

格子ボルツマン法による曲面境界を有する熱流動解析

LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR THERMAL FLOWS WITH CURVED BOUNDARY

瀬田 剛¹⁾

Takeshi SETA

1) 富山大学大学院理工学研究部 (工学) (〒930-8555 富山市五福 3190, E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp)

In this study, we examine the validity of the double-population thermal lattice Boltzmann method for calculating hydrodynamics with curved boundary in a wide range of Prandtl number. The multiple-relaxation time collision models are applied to solve the Navier-Stokes and energy equations for the Prandtl number ($0.01 \leq \text{Pr} \leq 0.71$). We proposed the interpolated bounce back scheme using the quadratic polynomial interpolation for the curved-boundary walls at constant temperature. In the numerical investigations including the channel flows, the cylindrical Couette flows, and natural convection, the numerical results of streamlines, isotherms show good agreement with those of the previous studies or the existing theoretical work. We found that the three dimensional flows do not affect the bifurcation phenomena, but interact with the periodic oscillatory flow in natural convection.

Key Words: Lattice Boltzmann Method, Interpolated Bounce Back Scheme, Multiple-Relaxation Time, Low Prandtl Number Fluids, Natural Convection

1. はじめに

自然対流は、家庭用オープンからヒートパイプなどの産業機械や、自然現象等様々な場面で観測される現象である。Benard と Rayleigh によるベナール・セルの研究以来、自然対流の線形安定性の理論やモード変化に関する研究がされてきたが、近年、数値解析を用いた自然対流不安定性解析の研究も行われている⁽¹⁾。例えば、シリコン単結晶を均一に成長させることを目的とし、水平円筒管を回転させた場合の自然対流の Bifurcation 現象が、スペクトル法により詳細に検証されている⁽²⁾。格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, LBM) は、独立した分布関数の運動により流体挙動が再現され、圧力に関するポアソン方程式を解く必要がないため、並列効率に優れ、高速計算に適している⁽³⁾。LBM によって自然対流における不安定現象を解析するためには、低プラントル数の設定の問題と、曲面境界条件の設定の問題とを解決する必要がある。LBM において、粘性係数 ν と温度拡散率 χ は緩和時間で決定される。そのため、プラントル数が小さい場合 ($\text{Pr} = 0.01$)、 $\text{Pr} = \nu/\chi$ の関係から、 χ が大きくなり、温度の跳びが発生しないように、 ν を小さく設定する必要がある。 ν が小さい場合の数値的安定性を向上させるためには、分布関数を速度モーメントに線形変換する多緩和

時間 (Multiple-Relaxation Time, MRT) 衝突モデルが有効である⁽⁴⁾。一方、LBM により任意形状の境界を適切に設定するためには、埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method, IBM)⁽⁵⁾ や Interpolated bounce back scheme (IPBB)^(6, 7) の適用が有効である。本論文では、温度に対する Dirichlet 境界条件の設定が可能で、2 次の補間関数に基づく IPBB を提案する。MRT 衝突則を適用した LBM の自然対流不安定性解析に対する有効性を検証することが目的である。チャンネル内熱流動解析等のベンチマーク問題を用い、LBM の計算精度を検証した後、 $\text{Pr} = 0.3$ における二重円筒管内自然対流解析や、 $\text{Pr} = 0.01$ の正方容器内自然対流解析を実施する。

2. 計算手法

非圧縮性流体に対する連続の式、NS 方程式、温度方程式、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \chi \nabla^2 T, \quad (3)$$

を解析する。ここで p は圧力、 ν は動粘性係数、 χ は温度拡散率を表す。式 (1)-(3) に対応する LBM の発展方程式は、

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta_t, t + \delta_t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) + \Omega_\alpha^f(\mathbf{x}, t) + \delta_t F_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

$$g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta_t, t + \delta_t) = g_\alpha(\mathbf{x}, t) + \Omega_\alpha^g(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

2018 年 9 月 13 日受付, 2018 年 10 月 25 日受理

†Dedicated to the memory of Prof. Kobayashi

で記述される。 f_α , g_α は、離散速度 \mathbf{c}_α に対応した粒子速度分布関数であり、流体の密度 ρ , 流速 \mathbf{u} , 流体の温度 T は、

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_\alpha f_\alpha \mathbf{c}_\alpha, \quad T = \sum_\alpha g_\alpha, \quad (6)$$

により定義される。数値的安定性の問題から MRT 衝突則、

$$\Omega_\alpha^f(\mathbf{x}, t) = -[\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}^f(\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t))]_\alpha, \quad (7)$$

$$\Omega_\alpha^g(\mathbf{x}, t) = -[\mathbf{N}^{-1} \mathbf{S}^g(\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{n}^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t))]_\alpha, \quad (8)$$

を用いる。モーメント \mathbf{m} , \mathbf{n} は、 $\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{f}$, $\mathbf{n} = \mathbf{N}\mathbf{g}$ によって与えられ、平衡成分は、 $\mathbf{m}^{\text{eq}} = \mathbf{M}\mathbf{f}^{\text{eq}}$, $\mathbf{n}^{\text{eq}} = \mathbf{N}\mathbf{g}^{\text{eq}}$ によって与えられる。 \mathbf{S}^f , \mathbf{S}^g は、緩和時間によって定義される行列である。 \mathbf{f} , \mathbf{g} は、 f_α , g_α の各離散速度方向に対する分布関数をベクトル表記したものであり、例えば、D2Q5 モデルに対し、 $\mathbf{g} = {}^t[g_0, g_1, g_2, g_3, g_4]$ となる。

D2Q9 モデルと D3Q19 モデルに対する \mathbf{M} , \mathbf{S}^f , D2Q5 モデル, D2Q9 モデル, D3Q7 モデルに対する \mathbf{N} , \mathbf{S}^g は、文献 (4, 8, 9) の値を用いる。平衡分布関数 f_α^{eq} は、

$$f_\alpha^{\text{eq}} = \omega_\alpha^f \rho \left[1 + \frac{3\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2} \right], \quad (9)$$

で定義される。重み係数は、D2Q9 モデルに対し、 $\omega_0^f = \frac{4}{9}$, $\omega_{1-4}^f = \frac{1}{9}$, $\omega_{5-8}^f = \frac{1}{36}$, D3Q19 モデルに対し、 $\omega_0^f = \frac{1}{3}$, $\omega_{1-6}^f = \frac{1}{18}$, $\omega_{7-18}^f = \frac{1}{36}$ である。平衡分布関数 g_α^{eq} は、D2Q5 モデルに対し、

$$g_\alpha^{\text{eq}} = \omega_\alpha^g T \left[1 + \frac{3\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right], \quad \omega_0^g = \frac{1}{3}, \quad \omega_{1-4}^g = \frac{1}{6}, \quad (10)$$

D2Q9 モデルに対し、

$$g_\alpha^{\text{eq}} = \omega_\alpha^g T \left[1 + \frac{3\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2} \right], \quad (11)$$

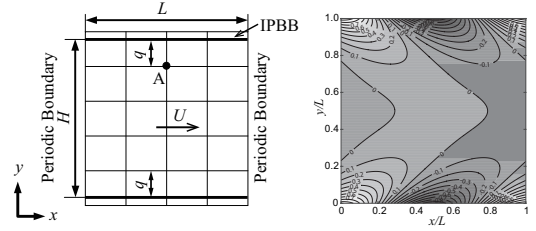
$\omega_0^g = \frac{4}{9}$, $\omega_{1-4}^g = \frac{1}{9}$, $\omega_{5-8}^g = \frac{1}{36}$, D3Q7 モデルに対し、

$$g_\alpha^{\text{eq}} = \omega_\alpha^g T \left[1 + \frac{4\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right], \quad \omega_0^g = \frac{1}{4}, \quad \omega_{1-6}^g = \frac{1}{8}, \quad (12)$$

である。式 (4) の外力項は $F_\alpha = \frac{3\omega_\alpha^f \rho \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{F}}{c^2}$ で与えられる。浮力は、ブジネスク近似 $\mathbf{F} = \beta G(T - T_m)\mathbf{j}$ により与える。 β は体積膨張率、 G は重力加速度の大きさ、 \mathbf{j} は重力加速度の向きと逆向きの単位ベクトル、 T_m は基準温度を表し、 $T_m = 0.5$ とした。レイリー数 $\text{Ra} = (\beta G L^3 \Delta T) / (\nu \chi)$ から、 $\beta G = (\text{Ra} \nu \chi) / (L^3 \Delta T)$ となる。 L は代表長さ、高温壁と低温壁との温度差 $\Delta T = 1$ である。

圧力は $p = c^2 \rho / 3$ で与え、 ρ , u , T 等変数の無次元化は文献 (10) に従う。任意形状の固体壁を設定するため、IPBB を用いる。IPBB では、Fig. 1(a) に示すように、固体壁近傍の格子点 A から $q(0 < q < 1)$ 離れた位置に固体壁を設定する。 f_α と反対方向に進む分布関数 $f_{\bar{\alpha}}$ を使い、壁面の流速 \mathbf{u}_w を次式により設定する (6)。

$$\begin{aligned} f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}, t + \delta t) &= q(1 + 2q)f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) \\ &+ (1 - 4q^2)f_\alpha(\mathbf{x}, t) - q(1 - 2q)f_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) \\ &- 6\omega_\alpha^f(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}_w), \quad (q \leq 0.5), \end{aligned} \quad (13)$$



(a) schematic diagram

(b) isotherm contour

Fig. 1 Isotherm contour as calculated by using the IPBBs in 2D channel flows.

$$\begin{aligned} f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}, t + \delta t) &= \frac{1}{q(2q + 1)} f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) \\ &+ \frac{2q - 1}{q} f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) - \frac{2q - 1}{2q + 1} f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x} - 2\mathbf{c}_\alpha \delta t, t) \\ &- \frac{6\omega_\alpha^f(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u}_w)}{q(2q + 1)}, \quad (q > 0.5). \end{aligned} \quad (14)$$

Li は、漸近解析 (Asymptotic analysis) を使い、壁の温度 T_w に対する Dirichlet 境界条件を次式により設定した (7)。

$$\begin{aligned} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}, t + \delta t) &= 2(q - 1)g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) - \frac{(2q - 1)^2}{(2q + 1)} g_\alpha(\mathbf{x}, t) \\ &+ \frac{2(2q - 1)}{(2q + 1)} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) + \frac{2(3 - 2q)\omega_\alpha^g T_w}{(2q + 1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

また、Halfway Bounce Back Scheme (HBB),

$$g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}, t + \delta t) = -g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) + 2\omega_\alpha^g T_w, \quad (16)$$

に基づき、1次の線形補間を用いれば、温度の Dirichlet 境界に対する IPBB が定義できる。

$$\begin{aligned} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}, t + \delta t) &= -2qg_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) \\ &+ (2q - 1)g_\alpha(\mathbf{x}, t) + 2\omega_\alpha^g T_w, \quad (q \leq 0.5), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}, t + \delta t) &= -\frac{1}{2q} g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) \\ &+ \left(1 - \frac{1}{2q}\right) g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) + \frac{\omega_\alpha^g T_w}{q}, \quad (q > 0.5). \end{aligned} \quad (18)$$

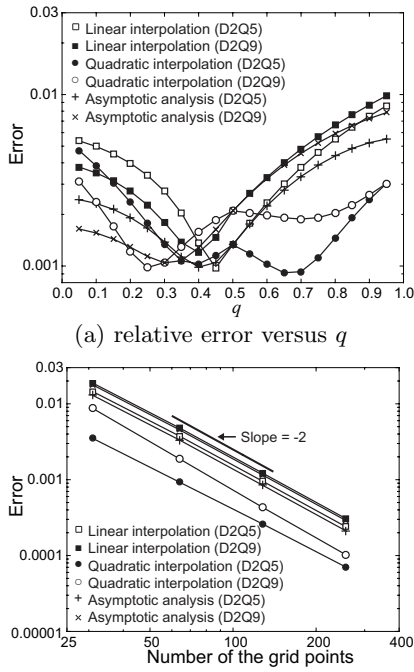
本論文では、2次の補間関数を用いた IPBB を提案する。

$$\begin{aligned} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}, t + \delta t) &= -q(1 + 2q)g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) \\ &- (1 - 4q^2)g_\alpha(\mathbf{x}, t) + q(1 - 2q)g_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) \\ &+ 2\omega_\alpha^g T_w, \quad (q \leq 0.5), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}, t + \delta t) &= -\frac{1}{q(2q + 1)} g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) \\ &+ \frac{2q - 1}{q} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) - \frac{2q - 1}{2q + 1} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x} - 2\mathbf{c}_\alpha \delta t, t) \\ &+ \frac{2\omega_\alpha^g T_w}{q(2q + 1)}, \quad (q > 0.5). \end{aligned} \quad (20)$$

温度の勾配 (∇T_w) に対するノイマン境界条件は、漸近解析に基づき、次式で与えられる (7)。

$$\begin{aligned} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}, t + \delta t) &= g_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) - \left(\frac{2q - 1}{2q + 1}\right) g_\alpha(\mathbf{x}, t) \\ &+ \left(\frac{2q - 1}{2q + 1}\right) g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_\alpha \delta t, t) + \left(\frac{2\chi}{2q + 1}\right) \frac{\delta t}{\delta x} (\mathbf{c}_\alpha \cdot \nabla T_w). \end{aligned} \quad (21)$$



(b) relative error versus number of the grid points

Fig. 2 Relative errors in 2D channel flows.

3. 計算結果

3.1. 2D Channel flow

Fig. 1(a)のように、長さ L 、高さ H のチャンネルの上下壁に、

$$T(x, y = 0) = T(x, y = H) = \cos(\kappa x), \quad (22)$$

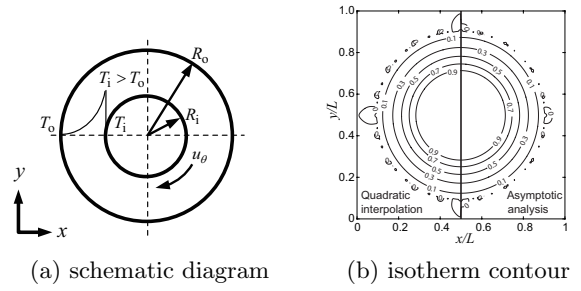
の境界条件を設定した場合、厳密解は、

$$\hat{T}(x, y) = \text{Real} \left[e^{i\kappa x} \frac{(1 - e^{-\lambda y})e^{\lambda y} - (1 - e^{\lambda y})e^{-\lambda y}}{e^{\lambda H} - e^{-\lambda H}} \right], \quad (23)$$

で与えられる。ここで、 $\kappa = 2\pi/L$ 、 $\lambda = \kappa \sqrt{1 + \frac{iU}{\kappa\chi}}$ 、 $i = \sqrt{-1}$ であり、Real は実部を表す。流入流出境界には、周期的境界条件を設定する。 U は x 軸方向の流入速度であり、 $U = \text{Pe}\chi/H$ で与える。ペクレ数は $\text{Pe} = 20$ とする。格子点数 256×257 、 $\tau_g = 0.65$ 、 $q = 0.7$ とし、式 (20) の 2 次の IPBB により計算した温度分布を Fig. 1(b) に示す。誤差を、

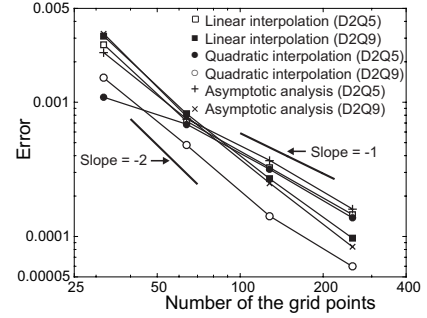
$$E = \left(\frac{\sum_{x,y} (T - \hat{T})^2}{\sum_{x,y} \hat{T}^2} \right)^{1/2}, \quad (24)$$

で定義し、格子点数を $= 64 \times 65$ とした場合の、誤差と q との関係を図 2(a) に示す。式 (18) の 1 次の IPBB は '□'、'■' で、式 (20) の 2 次の IPBB は '●'、'○' で、式 (15) の漸近解析に基づくスキーム⁽⁷⁾ は '+'、'x' で計算結果を示す。 $q = 0.5$ の場合、全手法とも、HBB に一致するため、誤差が等しくなる。2 次の IPBB は、D2Q5、D2Q9 モデルに関係なく 1 次の IPBB より明らかに精度が高く、また、漸近解析に基づく手法で観察されたような $q > 0.5$ における精度の低下も起きない。式 (24) で定義された誤差と、 x 軸方向の格子点数 L との関係を図 2(b) に示す。漸近展開に基づく手法の空間勾配は、D2Q5 モデル、D2Q9 モデルに対し、それぞれ、1.9791、1.8302 となり、Li によって指摘された通り、D2Q5 モデルの方が精度が高くなった⁽⁷⁾。一方、1 次の IPBB、2 次の



(a) schematic diagram

(b) isotherm contour



(c) relative error versus number of the grid points

Fig. 3 Numerical solutions of cylindrical Couette flows.

IPBB の空間勾配は、D2Q5 モデルに対し、それぞれ、1.9743、1.9790、D2Q9 モデルに対し、それぞれ、1.9781、2.1222 である。IPBB では、D2Q9 モデルの方が精度が高い。平行平板間問題に対し、全手法とも、空間 2 次精度を有しているが、2 次の IPBB (D2Q9) が最も精度が高かった。

3.2. Cylindrical Couette flows

Fig. 3(a) に示す二重円筒管内の 2 次元熱伝導問題を用い、曲面に対する本 LBM の計算精度を検証する。周期境界条件で囲まれた格子点数 L^2 の計算領域に対し内円の半径は $R_i = 0.2L$ 、外円の半径は $R_o = 0.4L$ 、内円の温度は $T_i = 1$ 、外円の温度は $T_o = 0$ 、緩和時間は $\tau_g = 0.65$ とする。外円は静止し、内円は角速度 $u_\theta = 0.01$ で回転している。 $\chi = 5.0$ とする。Pr = 0.01 であり、Pe = $0.002R_i$ である。Fig. 3(b) に示された 2 次の IPBB と漸近解析に基づく手法⁽⁷⁾ によって計算された温度分布は、厳密解 \hat{T} 、

$$\hat{T}(R) = \frac{T_o \log(R/R_i) - T_i \log(R/R_o)}{\log(R_o/R_i)}, \quad (25)$$

と良く一致している。Fig. 3(c) に、式 (24) で定義された誤差と計算領域の一边の格子点数 L との関係を示す。1 次の IPBB、漸近解析に基づく手法⁽⁷⁾、2 次の IPBB の空間勾配は、D2Q5 モデルに対し、それぞれ、1.1472、1.0236、1.1149、D2Q9 モデルに対し、それぞれ、1.6069、1.6494、1.7523 である。境界形状が円筒のため、格子点位置により q の値が異なる。Fig. 1(a) に示されるように、誤差は q に依存するため、式 (24) において、様々な $(T - \hat{T})^2$ の値を用い、誤差が計算される。 q が一定である Fig. 1(b) の精度と比較し、格子点位置により q が変化する本問題では、精度が低くなる。曲面を有する計算領域に対し、全ての手法とも、D2Q5 モデルでは空間 1 次精度であるが、D2Q9 モデルを用いれば、空間精度が向上している。以上の検証結果に基づき、以下の計算では、最も精度が高い 2 次の IPBB (D2Q9) を用いる。

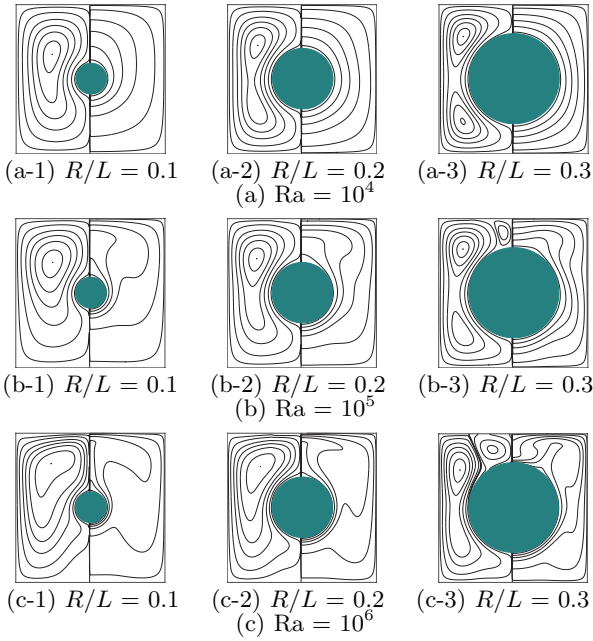


Fig. 4 Streamlines and isotherm contours for different values of R/L at $Ra = 10^4$, $Ra = 10^5$, and $Ra = 10^6$. Streamlines and isotherm contours are shown on the left- and right-hand sides, respectively.

3.3. Natural convection around a circular cylinder inside a square enclosure

円柱周りの自然対流解析を行い、ヌセルト数、最大流れ関数、流速分布、温度分布について検証する。温度 $T_o = 0$ の正方形の領域の中心に温度 $T_i = 1$ の円柱を置く。格子点数は 202×202 とし、正方キャビティは HBB により、円柱は 2 次の IPBB により設定する。プラントル数を $Pr = 0.71$ とし、レイリー数 Ra と、計算領域の幅 L と半径 R との比 R/L を変化させた場合の温度分布と流速分布を Fig.4 に示す。緩和時間を $\tau_f = 0.6$ とし、動粘性係数 ν を求めた後、 $\chi = \nu/Pr$ から温度拡散率を求め、緩和時間を $\tau_g = 3\chi + 0.5$ から導出する。本計算により得られた流れ関数および温度分布は、参照解^(11, 12)と良い一致を示しており、IPBB により自然対流解析を適切に実行出来ることが明らかになった。本手法から求められた円柱上の平均ヌセルト数 \bar{Nu} と、流れ関数の最大値 ψ_{max} を、Table 1 に示す。平均ヌセルト数 \bar{Nu} は、 $\bar{Nu} = -\frac{Q}{2\chi}$ によって求められる⁽⁷⁾。円柱表面上の全熱フラックス Q は、 $Q = \sum_{\mathbf{x} \in \text{Solid}} \sum_{\bar{\alpha} \neq 0} \Phi_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x})$ により計算される。 $\sum_{\mathbf{x} \in \text{Solid}}$ は、境界内部の点における総和を表す。ここで、 $\Phi_{\bar{\alpha}} = \chi \mathbf{c}_{\alpha} \cdot \nabla T_w$ であるが、 $\Phi_{\bar{\alpha}}$ は、式 (20) と式 (21) の差から求められる。

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{\alpha}} = & -\frac{(2q+1)(2q^2+q+1)}{2} g_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_{\alpha} \delta_t, t) \\ & + (2q-1)(2q^2+2q+1) g_{\alpha}(\mathbf{x}, t) \\ & - \frac{q(2q+1)(2q-1)}{2} g_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_{\alpha} \delta_t, t) \\ & - \frac{(2q-1)}{2} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_{\alpha} \delta_t, t) \\ & + (2q+1) \omega_{\alpha}^g T_w, \quad (q \leq 0.5), \end{aligned} \quad (26)$$

Table 1 Surface-averaged Nusselt number and maximum absolute value of stream function.

Ra	R/L	Present	SIMPLE ⁽¹¹⁾	DQM ⁽¹²⁾	
10^4	0.1	\bar{Nu}	2.067	2.071	2.08
		ψ_{max}	1.773	1.73	1.71
	0.2	\bar{Nu}	3.224	3.331	3.24
		ψ_{max}	1.002	1.02	0.97
	0.3	\bar{Nu}	5.373	5.826	5.40
		ψ_{max}	0.497	0.50	0.49
10^5	0.1	\bar{Nu}	3.770	3.825	3.79
		ψ_{max}	10.11	10.15	9.93
	0.2	\bar{Nu}	4.906	5.08	4.86
		ψ_{max}	8.325	8.38	8.10
	0.3	\bar{Nu}	6.212	6.212	6.21
		ψ_{max}	5.086	5.10	5.10
10^6	0.1	\bar{Nu}	6.080	6.107	6.11
		ψ_{max}	20.64	25.35	20.98
	0.2	\bar{Nu}	8.887	9.374	8.90
		ψ_{max}	23.91	24.07	24.13
	0.3	\bar{Nu}	11.91	11.62	12.00
		ψ_{max}	20.18	21.30	20.46

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{\alpha}} = & -\frac{(2q^2+q+1)}{2q} g_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_{\alpha} \delta_t, t) \\ & + \frac{(2q-1)}{2} g_{\alpha}(\mathbf{x}, t) + \frac{(2q-1)(q+1)}{2q} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_{\alpha} \delta_t, t) \\ & - \frac{(2q-1)}{2} g_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x} - 2\mathbf{c}_{\alpha} \delta_t, t) + \frac{\omega_{\alpha}^g T_w}{q}, \quad (q > 0.5). \end{aligned} \quad (27)$$

本計算から得られた \bar{Nu} と ψ_{max} は、参照解^(11, 12)と良い一致を示すことが、Table 1 から分かる。

3.4. Natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders

格子点数 138×138 の計算領域内に半径 $64\delta_x$ と $32\delta_x$ の 2 つの円筒を用い、二重円筒管内自然対流解析を行う。内円、外円とも静止しており、内円の温度は $T = 1$ 、外円の温度は $T = 0$ である。プラントル数が $Pr = 0.3$ の場合、レイリー数が $Ra = 3,250$ 以上になると、二種類の定常解が現れる Bifurcation 現象が発生することが明らかにされている⁽¹³⁾。 $Ra = 10,000$ において、左右に 2 対の渦が生じる場合と、左右に 1 対の渦が生じる場合の流れ関数分布と温度分布とを、Fig. 5(a), (b) に、それぞれ、示す。ここで、各図の左側が流れ関数分布であり、右側が温度分布である。補助的な矢印で示すように、円柱上部の流れが下向きになることから、Fig. 5(a) の状態を downward flow と呼び、Fig. 5(b) の状態を upward flow と呼ぶ⁽¹³⁾。これら 2 種類の定常解は、初期条件に依存する。upward flow の定常解は、1,000 程度 Ra 数が低い時の upward flow の定常解を初期条件として用い、 Ra 数を 1,000 から増加させて得た。downward flow の定常解は、1,000 程度 Ra 数が高い時の downward flow の定常解を初期条件として用い、 Ra 数を 15,000 から減少させて得た。初速度を 0 とした場合、 $Ra = 1,000$ では upward flow しか発生せず、 $Ra = 15,000$ では downward flow しか発生しない。

$Nu = -\frac{Q \ln(R_o/R_i)}{2\pi\chi}$ によって定義された内円と外円の平均ヌセルト数 Nu_i , Nu_o を、それぞれ、求め、ヌセルト数の平

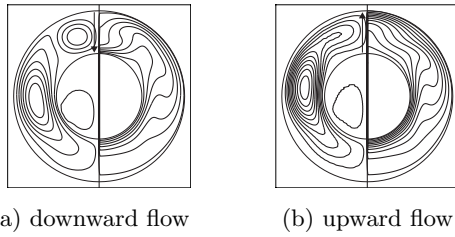
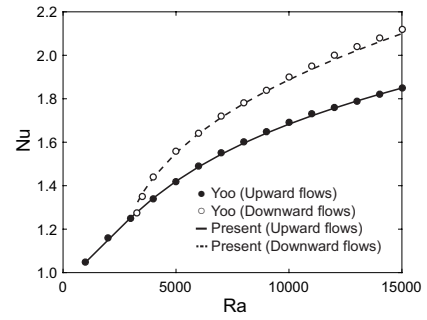


Fig. 5 Streamlines and isotherm contours of dual solutions in two dimensions for $Ra = 10^4$.

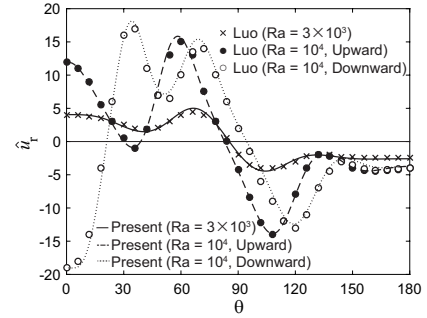
均値 $\frac{1}{2}(Nu_i + Nu_o)$ と、レイリー数との関係を Fig. 6(a) に示す。Fig. 6(a) の破線と実線で表わされる本計算結果は、‘●’、‘○’ で表わされる渦度-流れ関数法による参照解⁽¹³⁾ と良い一致を示している。Ra 数が 3,300 までは、upward flow と downward flow の両方の定常解が現れるが、Ra 数が 3,200 では、upward flow のみが現れた。これは、Yoo が得た臨界レイリー数 $Ra = 3,250$ と良く一致している。Ra = 3,000 と Ra = 10,000 における、内円と外円との中心線における半径方向の流速分布を、Fig. 6(b) に示す。ここで、内円の鉛直上向きを 0 度とし、鉛直下向きを 180 度とした。流速は $\hat{u}_r = u_r(R_o - R_i)/\chi$ によって無次元化した。実線と破線で示される本計算結果は、upward flow および downward flow とともに ‘×’、‘●’、‘○’ で示される参照解⁽¹⁴⁾ と良く一致している。なお、Fig. 6(b) の参照解は、非平衡分布関数に対する外挿法によって境界条件を設定する LBM を用いた計算結果である。3次元方向の流れによる Bifurcation 現象への影響を観察するため、 f_α に D3Q19 モデルを、 g_α に D3Q7 モデルを用いた計算結果を Fig. 7(a), (b) に示す。初期条件は 2次元解析と等しく、円柱の厚さ方向に 20 格子を設定した。円柱上部に z 軸方向に最大で 4.15×10^{-13} 程度の僅かな流れが発生しているが、2種類の定常解が現れる点は、2次元解析と同じであり、Bifurcation 現象に対する 3次元流れ方向の影響はないことが分かる。

3.5. Natural convection for low Prandtl number

2次の IPBB を用い、 $Pr = 0.01$ における正方形容器内自然対流解析を行う。代表長さは $L = 150$ とし、 $\tau_f = 0.51$ 、 $\tau_g = 1.5$ 、 $\chi = 1/3$ である。正方形領域の左側を高温壁、右側を低温壁に設定し、上下を断熱境界とする。上下壁の $\nabla T_w = 0$ の条件は、式 (21) に $q = 0.5$ を代入することで得られる HBB により設定する。Ra = 10,000 とした場合の定常解に対する温度分布と流れ関数分布を Fig. 8(a) に示す。Fig. 8(b)~(d) に、Ra = 50,000 とした場合の温度分布と流れ関数分布の時間発展を示す。メッシュレス法によって得られた参照解⁽¹⁾ と同様に、Ra = 50,000 の場合、温度と流れ関数に周期的な振動が発生する。なお、時間は $\hat{t} = t\chi/L^2$ によって無次元化した。本計算から得られた Ra = 10,000 と Ra = 50,000 に対する流れ関数の最大値は、それぞれ、4.666、7.396 であり、参照解⁽¹⁾ の 4.658、7.312 と良い一致を示している。Fig. 9(a) に高温壁の平均ヌセルト数の時間変化を示す。また、周期的な振動に対する 3次元方向の流れの影響を検証するため、 z 軸方向に 25 格子を設定した場合のヌセルト数の時間変化を



(a) Nusselt number



(b) radial velocity

Fig. 6 Nusselt number as functions of Rayleigh number, and radial velocity at the centerline of the annular gap.

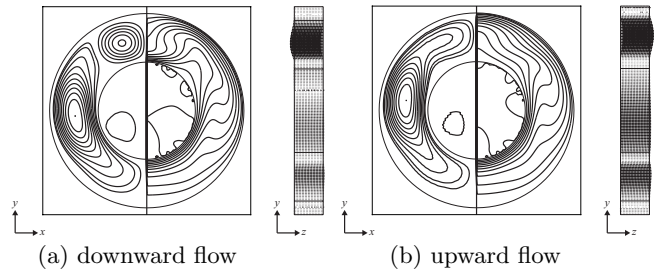


Fig. 7 Streamlines and isotherm contours of dual solutions in three dimensions for $Ra = 10^4$.

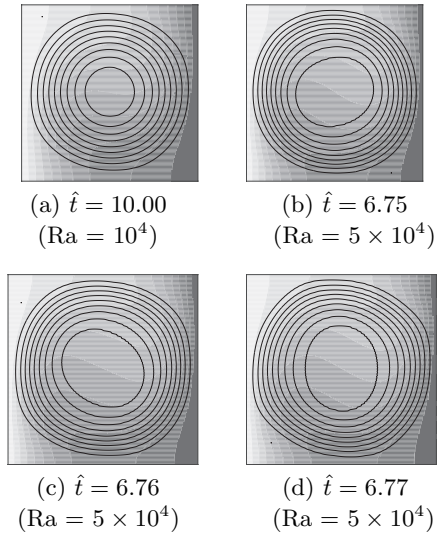


Fig. 8 Streamlines and isotherm contours for low Prandtl number, $Pr = 0.01$.

Fig. 9(b) に示す。Ra = 50,000 の時、3次元解析では、 z 軸方向の流れの乱れにより、周期的な振動は発生しないことから、2次元計算特有の振動が発生したことが明らかになった。ここで、時間 $\hat{t} = 10$ 、Ra = 50,000 における、流速の最大値は $\max(u_x) = 21.00$ 、 $\max(u_y) = 19.68$ 、 $\max(u_z) = 4.645$

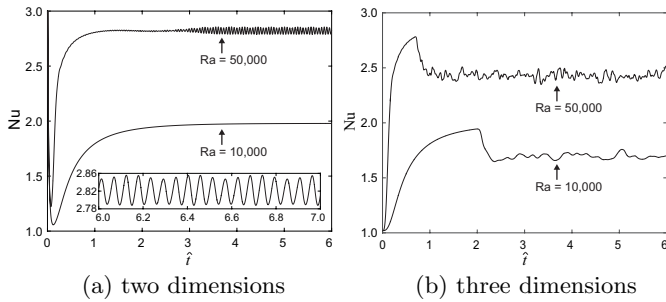


Fig. 9 Nusselt number as function of dimensionless time.

であった。流速は、 L/χ で無次元化した。壁面近傍の僅かな攪乱により、3次元方向の渦が徐々に発達し、Fig. 9(b)で観察されるヌセルト数の急激な低下が発生したと考えられる。Ra = 10,000 と Ra = 50,000 に対し、2次元解析から得られたヌセルト数は、それぞれ、1.979, 2.819 であり、参照解⁽¹⁾の1.958, 2.799 と良い一致を示している。Fig. 9(a)の Ra = 50,000 におけるヌセルト数を高速フーリエ変換したところ、固有周波数は、17.88[Hz] であり、文献⁽¹⁾の図から得られる推測値 17.82[Hz] とほぼ等しい結果が得られた。以上より、本 IPBB は低プラントル数に対する自然対流を安定に解析可能であることが明らかになった。

4. おわりに

2次の補間関数に基づく IPBB と、多緩和時間衝突則を適用することで、曲面境界が存在する低プラントル数 ($Pr = 0.01$) の自然対流解析を可能にした。平行平板間流れと二重円筒管内熱伝導問題から、2次の IPBB が、1次の IPBB より高精度であり、漸近解析に基づくスキームのような $q > 0.5$ における精度の低下が生じないことが示された。本手法を用い、円筒周り自然対流解析を行い、ヌセルト数や流れ関数の最大値が参照解と良い一致を示した。また、二重円筒管回り自然対流解析において、臨界 Ra 数を超えた場合の Bifurcation 現象の発生の再現に成功した。2次元正方形容器内自然対流解析において、レイリー数を変更すると、速度場に周期的な振動が発生し、流れ関数の最大値や、ヌセルト数、固有振動数が参考解と良い一致を示した。3次元の自然対流解析を実施し、3次元方向の流れは Bifurcation 現象に影響しないが、周期振動には強く影響することが明らかになった。2次の IPBB (D2Q9) が最も精度が高いことから、今後、D3Q15 等に対する温度方程式に対応した MRT を提案し、離散速度数による精度への影響を検証する必要がある。また、式(4)の外力項に、高精度な定義式を適用する予定である。本研究に有意義な助言をくださった金田昌之先生(大阪府立大学)に感謝する。本研究は JSPS 科研費 16K06070 の助成を受けたものである。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- (1) Kosec, G., Šarler, B.: Solution of a low Prandtl number natural convection benchmark by a local meshless method, *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, **23**(2013), pp. 189–204.
- (2) Sánchez, O., Mercader, I., Batiste, O., Alonso, A.: Natural convection in a horizontal cylinder with axial rotation, *Phys. Rev. E*, **93**(2016), pp. 1063113 (16 pages).
- (3) Chen, S., Doolen, G. D.: Lattice Boltzmann method for fluid flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**(1998), pp. 329–364.
- (4) Yoshida, H., Nagaoka, M.: Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for the convection and anisotropic diffusion equation, *J. Comput. Phys.*, **229**(2010), pp. 7774–7795.
- (5) Seta, T., Hayashi, K., Tomiyama, A.: Analytical and numerical studies of the boundary slip in the immersed boundary-thermal lattice Boltzmann method, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **86**(2018), pp. 454–490.
- (6) Lallemand, P., Luo, L.-S.: Lattice Boltzmann method for moving boundaries, *J. Comput. Phys.*, **184**(2003), pp. 406–421.
- (7) Li, L., Mei, R., Klausner, J. F.: Lattice Boltzmann models for the convection-diffusion equation: D2Q5 vs D2Q9, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **108**(2017), pp. 41–62.
- (8) Lallemand, P., Luo, L.-S.: Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability, *Phys. Rev. E*, **61**(2000), pp. 6546–6562.
- (9) d’Humières, D., Ginzburg, I., Krafczyk, M., Lallemand, P., Luo, L.-S.: Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three-dimensions, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **360**(2002), pp. 367–421.
- (10) Inamuro, T., Yoshino, M., Inoue, H., Mizuno, R., Ogino, F.: A lattice Boltzmann method for a binary miscible fluid mixture and its application to a heat-transfer problem, *J. Comput. Phys.*, **179**(2002), pp. 201–215.
- (11) Moukalled, F., Acharya, S.: Natural convection in the annulus between concentric horizontal circular and square cylinders, *J. Thermophysics Heat Tr.*, **10**(1996), pp. 524–531.
- (12) Shu, C., Zhu, Y. D.: Efficient computation of natural convection in a concentric annulus between an outer square cylinder and an inner circular cylinder, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **38**(2002), pp. 429–445.
- (13) Yoo, J.-S.: Prandtl number effect on bifurcation and dual solutions in natural convection in a horizontal annulus, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **42**(1999), pp. 3279–3290.
- (14) Luo, K, Yi, H.-L., Tan, H.-P., : Eccentricity effect on bifurcation and dual solutions in transient natural convection in a horizontal annulus, *Int. J. Therm. Sci.*, **89**(2015), pp. 283–293.