times\int_\Gamma\{G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{1}{k^2}\nabla_x\nabla_x G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y})dS_y)_{L_T^2(\Gamma)}$$
$$+c(\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}),\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n}\times i\omega\mu\int_\Gamma G\boldsymbol{j}+\frac{1}{k^2}\nabla_x\nabla_x G\boldsymbol{j}dS_y))_{L_T^2(\Gamma)}$$
$$=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J},\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\times\boldsymbol{n})_{L_T^2(\Gamma)}+c(\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}),\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\times\boldsymbol{n}))_{L^2(\Gamma)}$$

が得られる．左辺の第 1 項目は

$$\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{J}\cdot\int_\Gamma G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{y})dS_y dS_x-\frac{1}{k^2}\int_{\Gamma_e}\mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{J}\int_\Gamma G\,\mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{j}dS_y dS_x$$
$$+\frac{1}{k^2}\int_{\partial\Gamma_e}(\int_\Gamma G\,\mathrm{div}_\Gamma dS_y)\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\nu}dS_x$$

となる．ここに，Γ_e は $\boldsymbol{J}$ の台である三角形要素である．次に左辺第 2 項目は

$$c(\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J}),\boldsymbol{n}\cdot i\omega\mu\int_\Gamma\nabla_x G\times\boldsymbol{j}dS_y)_{L_T^2(\Gamma)}$$
$$=ci\omega\mu\int_{\Gamma_e}\mathrm{curl}_\Gamma\boldsymbol{J}\int_\Gamma\boldsymbol{n}\cdot(\nabla_x G\times\boldsymbol{j})dS_y dS_x$$

となる．同様に右辺についても式変形すると，

$$i\omega\mu\Bigg(\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{J}\cdot\int_\Gamma G\boldsymbol{j}dS_y dS_x-\frac{1}{k^2}\int_{\Gamma_e}\mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{J}\int_\Gamma G\,\mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{j}dS_y dS_x$$
$$+\frac{1}{k^2}\int_{\partial\Gamma_e}\{\int_\Gamma G\,\mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{j}dS_y\}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\nu}dS_x$$
$$+c\int_{\Gamma_e}\mathrm{curl}_\Gamma\boldsymbol{J}\int_\Gamma\boldsymbol{n}\cdot(\nabla G\times\boldsymbol{j})dS_y dS_x\Bigg)$$
$$=\int_\Gamma(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J})(\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\times\boldsymbol{n})dS_x-ci\omega\mu\int_\Gamma\mathrm{curl}_\Gamma\boldsymbol{J}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}dS_x$$

が得られ，この式に解析解 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{exact}}$ を代入すると 0 になるようなペナルティ項を加えると，DG 法の方程式

$$i\omega\mu\Bigg(\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{J}\cdot\int_\Gamma G\boldsymbol{j}dS_y dS_x-\frac{1}{k^2}\int_{\Gamma_e}\mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{J}\int_\Gamma G\,\mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{j}dS_y dS_x$$

$$+\frac{1}{k^2}\int_{\partial\Gamma_e}\{\int_\Gamma G\,\mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{j}dS_y\}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\nu}dS_x$$

$$+c\int_{\Gamma_e}\mathrm{curl}_\Gamma\boldsymbol{J}\int_\Gamma\boldsymbol{n}\cdot(\nabla G\times\boldsymbol{j})dS_y dS_x\Bigg)$$

$$-\frac{\alpha_{\mathrm{stab}}}{h}\int_{\partial\Gamma_e}(\boldsymbol{J}\cdot\nu)[\![\boldsymbol{j}]\!]dS_x$$

$$=\int_\Gamma(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{J})(\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\times\boldsymbol{n})dS_x-ci\omega\mu\int_\Gamma\mathrm{curl}_\Gamma\boldsymbol{J}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}dS_x$$

が得られる．ここに，α_{stab} は正の定数である．なお，$\boldsymbol{j}$ の接線成分は，RWG や BDM と同様に不連続である．

4. 数値計算例

$\epsilon = 1,\ \mu = 1$ とする．領域 Ω を原点中心の単位球とし，その領域に平面波を入射したときの解を求めた．提案手法の精度を通常のガラーキン法と比較して検証する．以下のようなケースについて Mie 級数から得られた解との相対 L^2 誤差を計算した．

- case A: パラメーター $\alpha_{\mathrm{stab}} = 0, c = 1$
- case B: パラメーター $\alpha_{\mathrm{stab}} = 1, c = 0$
- case C: パラメーター $\alpha_{\mathrm{stab}} = 1, c = 1$
- case D: パラメーター $\alpha_{\mathrm{stab}} = 1, c = \frac{1}{\omega^2}$
- case E: 通常のガラーキン法

なお $c = \frac{1}{\omega^2}$ は文献 [5] で用いられた値である．メッシュは 320 の三角形要素を使用し，不連続ガラーキン法では 1920 自由度，通常のガラーキン法では 480 自由度である．線型方程式の解法には直接法を用いた．なお，case B～ D で $\alpha_{\mathrm{stab}} = 1$ とした根拠は，$\omega = 1$，$c = 0$ の場合に，$\alpha_{\mathrm{stab}} = 0.5, 2$ に対しても Table 1 と同様の計算を行った結果，相対誤差がそれぞれ 2.03×10^{-2}, 1.75×10^{-2} となったことによる．

Table 1 より，α_{stab} を 0 とした case A では相対誤差が非常に大きくなり，ペナルティ項の導入が重要であることがわかる．また，不連続ガラーキン法 (B，C，D) の相対誤差は通常のガラーキン法 (E) のそれより小さいことが分かり，精度が悪化する非常に小さい ω の場合を除いて提案する手法は有効であることが結論される．また，不連続ガラーキン法を用いると，通常のガラーキン法とは異なり，H_{div} 内積を用いた定式化でも双対基底を使用する必要がないことが確認できる．

なお，$\omega = 10^{-6}$ のとき，通常のガラーキン法での解 (case E) と Mie 級数の解との相対誤差を見ると，低周波破綻が起きていることがわかる．しかし，不連続ガラーキン法と H_{div} 内積を用いた定式化でも十分な精度の向上は実現できていない．この原因は次のように理解することができる: メッシュ分割における三角形の数を S とすると，辺の数は $3S/2$ となる．低周波破綻を起こす H_{div} の元は，辺での法線成分の不連続量 (各辺上で 2 個の条件を与える) と三角形での div_Γ(全体で $S-1$ 自由度) が 0 になることから $2S+1$ 自由度あるが，これを決定するために使われる重み curl_Γ (H_{div} 内積における付加的なテスト項の重み) は S 自由度あり (テスト関数にはペナルティ項は付かないことに注意)，提案する方法は低周波において，残りの $S+1$ 自由度を決定することが困難であると考えられる．実際，$\omega = 10^{-6}$ の Case D の係数行列についてその固有値を求めたところ，絶対値の非常に小さいものが $S+1$ 個あることを確認できた．

5. 結論

本論文では，電界型積分方程式において，区分的に線形な基底を用いた不連続ガラーキン法の定式化を行った．この方法は自由度が多いことを反映して，α_{stab} を適切に選べば従来のガラーキン法より高精度の結果を与えることを示した．

Table 1　Relative error in cases A–E

case	$\omega = 1$	$\omega = 10^{-1}$	$\omega = 10^{-2}$	$\omega = 10^{-6}$
A	1.70	12	118	1.47E+006
B	1.75E-002	1.11E-002	1.09E-002	1.29E-001
C	3.05E-002	3.48E-002	3.49E-002	1.25E-001
D	3.05E-002	3.51E-002	3.52E-002	2.25E-001
E	6.28E-002	6.27E-002	6.31E-002	1.00

また，この基底関数と H_{div} 内積を用いた不連続ガラーキン法の定式化を行い，通常のガラーキン法では必要となる双対基底を要しないことを確かめた．しかし，提案法では低周波破綻を回避することはできなかった．

今後の課題として，低周波破綻を起こさない不連続ガラーキン法の開発をあげることができる．その際，基底関数や，テスト関数の見直しが有力な手段であると考えることができる．また，角のある境界や，不均一な散乱体 (誘電体を含む) による散乱問題への適用も検討したい．

参考文献

(1) S.M. Rao, D.R. Wilton and A.W. Glisson, Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 30, pp.409–418, 1982

(2) F. Brezzi, L.D. Marini, A quick tutorial on DG methods for elliptic problems, in: X. Feng, O. Karakashian, Y. Xing, *Recent developments in discontinuous Galerkin finite element methods for partial differential equations*, Springer, 2014

(3) Z. Peng, K.Lim, J. Lee, A discontinuous Galerkin surface integral equation method for electromagnetic wave scattering from nonpenetrable targets, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol.61, pp.3617–3628, 2013

(4) 小倉 啓輔, 電界型積分方程式における不連続 Galerkin 法の適用に関する基礎的研究, 京都大学 修士論文 2015

(5) K. Niino, S. Akagi, N. Nishimura, A discretisation method with the H_{div} inner product for electric field integral equations, IEEE Transactions on antennas and propagation, vol. 65, pp.3102–3113, 2017

(6) F. Brezzi, J. Douglas Jr., L.D. Marini, Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems, Numerische Mathematik, vol.47, pp.217–235, 1985