

Calderón の前処理を用いた

3次元 Laplace 方程式に対する境界積分方程式の離散化について

On a discretisation of a BIE for the Laplace equation in 3D with Calderón's preconditioning

新納 和樹¹⁾, 大塚 悠貴²⁾, 西村 直志³⁾

Kazuki NIINO, Yuki OTSUKA and Naoshi NISHIMURA

- 1) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: niino@i.kyoto-u.ac.jp)
 2) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: otsuka@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
 3) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)

A Galerkin discretisation method for a boundary integral equation (BIE) with Calderón's preconditioning is discussed. Calderón's preconditioning is known as one of the effective preconditioning for the boundary element method (BEM). In discretisation of the boundary integral equation with Calderón's preconditioning, non-standard basis functions such as piecewise linear functions defined on barycentric elements are necessary since multiplication of two pseudo-differential operators with different orders has to be calculated in Calderón's preconditioning. In order to avoid the use of the barycentric elements, a new discretisation of the Calderón-preconditioned BIE is proposed in this paper. In this method, the integral operators are discretised with piecewise constant and the Rao-Wilton-Glisson basis functions by transforming the two pseudo-differential operators with different orders into ones with the same orders with the help of integral by parts. The proposed method are compared with conventional methods through some numerical examples.

Key Words: Calderón's preconditioning, Galerkin method, Laplace's equation

1. 序論

近年境界要素法の前処理として, Calderón の前処理⁽¹⁾を始めとする積分作用素や微分作用素の性質を利用した前処理の研究が盛んに行われている. これらの前処理では, 一般に悪条件であることが知られている作用素に対して, 滑らかさの異なる積分作用素や微分作用素を乗ずることで, 作用素の積がコンパクト作用素を除いて有界となるようにすることで前処理を行う. この前処理法で得られた作用素の満たす式から前処理行列を構成するためには, 滑らかさの異なる二つの作用素をそれぞれ離散化し, 得られた二つの行列の積を計算する必要がある. 滑らかさの異なる作用素はそれぞれ異なる滑らかさの基底 (例えば区分一定要素と区分線形要素など) で離散化するのが自然であるが, 一方でそれらの行列の積を計算する必要があるため, 行列のサイズは同じでなければならない. この条件を満たす離散化法として, 重心要素と呼ばれる重心分割を行ったメッシュを用いることで, 滑らかさが

異なるが数が等しい2種類の基底を構成する方法が知られている⁽²⁾が, メッシュの分割が必要であるため計算量が増大する問題がある.

そこで本稿では Laplace 方程式に対する境界要素法における前処理を例にとり, 部分積分を用いることで上記の問題を解決した離散化法を提案する. Laplace 方程式の Dirichlet 問題に対する境界要素法では, Calderón の前処理を用いると, 一重層ポテンシャルと二重層ポテンシャルの法線微分の積を計算する必要がある. 本稿で提案する離散化法では, これら二つの積分作用素をそのまま離散化するのではなく, 部分積分を用いて二重層ポテンシャルの法線微分に含まれる微分を一重層ポテンシャルに移すことで, 同程度の滑らかさを持つ作用素の積に変換してから, それぞれの作用素を離散化する. 本稿の数値例で示す通り, Laplace 方程式においては, 提案手法が既存の手法と比較して大幅に優位な結果を示すことはなかったが, この既存手法が応用できない Maxwell 方程式に対しても, 本論文で提案するアイデアは応用可能である^(3, 4).

2018 年 9 月 18 日受付, 2018 年 10 月 19 日受理

[†]Dedicated to the memory of Prof. Kobayashi

本論文は以下のように構成される．まず2節で3次元 Laplace 方程式に対する境界要素法の定式化について述べ、3節で、Calderon の前処理で用いる基本的な式と従来の離散化について述べる．次に4節で本論文で提案する部分積分を用いた Calderon の前処理について記述する．5で数値例を示し、最後に6節で結論と今後の課題について述べる．

2. 定式化

本節では3次元における Laplace 方程式を支配方程式とする境界値問題とこの問題に対する境界要素法の定式化を行う．

2.1. 対象とする問題

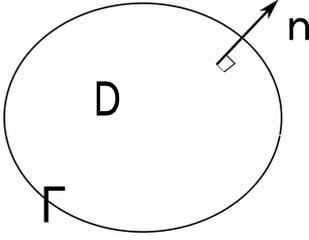


Fig. 1 A domain in 3D.

本論文では簡単のため、Fig. 1 のような滑らかな境界 Γ を持つ領域 $D \in \mathbb{R}^3$ における Laplace 問題を考える．領域 D 内で、関数 u は Laplace 方程式

$$\Delta u = 0$$

を満たし、境界 Γ 上で

$$u = g$$

を満たす Dirichlet 問題を考える．ここに g は Γ 上で定義された滑らかな関数である．

2.2. 境界要素法

上記の問題に対応する境界積分方程式は

$$\begin{aligned} Sg &= \frac{1}{2}g + Dg \\ q &= \frac{\partial u}{\partial n} \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられる⁽⁵⁾．ただし、 S, D はそれぞれ一重層ポテンシャル、二重層ポテンシャルと呼ばれ、

$$Sv = \int_{\Gamma} G(x, y)v(y)dS_y \quad (2)$$

$$Dv = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} v(y)dS_y \quad (3)$$

で定義される積分要素である．また G は3次元 Laplace 方程式の基本解であり、

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}$$

と表される．

2.3. 境界積分方程式の離散化

本論文では、積分方程式の離散化に Galerkin 法を用いる．境界を三角形メッシュを用いて離散化し、三角形要素の数を

N_e とする．境界積分方程式 (1) を Galerkin 法で離散化すると、

$$S^{(0,0)}q = \frac{1}{2}T^{(0,0)}g + D^{(0,0)}g \quad (4)$$

と書ける．ここに、 $S, D, T^{(0,0)}$ はその (i, j) 要素が

$$S_{ij}^{(0,0)} = \int_{\Gamma} t_i^{(0)}(x) \int_{\Gamma} G(x, y)t_j^{(0)}(y)dS_y dS_x$$

$$D_{ij}^{(0,0)} = \int_{\Gamma} t_i^{(0)}(x) \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} t_j^{(0)}(y)dS_y dS_x$$

$$T_{ij}^{(0,0)} = \int_{\Gamma} t_i^{(0)}(x)t_j^{(0)}(x)dS_x$$

で定義される行列であり、 $t_n^{(0)}(x)$ ($n = 1, \dots, N_e$) は n 番目の三角形要素で定義される区分一定基底である．また関数 q や g を区分一定基底で展開した際の係数を並べたベクトルを、同じ記号 q や g で表している．また以下同様に、本論文を通して行列 X の (i, j) 要素を X_{ij} で表す．

3. 前処理

本節では式 (1) を反復法で解く際に用いる前処理について述べる．

3.1. Calderón の公式

以下のように積分作用素 $\mathcal{N}, \mathcal{D}^*$ を

$$\mathcal{N}v = \oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} v(y)dS_y \quad (5)$$

$$\mathcal{D}^*v = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} v(y)dS_y \quad (6)$$

とすると、積分作用素 (2), (3), (5), (6) は Calderón の式と呼ばれる以下の式を満たすことが知られている．

$$S\mathcal{N} = -\frac{1}{4}\mathcal{I} + D\mathcal{D} \quad (7)$$

$$\mathcal{N}S = -\frac{1}{4}\mathcal{I} + \mathcal{D}^*\mathcal{D}^* \quad (8)$$

ただし、 \mathcal{I} は単位作用素である． $\mathcal{D}, \mathcal{D}^*$ はコンパクト作用素であるため $S\mathcal{N}$ 及び $\mathcal{N}S$ は良条件であることがわかる．

3.2. 作用素の積の離散化

Calderón の式に基づく前処理には作用素 S と \mathcal{N} の積が必要となるため、ここで作用素の積の Galerkin 法による離散化について述べる．

ある ϕ, ψ が存在し、 $\psi = S\phi$ を満たすとする．ある基底 t_i を用いて、 ϕ, ψ を $\phi(x) \simeq \sum_{j=1}^N \phi_j t_j(x), \psi(x) \simeq \sum_{j=1}^N \psi_j t_j(x)$ と展開できるとすると、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N S_{ij} \phi_j &= \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} t_i(x) \int_{\Gamma} G(x, y)t_j(y)dS_y dS_x \cdot \phi_j \\ &= \int_{\Gamma} t_i(x) \int_{\Gamma} G(x, y) \sum_{j=1}^N \phi_j t_j(y)dS_y dS_x \\ &\simeq \int_{\Gamma} t_i(x) \int_{\Gamma} G(x, y)\phi(y)dS_y dS_x \\ &= \int_{\Gamma} t_i(x)\psi(x)dS_x \\ &\simeq \int_{\Gamma} t_i(x) \sum_{j=1}^N \psi_j t_j(x)dS_x \\ &= \sum_{j=1}^N \psi_j T_{ij} \end{aligned}$$

となる。ただし,

$$T_{ij} := \int_{\Gamma} t_i(x)t_j(x)dS_x$$

である。よって

$$\sum_{j=1}^N T_{ij}\psi_j \simeq \sum_{j=1}^N S_{ij}\phi_j$$

と表すことができるので,

$$\psi \simeq T^{-1}S\phi$$

という関係が導かれる。したがって, 式 (7) の Calderón の式を一種類の基底 t のみを用いて Galerkin 法で離散化すると

$$T^{-1}ST^{-1}N = -\frac{1}{4}I + T^{-1}DT^{-1}D$$

が得られる。

3.3. Calderón の式に基づく前処理における従来の離散化法

本小節では, 従来の Galerkin 法を用いた際の Calderón の式に基づく前処理と本論文で提案する手法の違いを述べる。

従来手法では, 一重層ポテンシャル S は区分一定基底, 超特異積分作用素 \mathcal{N} は区分線形基底を用いて離散化していた。これは, S はなめらかであるから区分一定基底を用いて離散化するのが自然である一方, \mathcal{N} はその特異性の高さから区分一定基底で離散化することができないためである。よって離散化した S と \mathcal{N} の行列サイズを揃えるために, \mathcal{N} の離散化に区分線形基底と同じなめらかさで, かつ区分一定基底と同じ自由度の基底を用いていた。この基底は以下の様に構成される。まず区分一定基底を定義した三角形メッシュの各三角形を各辺の中線を用いて 6 分割 (重心分割) する。このメッシュは重心要素と呼ばれ, この上での区分線形基底の適当な線形結合によって元のメッシュ上での区分一定基底と同数の線形基底を構成する⁽⁶⁾。そのためこの基底を用いて \mathcal{N} を離散化した行列の計算は, この分割メッシュ上で行われるため, S を離散化した行列の数倍程度の計算時間が必要となることが知られている。

本論文では分割メッシュを用いない Calderón の前処理について二つの手法について詳述する。一つ目の方法は 3.4 節において述べる, 区分線形基底のみを用いて S, \mathcal{N} の両方を離散化する方法である。これは Niino and Nishimura⁽⁷⁾ で Helmholtz 方程式に対して用いられた離散化法とほぼ同じ方法である。次に 4 節において, 本稿における提案手法として, 部分積分を用いて \mathcal{N} の微分を S に移動した上で, 区分一定基底と Rao-Wilton-Glisson (RWG) 基底⁽⁸⁾を用いて左前処理を行う方法について述べる

3.4. 区分線形基底を用いた Calderón の式に基づく前処理

式 (1) の右前処理は

$$S\mathcal{N}\tilde{q} = \frac{1}{2}g + \mathcal{D}g \quad (9)$$

$$q = \mathcal{N}\tilde{q} \quad (10)$$

と書ける。式 (9) を全て区分線形基底で離散化し, 解 q が区分一定基底の線形結合として得られるように式 (10) を離散化すると,

$$S^{(1,1)}T^{(1,1)-1}N^{(1,1)}T^{(1,1)-1}\tilde{q} = \frac{1}{2}g + D^{(1,1)}g \quad (11)$$

$$q = T^{(0,0)-1}N^{(0,1)}T^{(1,1)-1}\tilde{q}$$

と書ける。ただし, $t^{(0)}$ を区分一定基底, $t^{(1)}$ を区分線形基底として,

$$S_{ij}^{(1,1)} = \int_{\Gamma} t_i^{(1)}(x) \int_{\Gamma} G(x, y)t_j^{(1)}(y)dS_y dS_x$$

$$D_{ij}^{(1,1)} = \int_{\Gamma} t_i^{(1)}(x) \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} t_j^{(1)}(y)dS_y dS_x$$

$$N_{ij}^{(1,1)} = \int_{\Gamma} t_i^{(1)}(x) \oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} t_j^{(1)}(y)dS_y dS_x$$

$$N_{ij}^{(0,1)} = \int_{\Gamma} t_i^{(0)}(x) \oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} t_j^{(1)}(y)dS_y dS_x$$

$$T_{ij}^{(1,1)} = \int_{\Gamma} t_i^{(1)}(x)t_j^{(1)}(x)dS_x$$

$$T_{ij}^{(0,0)} = \int_{\Gamma} t_i^{(0)}(x)t_j^{(0)}(x)dS_x$$

である。

4. 部分積分を用いた Calderón の式に基づく前処理

本節では部分積分を用いた離散化法について述べる。

4.1. 離散化

式 (1) の左前処理は

$$\mathcal{N}Sg = \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}g + \mathcal{D}g\right) \quad (12)$$

と書ける。本論文では式 (12) の左辺を変形することで, 3.3 節で述べた問題を解決する。

まず, 関係式

$$e_{ijk}e_{ipq}n_j^x n_p^y \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial x_q} = n_p^x n_p^y \frac{\partial}{\partial y_q} \frac{\partial}{\partial x_q} - n_q^x n_p^y \frac{\partial}{\partial y_p} \frac{\partial}{\partial x_q}$$

より, $x \neq y$ とすると $\frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}$ は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} \\ &= n_p^x n_p^y \frac{\partial}{\partial y_q} \frac{\partial}{\partial x_q} G(x, y) - e_{ijk}e_{ipq}n_j^x n_p^y \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial x_q} G(x, y) \\ &= -n_p^x n_p^y \Delta_x G(x, y) - e_{ijk}n_j^x \frac{\partial}{\partial y_k} e_{ipq}n_p^y \frac{\partial}{\partial x_q} G(x, y) \\ &= -e_{ijk}n_j^x \frac{\partial}{\partial x_k} e_{ipq}n_p^y \frac{\partial}{\partial y_q} G(x, y) \end{aligned}$$

と書ける。ここに e_{ijk} は 3 階の交代記号である。また, これ以後も含めて重複する添字に対しては総和規約をとるものとする。これを用いると, $\mathcal{N}S$ は,

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}Sv \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(x, y)\{Sv\}(y)dS_y \\ &= - \int_{\Gamma} e_{ijk}n_j^x \frac{\partial}{\partial x_k} e_{ipq}n_p^y \frac{\partial}{\partial y_q} G(x, y)\{Sv\}(y)dS_y \\ &= \int_{\Gamma} e_{ijk}n_j^x \frac{\partial}{\partial x_k} G(x, y) \left\{ e_{ipq}n_p^y \frac{\partial}{\partial y_q} Sv \right\}(y)dS_y \\ &= \tilde{\mathcal{D}}^1 \tilde{\mathcal{D}}^2 v \end{aligned}$$

と書ける．ここに， \tilde{D}^1, \tilde{D}^2 は

$$\begin{aligned}\tilde{D}^1 v &= \int_{\Gamma} e_{ijk} n_j^x \frac{\partial}{\partial x_k} G(x, y) v_i(y) dS_y \\ \tilde{D}^2 v &= \int_{\Gamma} e_{ijk} n_j^x \frac{\partial}{\partial x_k} G(x, y) v(y) dS_y\end{aligned}$$

である． \tilde{D}^1 はベクトル値関数をスカラー値関数に写す写像

$$\tilde{D}^1 : H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

である一方， \tilde{D}^2 は，スカラー値関数をベクトル値関数に写す写像

$$\tilde{D}^2 : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

であることに注意する． \tilde{D}^1, \tilde{D}^2 を用いると，式 (12) は

$$\tilde{D}^1 \tilde{D}^2 q = \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}g + Dg\right)$$

と書ける．上式を， $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ が区分一定基底で，また $H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ に属する項が RWG 基底で展開できるように離散化すると

$$\begin{aligned}T^{(0,0)^{-1}} \tilde{D}^{1(0,3)} T^{(3,3)^{-1}} \tilde{D}^{2(3,0)} q \\ = T^{(0,0)^{-1}} N^{(0,1)} T^{(1,1)^{-1}} \left(\frac{1}{2}g + D^{(1,1)}g\right)\end{aligned}\quad (13)$$

となる．ただし， $t^{(0)}$ を区分一定基底， $t^{(3)}$ を RWG 基底として，

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{ij}^{1(3,0)} &= \int_{\Gamma} n^x \times t_i^{(3)}(x) \int_{\Gamma} n^x \times \nabla G(x, y) t_j^{(0)}(y) dS_y dS_x \\ \tilde{D}_{ij}^{2(0,3)} &= \int_{\Gamma} t_i^{(0)}(x) \int_{\Gamma} n^x \times \nabla G(x, y) \cdot \left(n^y \times t_j^{(3)}(y)\right) dS_y dS_x \\ T_{ij}^{(3,3)} &= \int_{\Gamma} t_i^{(3)}(x) t_j^{(3)}(x) dS_x\end{aligned}$$

である．

なお本節の前処理を右前処理で実装する場合，反復法で解くべき線型方程式の係数行列は同様に計算できるが，最後に反復法で得られた解から q に対応するベクトルを求める際に 3.3 節で述べたような重心要素上での基底が必要となる．重心要素を用いた行列を一度しか計算しなくてよいため，右前処理も一考に値する方法であるが，本項では簡単のため重心要素を一度も用いる必要が無い左前処理についてのみ述べた．

4.1.1. \mathcal{N} が非正則であることの問題の解決

Laplace 問題では \mathcal{N} が非正則であり零固有値を一つ持つため，上の左前処理で精度が悪化する可能性がある． \mathcal{N} のその他の固有値が全て正であることに注意すると，前処理に用いる作用素として \mathcal{N} の代わりに $\mathcal{N} + c\mathcal{I}$ を用いることで，この零固有値を回避できることがわかる．Calderón の式 (8) より

$$(\mathcal{N} + c\mathcal{I})S = -\frac{1}{4}\mathcal{I} + D^*D^* + cS$$

となり， S, D^* がコンパクト作用素であることから $(\mathcal{N} + c\mathcal{I})S$ は良条件となることが期待される．またパラメータ c を適切

に設定することで， \mathcal{N} の他の固有値を 0 に近づけることなく，零固有値を大きさ c 程度にすることができる．これを用いると，式 (12) は

$$(\tilde{D}^1 \tilde{D}^2 + cS)q = \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}g + Dg\right) + c\left(\frac{1}{2}g + Dg\right)$$

となる．上式を離散化すると

$$\begin{aligned}(T^{(0,0)^{-1}} \tilde{D}^{1(0,3)} T^{(3,3)^{-1}} \tilde{D}^{2(3,0)} + cS^{(0,0)})q \\ = T^{(0,0)^{-1}} N^{(0,1)} T^{(1,1)^{-1}} \left(\frac{1}{2}g + D^{(1,1)}g\right) \\ + c\left(\frac{1}{2}g + D^{(0,0)}g\right)\end{aligned}\quad (14)$$

を得る．

ただし，これは Laplace 方程式でのみ起こる問題であり Maxwell 方程式や Helmholtz 方程式に本節の前処理を応用する際には，上記で行った式変形を行う必要がないことに注意しておく．

5. 数値計算結果

本研究では，以下の 4 種類の解法について数値計算を行い，精度，反復解法の反復回数，固有値分布の比較を行った．

approach 1 式 (4) の様に前処理なしで GMRES で解く解法

approach 2 式 (11) の様に右前処理を行なって GMRES で解く解法

approach 3 式 (13) の様に左前処理を行なって GMRES で解く解法

approach 4 式 (14) の様に左前処理を行なって GMRES で解く解法

ただし approach 4 においては， h をメッシュの三角形の代表辺の長さとして， $c = \frac{0.1}{h}$ とした．反復法は全てリスタート無しの GMRES であり，許容誤差は 10^{-6} である．また，Calderón の式に基づく前処理における $T^{(0,0)}$ ， $T^{(1,1)}$ ， $T^{(3,3)}$ の逆行列の計算には実装を容易にするために直接法を用いた．

5.1. 精度の確認

まず解析解が求められる問題を数値的に解くことで，数値解法の精度を確認した．原点中心，半径 0.25 の球を考える．Dirichlet 条件として $u = x_1^3 - 3x_1x_2^2$ を与えると，解析解は $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{0.25} (3x_1^3 - 9x_1x_2^2)$ となる．これを用いて数値解の精度を確認した．

Fig. 2 は誤差

$$q_{\text{err}} = \frac{\|q_{\text{cal}} - q_{\text{ana}}\|_2}{\|q_{\text{ana}}\|_2}\quad (15)$$

の値を三角形メッシュの要素数 N_e に対して，手法別にグラフにしたものである．ただし， q_{cal} はそれぞれの数値解法で線型方程式を解いて得られた解ベクトル， q_{ana} はそれぞれの数値解法での未知関数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ の内挿関数を用いて，解析解 $\frac{\partial u}{\partial n}$ を展開した際の係数を並べたベクトル， $\|\cdot\|_2$ はベクトルの 2-ノルムである．Fig. 2 からわかるようにどの手法においても，ある程度の精度が得られ，メッシュの分割数を細かくすると精度が良くなっていくことがわかる．前処理ごとに多少

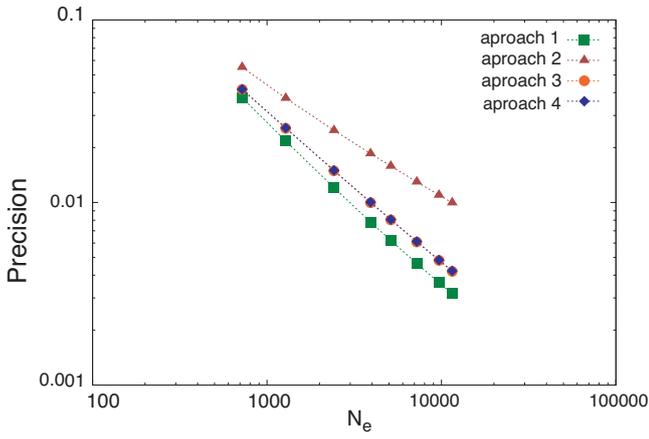


Fig. 2 Accuracy of the four approaches.

精度が異なるが、この原因としてそれぞれの前処理における基底関数の違いが挙げられる。また右前処理と比較し、左前処理では場合によって精度が悪化することがあり、これが原因である可能性もある。特に解 $\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ を区分線形基底で展開している approach 2 では、他の方法と比べてやや精度が悪化している。

5.2. 反復回数の確認

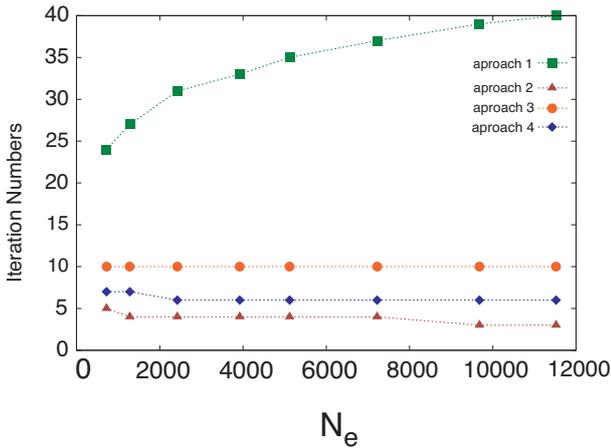


Fig. 3 Iteration numbers of the four approaches.

前小節と同様の問題を考える。様々な数の三角形要素に対して数値解析を行い、反復法の反復回数を解法別にまとめたグラフが Fig. 3 である。Fig. 3 からわかるように approach 1 で前処理を行わなかった場合は三角形要素の数を大きくするに従って反復回数が多くなるため、大規模な問題には向かないことがわかる。一方 approach 2,3,4 は三角形要素の数を大きくしても、反復回数は一定であることがわかる。

5.3. 固有値分布の確認

前小節で見た、各手法の反復回数の振る舞いを詳しく調べるために行列の固有値計算を行った。前小節と同様の問題で、三角形要素数 3920 のメッシュを対象とした際の各手法の係数行列の固有値分布は Figs. 4,5,6,7 のようになった。S の固有値 (approach 1) は、いくつかの固有値を除いてほとんどの固有値が 0 周辺に集まるが、他の方法では N の非正則性に起因

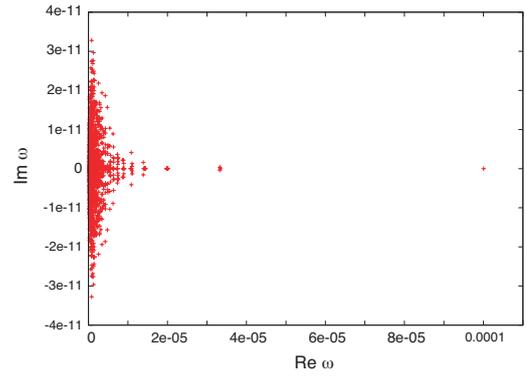


Fig. 4 Eigenvalues of the coefficient matrix in approach 1.

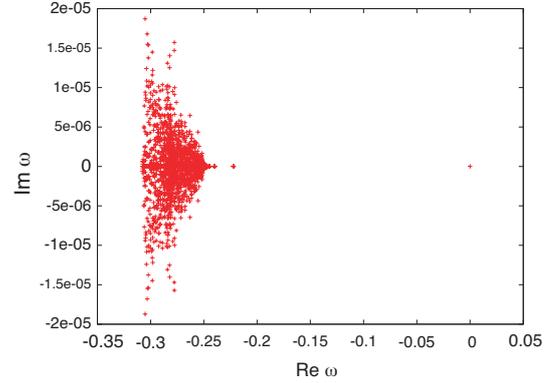


Fig. 5 Eigenvalues of the coefficient matrix in approach 2.

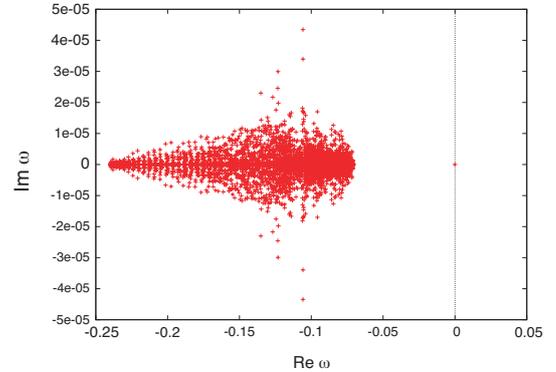


Fig. 6 Eigenvalues of the coefficient matrix in approach 3.

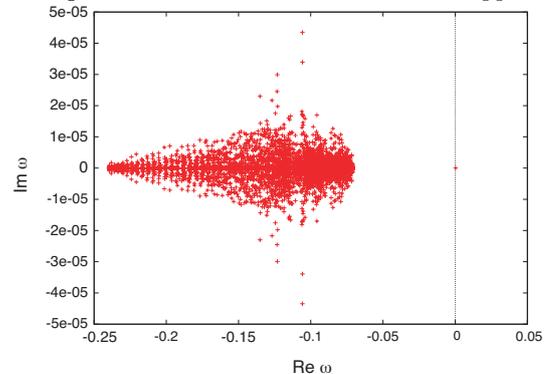


Fig. 7 Eigenvalues of the coefficient matrix in approach 4.

する一つの零付近の固有値を除いて、全ての固有値が零から離れていることが分かる。また Fig. 7 (approach 4) と Fig. 6 (approach 3) では、どちらも原点上に一つの固有値があるように見えるが、これらの固有値の絶対値は、Fig. 7 (approach 4) では 5.00849×10^{-7} である一方、Fig. 6 (approach 3) では 7.92386×10^{-13} である。よって、approach 4 は approach 3 の条件数を改善することができたと言える。

6. 結論

本論文では、Laplace 方程式における Calderón の前処理の分割メッシュを用いない離散化法について考察を行った。本論文では数値例を通した比較を行わなかったが、提案手法 (approach 3, 4) では重心分割を必要としないため、重心分割を用いた離散化法と比べて、計算時間の短縮や実装の簡略化が期待される。また数値例を通して、提案手法と approach 2 との間には、提案手法の方がやや精度が良いことを除き、それほど大きな差は見られなかったが、未知数がベクトル値関数になることから approach 2 に相当する離散化が行えない Maxwell 方程式に対しても提案手法と同様のアイデアを応用することができる。

今後の課題として本手法と従来法との計算時間の比較を行うことが挙げられる。反復法における一回の反復で計算する行列のうち、 $T^{(0,0)}$ や $T^{(1,1)}$ などの基底関数からなる Gram 行列は疎行列であるので、その逆行列の計算にも大きな時間はかからず、積分作用素を離散化して得られる行列の計算が計算時間全体において支配的である。したがって本論文で提案した前処理を、特に大規模な問題で実用するためには、高速多重極法などの高速解法が必須であり、これを実装し、種々の従来法との計算時間の比較を行うことが重要であると考える。

また本手法を Maxwell 方程式や Helmholtz 方程式に応用すること、より複雑な領域形状を持つ問題における本手法の効果を検討することも今後の課題として挙げられる。

参考文献

- (1) O. Steinbach and W.L. Wendland. The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method. *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 9, No. 1, pp. 191–216, 1998.
- (2) A. Buffa and S.H. Christiansen. A dual finite element complex on the barycentric refinement. *Mathematics of Computation*, Vol. 76, pp. 1743–1769, 2007.
- (3) H. Contopanagos, B. Dembart, M. Epton, J.J. Ottusch, V. Rokhlin, J.L. Visher, and S.M. Wandzura. Well-conditioned boundary integral equations for three-dimensional electromagnetic scattering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 50, No. 12, pp. 1824–1830, 2002.
- (4) Robert J Adams. Physical and analytical properties of a stabilized electric field integral equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 52, No. 2, pp. 362–372, 2004.
- (5) 小林昭一, 福井卓雄, 北原道弘, 西村直志, 廣瀬壮一. 波動解析と境界要素法,(2000).
- (6) Olaf Steinbach. On a generalized l_2 projection and some related stability estimates in sobolev spaces. *Numerische Mathematik*, Vol. 90, No. 4, pp. 775–786, 2002.
- (7) K. Niino and N. Nishimura. Preconditioning based on Calderon’s formulae for periodic fast multipole methods for Helmholtz’ equation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, No. 19, pp. 66–81, 2011.
- (8) S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 30, No. 3, pp. 409–418, 1982.