

軌道の構成部材の形状特性値および物性値の空間的ばらつきに 起因する軌道振動応答の変動量の評価

Simulation of uncertainty of dynamic response in wheel-track vibration system with spatial variation of geometric dimension or material parameter of its component members

紅露一寛¹⁾, 渡邊あゆみ²⁾, 阿部和久³⁾

Kazuhiro KORO, Ayumi WATANABE and Kazuhisa ABE

- 1) 新潟大学工学部工学科 (社会基盤工学) (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp)
2) 新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)
3) 新潟大学工学部工学科 (社会基盤工学) (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp)

The variation of sleeper-ballast force and wheel-rail contact force induced by the spatial variation of geometric dimensions or material parameters are simulated with the spectral stochastic FEM (SSFEM) using polynomial chaos (PC). The spatial variation of their dimensions or parameters is prescribed with Karhunen-Loeve expansion. The influence of the spatial variation of rail bending stiffness or ballast Young's modulus on the simulated force is investigated through numerical tests with several setting of wheel running speed. Through the numerical tests, the maximum of coefficients of variation (CV) on simulated sleeper-ballast force is comparable to the CV of rail bending stiffness or ballast Young's modulus. The standard deviation of wheel-rail contact force is increased in progression of wheel running speed.

Key Words: wheel-track vibration analysis, bending stiffness, ballast Young's modulus, spatial variation, spectral stochastic FEM(SSFEM), running speed of wheel

1. はじめに

わが国の陸上基幹交通網の一つである鉄道の軌道設計や管理を目的とした、軌道系の各種力学応答の数値解析手法が開発・活用されるようになって久しい。特に、軌道における列車走行時の動的特性の把握や、車両・軌道系の連成振動現象のメカニズムの解明を目的とした数値シミュレーションも多数試みられている^(1,2)。

ところで、軌道はレール、まくらぎ、軌道パッド、バラスト道床、路盤、路床などから構成されているが、これら軌道の構成要素には、その形状や材料の力学特性にはさまざまなばらつきが内在している。しかし、これまでの軌道振動解析のほとんどは決定論的な解析であり、構成部材の形状特性値や物性値のばらつきの影響を考慮した数値シミュレーションは少数に限られる。まくらぎ間隔のばらつきに着目した例⁽³⁾や、道床・路盤の層厚や Young 率のばらつきがレールやまくらぎの変位・加速度応答に及ぼす影響を評価した例⁽⁴⁾があるが、構造部材形状や材料物性値の空間的ばらつきを考慮した振動解析についてはほとんど試みられておらず、せん

断剛性を考慮した Kelvin foundation 上に置かれた無限長はりとして軌道系をモデル化したうえで、鉛直方向の支持剛性に空間的ばらつきを与え、それにより励起される振動応答の評価を試みた Andersen ら⁽⁵⁾の研究や、バラスト道床を動弾性波動場でモデル化し、Young 率の空間的ばらつきを考慮した車輪・軌道系の連成振動解析を試みた著者らの研究⁽⁶⁾が報告されているに過ぎない。特に、文献⁽⁶⁾では、バラスト道床の沈下現象に着目し、バラストに直接作用する力であるまくらぎ・道床間作用力の変動に対するバラスト道床の Young 率の空間的ばらつきの影響を定量的に検討している。また、レール・まくらぎ間作用力やレール・車輪接触力の変動への影響についても検討しており、特にレール・車輪接触力については、車輪の走行速度の上昇とともにその変動量(標準偏差)が大きくなることを指摘している。レール・車輪接触力の動的応答は、軌道設計時の外力として取り扱われることが多く、その応答はレールの動的応答の影響を強く受けることが予想される。そのため、レールの形状特性値や物性値に何らかの空間的ばらつきが存在する場合、そのレール・車輪接触力への影響は、レールに比べて相対的に離れた部位に敷設されているバラスト道床の物性値の空間的ばらつき以上に大

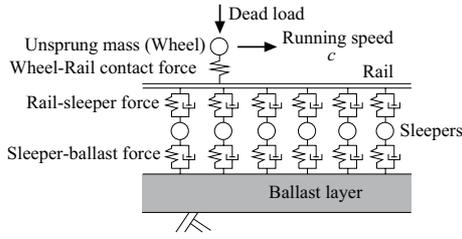


Fig.1 Wheel-track vibration model.

きくなる可能性がある。しかし、この点に関する検討はなされていない。また、軌道系の振動現象においては、車両の走行速度が軌道系の動的応答に及ぼす影響は小さくないにも関わらず、空間的ばらつきとしてレールの曲げ剛性、バラスト道床の Young 率のいずれを考慮する場合についても、走行速度の影響については未検討となっている。

そこで本研究では、軌道の構成材料の形状特性値としてレールの曲げ剛性、物性値としてバラスト道床の Young 率にそれぞれ着目し、それらの空間的ばらつきが軌道各部の作用力の動的応答の変動に及ぼす影響について検討する。レールの曲げ剛性の空間的ばらつきは断面二次モーメントに起因するものとして、スペクトル確率有限要素法⁽⁷⁾を用いて定量評価を試みる。特に、車輪の走行速度が作用力の変動に及ぼす影響について検討する。

2. 車輪・軌道系の連成振動解析モデル

本研究では、Fig.1 に示す車輪・軌道系の連成振動解析モデル⁽²⁾を用いて、レールの曲げ剛性またはバラスト道床の弾性挙動の空間的ばらつきが軌道各部の作用力の変動に及ぼす影響について検討する。なお、振動解析における時間積分は無条件安定な陰的・直接積分法⁽⁸⁾により処理する。

2.1. レール、車輪およびレール・車輪接触力のモデル化

レールは Euler ばりでモデル化し、有限要素法で離散化する。長さ L のレールが $x = a_j$ なる位置でまくらぎに離散支持され、速度 c で走行する移動集中荷重（車輪・レール接触力）が作用するものとする。このとき、レールの支配方程式は次式で与えられる。

$$\int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} dx + \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dx = \sum_{j=1}^n \delta u(x_j + ct) P_j(t) - \sum_{j=1}^N \delta u(a_j) F_{r,j}(t), \quad (1)$$

ここで、 t は時刻、 u はレール変位、 δu はその仮想成分、 E は Young 率、 ρ は質量密度、 A は断面積である。 c は走行速度である。また、 P_i はレール・車輪接触力、 $F_{r,i}$ はレール・まくらぎ間作用力であり、 n は車輪の総数、 N はまくらぎ本数である。

式 (1) を有限要素法で離散化すると、次式を得る。

$$[M]\{\ddot{\mathbf{u}}(t)\} + [K]\{\mathbf{u}(t)\} = [T(t)]\{\mathbf{P}(t)\} - [B]\{\mathbf{F}_r(t)\} \quad (2)$$

ここで、 $\{\mathbf{u}\}$ はレールの節点変位ベクトル、 $\{\mathbf{P}\}$ 、 $\{\mathbf{F}_r\}$ はそれぞれ P_i 、 $F_{r,i}$ を収納したベクトルであり、 $[T(t)]$ 、 $[B]$ はそ

れぞれ車輪位置での補間関数値からなる行列である。質量行列 $[M]$ 、剛性行列 $[K]$ は次式で定義される。

$$[K] = \int_0^L EI \{N_{,xx}^T\} \{N_{,xx}\} dx, \quad (3)$$

$$[M] = \int_0^L \rho A \{N^T\} \{N\} dx \quad (4)$$

なお、 N は補間関数を収納したベクトルである。

一方、車輪は時間依存しない上載荷重が作用する質点でモデル化し、レール・車輪接触力は線形ばねでモデル化する。 i 番目の車輪に関する運動方程式および接触力の定義式は次式で与えられる。

$$m_{w,i} \ddot{u}_{w,i} = (P_{b,i} + m_{w,i} \cdot g) - P_i \quad (5)$$

$$P_i = k_c (u_{w,i} - u_{r,i}) \quad (6)$$

ここで、 $i = 1, 2, \dots, n$ である。 $u_{w,i}$ 、 P_i 、 $m_{w,i}$ はそれぞれ i 番車輪に関する鉛直変位、レール・車輪接触力および質量である。 $P_{b,i}$ は車輪へ作用する上載荷重、 g は重力加速度であり、 $u_{r,i}$ は車輪接触位置レール変位、 k_c はレール・車輪接触ばね定数である。

2.2. レール・まくらぎ/まくらぎ・道床間作用力、およびまくらぎのモデル化

i 番まくらぎ位置におけるレール・まくらぎ間作用力 $F_{r,i}$ 、およびまくらぎ・道床間作用力 $F_{s,i}$ は、Fig.1 に示すように Voigt ユニットによりモデル化し、次式で定義される。

$$F_{r,i} = k_{r,i} (u_{spt,i} - u_{slp,i}) + \eta_{r,i} (\dot{u}_{spt,i} - \dot{u}_{slp,i}) \quad (7)$$

$$F_{s,i} = k_{s,i} (u_{slp,i} - u_{b,i}) + \eta_{s,i} (\dot{u}_{slp,i} - \dot{u}_{b,i}) \quad (8)$$

ここで、 $i = 1, 2, \dots, N$ であり、 $k_{r,i}$ 、 $\eta_{r,i}$ は軌道パッドのバネ定数、減衰係数であり、 $k_{s,i}$ 、 $\eta_{s,i}$ はまくらぎ・道床間ばねのバネ定数およびダッシュポットの減衰係数である。また、 $u_{spt,i}$ 、 $u_{slp,i}$ 、 $u_{b,i}$ はそれぞれ i 番まくらぎ位置でのレール変位、まくらぎ変位、道床上面変位である。

一方、まくらぎは質点でモデル化し、鉛直方向の運動のみを考慮する。このとき、運動方程式は $i = 1, 2, \dots, N$ として次式で与えられる。

$$m_{slp,i} \ddot{u}_{slp,i} = F_{r,i} - F_{s,i} + m_{slp,i} g \quad (9)$$

2.3. 道床上面変位のモデル化

本研究では、先行研究⁽²⁾に倣ってバラスト道床は等方・均質な連続体でモデル化し、道床内部の波動伝播の影響を考慮する。ただし、軌道振動解析ではまくらぎ直下でのバラスト道床上面変位 $u_{b,i}$ のみが必要なため、バラスト道床の動弾性応答を Green 関数法により考慮した上で、道床より上部の各部の方程式と連立して解く。このとき、 i 番まくらぎ位置におけるバラスト道床上面変位は、次式で表わすことができる。

$$u_{b,i}(t) = \sum_{j=1}^{N_s} \int_0^{t^+} F_{s,j}(\tau) G_f^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \tau) d\tau \quad (10)$$

なお、式 (10) の畳み込み積分は、実際の解析では時間変数について離散化した上で近似的に計算する。 G_f^* は時間域 Green

関数であり、数値計算によって予め計算しておき、軌道振動解析では数値データとして与えて解析を実行することとなる。

3. 構成材料の形状特性値および物性値の空間的ばらつきを考慮した軌道振動解析法

本研究では、軌道の構成材料の形状特性値および物性値の空間的ばらつきとして、レールの曲げ剛性またはバラスト道床の Young 率について考える。各々の空間的ばらつきは Karhunen-Loeve(KL) 展開で与えられるものと仮定した上で、動的応答に伝播する不確実性はスペクトル確率有限要素法 (SSFEM)⁽⁷⁾ で評価する。なお、以下では、レールの曲げ剛性とバラスト道床 Young 率のいずれかの空間的ばらつきを考慮するものとする。

3.1. レールの曲げ剛性の空間的ばらつきの評価

レールの曲げ剛性の空間的ばらつきは、断面二次モーメントの空間的ばらつきに起因するものとする。このとき、断面二次モーメントの空間的ばらつきが次の Karhunen-Loeve 展開で表現できるものとする。

$$I(x, \theta) = \bar{I}(x) + \sum_{m=1}^{N_{KL}} \xi_m(\theta) \sqrt{\lambda_{I,m}} f_{I,m}(x) \quad (11)$$

なお、 \bar{I} は I の期待値、 ξ_m は確率変数、 $\lambda_{I,m}$ 、 $f_{I,m}(x)$ は I の空間的ばらつきに関する共分散関数の固有値と固有関数であり、 N_{KL} は KL 展開の展開項数である。

(11) を (1) に代入し、 u 、 δu に有限要素近似を適用する。その結果、最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}^{(0)}]\{\mathbf{u}\} + \sum_{m=1}^{N_{KL}} \xi_m [\mathbf{K}^{(m)}]\{\mathbf{u}\} \\ = [\mathbf{T}(t)]\{\mathbf{P}\} - [\mathbf{B}]\{\mathbf{F}_r\} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、剛性行列 $[\mathbf{K}^{(0)}]$ 、 $[\mathbf{K}^{(m)}]$ は次式で定義される。

$$[\mathbf{K}^{(0)}] = \int_0^L E \bar{I} \{ \mathbf{N}_{,xx}^T \} \{ \mathbf{N}_{,xx} \} dx, \quad (13)$$

$$[\mathbf{K}^{(m)}] = \sqrt{\lambda_{I,m}} \int_0^L f_{I,m} \{ \mathbf{N}_{,xx}^T \} \{ \mathbf{N}_{,xx} \} dx \quad (14)$$

次に、式 (12) の動的応答 \mathbf{u} 、 \mathbf{P} 、 \mathbf{F}_r に対して、次の Polynomial Chaos(PC) 展開を適用する。

$$\{\mathbf{u}\} = \sum_{j=1}^{N_{PC}} \phi_j(\boldsymbol{\xi}) \{\mathbf{u}^{(j)}\}, \quad (15)$$

$$\{\mathbf{P}\} = \sum_{j=1}^{N_{PC}} \phi_j(\boldsymbol{\xi}) \{\mathbf{P}^{(j)}\}, \quad \{\mathbf{F}_r\} = \sum_{j=1}^{N_{PC}} \phi_j(\boldsymbol{\xi}) \{\mathbf{F}_r^{(j)}\}, \quad (16)$$

なお、 $\{\mathbf{u}^{(j)}\}$ 、 $\{\mathbf{P}^{(j)}\}$ 、 $\{\mathbf{F}_r^{(j)}\}$ はそれぞれ $\{\mathbf{u}\}$ 、 $\{\mathbf{P}\}$ 、 $\{\mathbf{F}_r\}$ に関する PC 展開の展開係数であり、 N_{PC} は展開項数である。

式 (13)、(14)、(15) を式 (12) に代入し、polynomial chaos $\phi_j(\boldsymbol{\xi})$ ($j = 1, 2, \dots, N_{PC}$) を重み関数とする Galerkin 法を適用する。その結果、 ϕ_j の直交性に留意して式を整理する

と、 $i = 1, 2, \dots, N_{PC}$ として次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_{PC}} \delta_{ij} [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}^{(j)}\} + \sum_{j=1}^{N_{PC}} \delta_{ij} [\mathbf{K}^{(0)}]\{\mathbf{u}^{(j)}\} \\ + \sum_{j=1}^{N_{PC}} \left[\sum_{m=1}^{N_{KL}} \langle \xi_m \phi_i \phi_j \rangle [\mathbf{K}^{(m)}] \right] \{\mathbf{u}^{(j)}\} \\ = \sum_{j=1}^{N_{PC}} \delta_{ij} [\mathbf{T}(t)]\{\mathbf{P}^{(j)}\} - \sum_{j=1}^{N_{PC}} \delta_{ij} [\mathbf{B}]\{\mathbf{F}_r^{(j)}\} \end{aligned} \quad (17)$$

なお、レールの断面二次モーメントの空間的ばらつきが存在しない場合、レールの運動方程式に SSFEM を適用すると、次の方程式を得る。

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}\} + [\mathbf{K}^{(0)}]\{\mathbf{u}^{(i)}\} = [\mathbf{T}(t)]\{\mathbf{P}^{(i)}\} - [\mathbf{B}]\{\mathbf{F}_r^{(i)}\} \quad (18)$$

ただし、 $i = 1, 2, \dots, N_{PC}$ である。

3.2. バラスト道床 Young 率の空間的ばらつきの評価

バラスト道床の Young 率の空間的ばらつきを考慮する場合、文献⁽⁶⁾で示したスペクトル確率有限要素解析法を用いて定式化する。まず、バラスト道床の Young 率 E_b を次式の Karhunen-Loeve 展開で表現できるものとする。

$$E_b(\mathbf{x}, \theta) = \bar{E}_b(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{N_{KL}} \xi_m(\theta) \sqrt{\lambda_{b,m}} f_{b,m}(\mathbf{x}) \quad (19)$$

ここで、 ξ_m は確率変数、 $\lambda_{b,m}$ 、 $f_{b,m}$ はそれぞれ E_b の共分散関数に関する固有値と固有関数である。

このとき、式 (10) で表現されるバラスト道床上面変位 $u_{b,i}$ とまくらぎ・道床間作用力 $F_{s,i}$ は、バラスト道床の Young 率の空間的ばらつきに起因する不確実性が伝播するため、いずれも確率変数 ξ_m ($m = 1, 2, \dots, N_{KL}$) の関数となる。そのため、 $u_{b,i}$ と $F_{s,i}$ を次式の PC 展開で表現し、

$$u_{b,i} = \sum_{\alpha=1}^{N_{PC}} \phi_j(\boldsymbol{\xi}) u_{b,i}^{(\alpha)}, \quad F_{s,i} = \sum_{\alpha=1}^{N_{PC}} \phi_j(\boldsymbol{\xi}) F_{s,i}^{(\alpha)} \quad (20)$$

式 (20) を式 (10) に代入し、polynomial chaos の直交性と重ね合わせの原理を用いると、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (t + \varepsilon) = t^+$ として次式を得る。

$$u_{b,i}^{(\alpha)}(t) = \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{\beta=1}^{N_{PC}} \int_0^{t^+} F_{s,j}^{(\beta)}(\tau) \tilde{G}_{f,ij,\alpha\beta}^*(t - \tau) d\tau \quad (21)$$

ここで、 $\tilde{G}_{f,ij,\alpha\beta}^*$ は、時刻 $\tau = 0$ において j 番まくらぎ位置におけるまくらぎ・道床間作用力が $F_{s,j} = \delta(0)\phi_\beta$ (δ : Dirac のデルタ関数) で与えられた時の、 i 番まくらぎ直下での道床上面鉛直変位 $u_{b,i}$ の PC 展開の第 α 項目の展開係数である。

なお、バラスト道床の Young 率の空間的ばらつきを考慮しない場合は、 $u_{b,i}$ と $F_{s,i}$ の PC 展開を適用したのち、バラスト道床内部の PC 展開各項の応答が連成しないことを考慮して、次式を得る。

$$u_{b,i}^{(\alpha)}(t) = \sum_{j=1}^{N_s} \int_0^{t^+} F_{s,j}^{(\alpha)}(\tau) \tilde{G}_{f,ij,\alpha\alpha}^*(t - \tau) d\tau \quad (22)$$

ただし、 $\alpha = 1, 2, \dots, N_{PC}$ である。

3.3. レールおよびバラスト上面変位以外の動的応答の定式化

レールの曲げ剛性またはバラスト道床 Young 率の空間的ばらつきを考慮する場合、すなわち、式 (11) または式 (19) で空間的ばらつきを表現する場合には、軌道各部の応答も確率変数 ξ_m の関数となるから、PC 展開を用いて確率空間での離散化が必要となる。

まず、車輪の運動方程式 (5) と車輪・レール間接触力の定義式 (6) に関しては、 $u_{w,i}^{(\alpha)}$, $u_{r,i}^{(\alpha)}$, $P_i^{(\alpha)}$ をそれぞれ $u_{w,i}$, $u_{r,i}$, P_i の PC 展開係数として、次式を得る。

$$m_{w,i}\ddot{u}_{w,i}^{(\alpha)} = \langle \phi_\alpha \rangle (P_{b,i} + m_{w,i}g) - P_i^{(\alpha)} \quad (23)$$

$$P_i^{(\alpha)} = k_c(u_{w,i}^{(\alpha)} - u_{r,i}^{(\alpha)}) \quad (24)$$

なお、 $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha = 1, 2, \dots, N_{PC}$ である。

レール・まくらぎ間作用力 (7), まくらぎ・道床間作用力 (8) およびまくらぎの運動方程式 (9) は、それらの PC 展開係数が次式を満たすように定められる。

$$F_{r,i}^{(\alpha)} = k_{r,i}(u_{spt,i}^{(\alpha)} - u_{slp,i}^{(\alpha)}) + \eta_{r,i}(\dot{u}_{spt,i}^{(\alpha)} - \dot{u}_{slp,i}^{(\alpha)}) \quad (25)$$

$$F_{s,i}^{(\alpha)} = k_{s,i}(u_{slp,i}^{(\alpha)} - u_{b,i}^{(\alpha)}) + \eta_{s,i}\dot{u}_{slp,i}^{(\alpha)} - \dot{u}_{b,i}^{(\alpha)} \quad (26)$$

$$m_{slp,i}\ddot{u}_{slp,i}^{(\alpha)} = F_{r,i}^{(\alpha)} - F_{s,i}^{(\alpha)} + \langle \phi_\alpha \rangle \cdot m_{slp,i}g \quad (27)$$

なお、 $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha = 1, 2, \dots, N_{PC}$ である。

4. 解析結果

軌道の構成部材の形状特性値の空間的ばらつきが軌道各部の作用力の動的応答の変動に及ぼす影響を評価し、その発現挙動を材料物性値の空間的ばらつきが存在する場合の動的応答の変動の発現傾向と比較・検討するために、実際の軌道振動解析で与えられる材料物性値の期待値を与えた上で、実測データを与えることが困難な空間的ばらつきを仮定した数値実験を行なう。構成部材の形状特性値の空間的ばらつきとしてレールの断面二次モーメントを、材料物性値の空間的ばらつきとしてバラスト道床の Young 率をそれぞれ考慮することとした。

4.1. 解析条件

車輪は 1 輪の場合を対象に、Fig.2 の領域上部の左から右へ一定速度で走行するものとし、走行速度は 10, 20, 40, 80(m/sec) の 4 ケースを今回の解析対象とした。軌道の構成部材の形状特性値と材料物性値は、Table 1 に示す通りである。なお、レールの断面二次モーメント I とバラスト道床の Young 率については、それぞれの期待値 \bar{I} , \bar{E}_b を示している。

バラスト道床は Fig.2 に示すように、厚さ 0.25(m)、軌道縦断方向長さ 7.8(m) の領域を考え、まくらぎは領域の中央にまくらぎ No.7 が配置されるように左から No.1, No.2, ... No.13 と番号を付した。

解析においては、レールの断面二次モーメント、バラスト道床の Young 率のいずれかの空間的ばらつきを考慮することとする。レールの断面二次モーメントの空間的ばらつきを考慮する場合、共分散関数 C_r は次式で与えることとした。

$$C_r(x_1, y_1) = \sigma_I^2 \exp\left(-\frac{|x_1 - y_1|}{b}\right) \quad (28)$$

Table 1 Material and shape parameters of railway track.

(a) Rail.		
E	210	(GPa)
\bar{I}	1960×10^{-8}	(m^{-4})
ρ	7850	(kg/m^3)
A	64.29×10^{-4}	(m^2)

(b) Sleeper.		(c) Wheel.	
Spacing	0.6 (m)	m_w	350 (kg)
N	13	P_b	65.170 (kN)
m_{slp}	80 (kg)	k_c	2.0 (GN/m)

(d) Rail-sleeper force.		(e) Sleeper-ballast force.	
k_r	110 (MN/m)	k_s	10 (GN/m)
η_r	98 (kNsec/m)	η_s	98 (kNsec/m)

(f) Ballast.		
Young's modulus \bar{E}_b	88	(MPa)
Poisson's ratio ν_b	0.28	
density ρ_b	$\rho = 1.7 \times 10^3$	(kg/m^3)

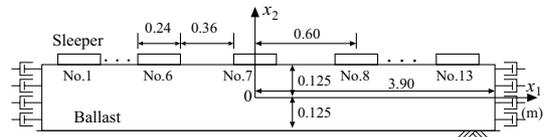


Fig.2 Geometric dimension of ballast layer.

なお、 $\sigma_I = 0.1\bar{I}$, $b = 0.1(m)$ に設定した。

一方、バラスト道床の Young 率の空間的ばらつきを考慮する場合には、共分散関数 C は次式で与えた。

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma_{E_b}^2 \exp\left(-\frac{|x_1 - y_1|}{b_1} - \frac{|x_2 - y_2|}{b_2}\right) \quad (29)$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ はバラスト領域内の任意の 2 点の位置ベクトルであり、 x_2 軸は原点をバラスト道床の深さ方向の中央に設定した。また、 σ_{E_b} は E_b の標準偏差、 b_1, b_2 はそれぞれ x_1, x_2 方向の相関長さである。本研究では $\sigma_{E_b} = 0.1\bar{E}_b$, $b_1 = b_2 = 0.6(m)$ にそれぞれ設定した。なお、Young 率の空間的ばらつきを考慮した場合における Rayleigh 減衰の妥当性が懸念されることから、今回の解析ではバラスト道床の減衰は考慮しないこととした。

4.2. まくらぎ・道床間作用力の動的応答への影響

まず、まくらぎ・道床間作用力の期待値および標準偏差の動的応答に及ぼす、レール曲げ剛性またはバラスト道床 Young 率の空間的ばらつきの影響について検討する。Fig.3 は、レールの断面二次モーメントの空間的ばらつきのみを考慮した場合における、解析区間中央 (まくらぎ No.7) でのまくらぎ・道床間作用力の期待値および標準偏差と車輪の走行位置の関係を示したものである。また、バラスト道床の Young 率の空間的ばらつきのみを考慮した場合の結果を Fig.4 に示す。

まくらぎ・道床間作用力の期待値は、走行速度が上昇してもそのピーク値はほとんど変わらず、この挙動は空間的ばらつきとしてレールの断面二次モーメント、バラスト道床の Young 率のいずれを考慮した場合でも同様である。ただし、

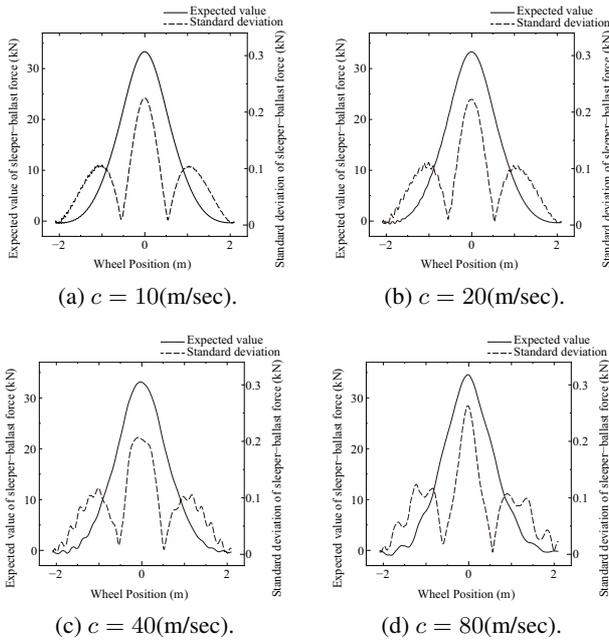


Fig. 3 Expected value and standard deviation of sleeper-ballast force (No.7) in a railway track with spatial variation of bending stiffness of rail.

車輪が接近または走り去る過程での作用力上昇および低下の挙動は走行速度の影響を受け、それぞれの走行速度の下で若干異なる挙動を示している。

一方、まくらぎ・道床間作用力の標準偏差は、空間的ばらつきを考慮する形状特性値・物性値によっても、走行速度によってもその発現挙動が異なることがわかる。レールの断面二次モーメントの空間的ばらつきを考慮した場合には、いずれの走行速度でも標準偏差の最大値は車輪が作用力の観測まくらぎ直上に位置する時に発現し、最大値は期待値の最大値の10%弱となっており、概ね入力ばらつき度合いと同程度の不確実性を示すことがわかる。また、作用力の標準偏差は、観測まくらぎの前後まくらぎ2本分離れた位置付近に車輪が位置する際に第2のピークを示し、観測まくらぎから直近のまくらぎ位置に車輪が位置する場合に標準偏差が大きく低下することがわかる。バラスト道床 Young 率の空間的ばらつきを考慮した場合 (Fig.4) では、標準偏差の最大値はいずれの走行速度でも期待値の最大値の10%程度を示しているが、標準偏差の挙動は走行速度の設定によって大きく異なるものとなっている。低速走行時には走行開始時に発生する過渡応答の影響が明確に現れているが、車輪がまくらぎ2本分程度走行すると過渡応答は概ね消失している。一方、走行速度を上昇させると、観測まくらぎ前後の位置を車輪が走行している時の標準偏差の変動が増幅しており、その値は観測まくらぎ直上に車輪が位置する時の標準偏差の値を大きく上回っている。これは、車輪始動時の過渡応答の影響やバラスト道床内部の波動の多重反射の影響、レールに関する減衰効果を考慮していないことに加え、数値解析時の離散化誤差の影響等、さまざまな理由が考えられるが、現時点では主要因は不明である。そのため、今後はこの点の検討を深めること

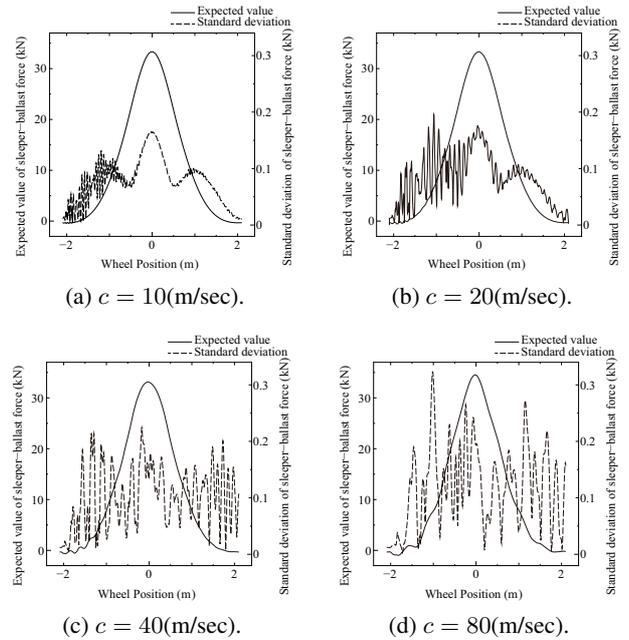


Fig. 4 Expected value and standard deviation of sleeper-ballast force (No.7) in a railway track with spatial variation of ballast Young's modulus.

としたい。

4.3. レール・車輪接触力の動的応答への影響

次に、レール・車輪接触力の期待値および標準偏差の動的応答に及ぼす、レール曲げ剛性またはバラスト道床 Young 率の空間的ばらつきの影響について検討する。Fig.5は、レールの断面二次モーメントの空間的ばらつきのみを考慮した場合におけるレール・車輪接触力の期待値および標準偏差と車輪の走行位置の関係を示したものである。また、バラスト道床の Young 率の空間的ばらつきのみを考慮した場合の結果を Fig.6 に示す。

まくらぎ・道床間作用力の場合と同様、同一の走行速度であれば、期待値は空間的ばらつきを考慮するパラメータによらずほぼ同一の挙動を示す。ただし、レール・車輪接触力では、走行速度の上昇とともに接触力の変動振幅が増幅する傾向を示しているが、4 ケースの設定速度の下で振幅が最大となったのは $c = 40(\text{m/sec})$ の場合であり、この接触力変動の増幅が最も顕著になるのは軌道の共振周期とまくらぎの通過周期が一致する場合であることが予想される。

一方、車輪・レール接触力の標準偏差については、レールの曲げ剛性・バラスト道床 Young 率のいずれの空間的ばらつきを考慮した場合においても、走行速度の上昇とともに標準偏差の最大値が増大することがわかる。しかし、形状特性値や物性値のばらつきの度合い (変動係数10%相当) と比して接触力の標準偏差のオーダーは非常に小さく、期待値の1%程度以下に過ぎない。また、レールの曲げ剛性の空間的ばらつきを考慮した場合と比べて、バラスト道床 Young 率の空間的ばらつきを考慮した場合には、走行速度の上昇に伴う接触力の標準偏差の増幅傾向がより顕著であり、 $c = 80(\text{m/sec})$ の場合では標準偏差は期待値の5%程度まで上昇する。

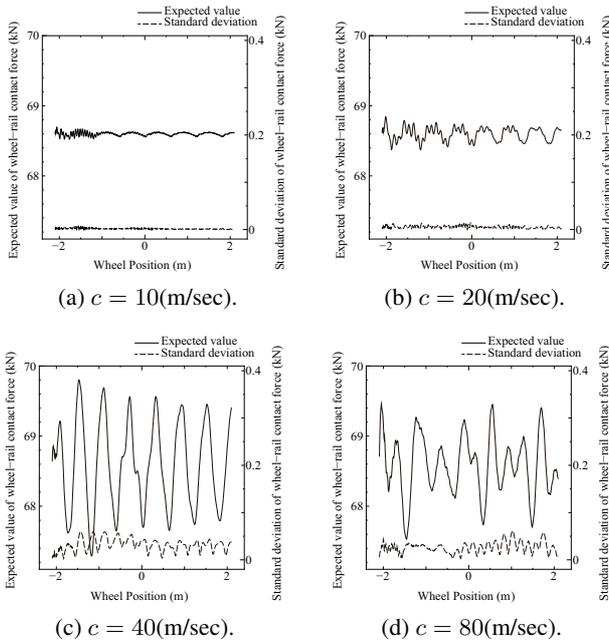


Fig.5 Expected value and standard deviation of wheel-rail contact force in a railway track with spatial variation of bending stiffness of rail.

5. おわりに

本研究では、軌道の構成部材の形状特性値および物性値の空間的ばらつきが軌道各部の作用力の変動量に及ぼす影響について、車輪走行の設定速度の影響も含めて検討した。当該の検討においては、形状特性値および物性値の空間的ばらつきを Karhunen-Loeve(KL) 展開で与えられるものと仮定した上で、スペクトル確率有限要素法を用いてまくらぎ・道床間作用力およびレール・車輪接触力の変動量を定量評価した。

レールの曲げ剛性の空間的ばらつきが断面二次モーメントに起因するものとして解析した結果、まくらぎ・道床間作用力の標準偏差はいずれの走行速度の下でもその最大値が空間的ばらつきの度合いと変動係数の意味で概ね同程度を示すことがわかった。また、レール・車輪接触力の標準偏差は走行速度の上昇とともにその値が増幅するが、標準偏差の最大値は期待値の1%程度と非常に小さく、接触力が生じる位置から近い部位で空間的ばらつきの影響を考慮しても、接触力への不確実性の伝播はさほど大きくないことがわかった。

一方、物性値の空間的ばらつきとしてパラスト道床の Young 率を考えた場合、まくらぎ・パラスト間作用力の変動量(標準偏差)は走行速度の上昇とともに増幅し、その最大値は入力力のばらつきの度合いと同程度(変動係数換算で10%)を示すことが分かった。また、レール・車輪接触力の標準偏差についても走行速度の上昇とともに増幅するが、その傾向はレールの曲げ剛性の空間的ばらつきを考慮した場合と比べてより顕著である。ただし、走行速度が上昇し標準偏差の増幅が顕著な場合でも、接触力の期待値に対して数%程度にとどまっている。これらの点は、軌道振動解析結果に基づき車輪・軌道系の振動解析結果を設計や管理手法に適用する際に考慮すべき知見であると考えられる。

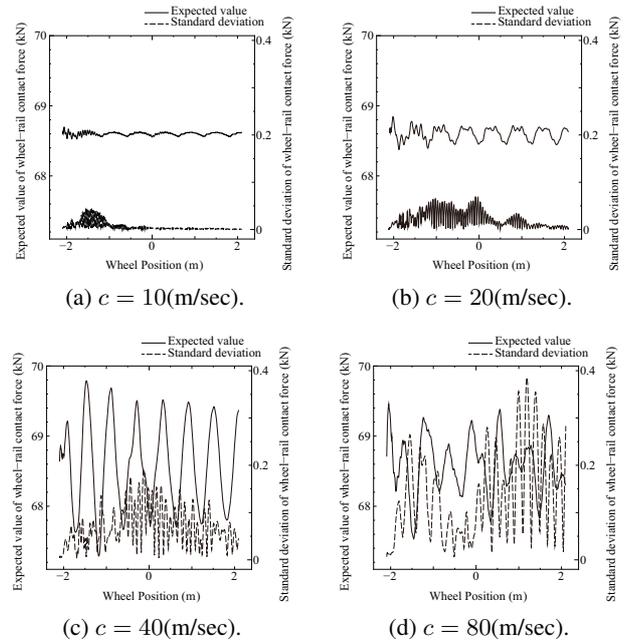


Fig.6 Expected value and standard deviation of wheel-rail contact force in a railway track with spatial variation of ballast Young's modulus.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 15K06177 の助成を受けたものです。

参考文献

- (1) Knothe, K. & Grassie, S.L.: Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies. *Vehicle System Dynamics*, Vol.22, pp.209-262, 1993.
- (2) 紅露一寛, 阿部和久, 石田 誠, 鈴木貴洋: レール継目部の衝撃応答解析における道床・路盤部のモデル化の影響. *土木学会応用力学論文集*, Vol.7, pp.1313-1323, 2004.
- (3) Batjargal Sodbilig, 阿部和久, 紅露一寛: まくらぎ配置がレールの振動・騒音特性に及ぼす影響, *土木学会鉄道工学シンポジウム論文集*, Vol.18, pp.23-30, 2014.
- (4) Rhayma, N., Bressollette, Ph., Breul, P., Fogli, M. & Saussine, G.: A probabilistic approach for estimating the behavior of railway tracks. *Engrg. Struct.*, Vol.33, pp.2120-2133, 2011.
- (5) Andersen, L. & Nielsen, S.R.K.: Vibration of a track caused by variation of the foundation stiffness. *Prob. Engrg. Mech.*, Vol.18, pp.171-184, 2003.
- (6) 渡邊あゆみ, 紅露一寛: パラスト軌道の振動応答に及ぼすパラスト材の弾性係数の空間的ばらつきの影響, *土木学会論文集 A2 (応用力学)*, Vol.72, No.2, pp.I.265-I.276, 2017.
- (7) Ghanem, R.G. & Spanos, P.G.: *Stochastic finite elements*. Dover, 1991.
- (8) 阿部和久: 積分方程式法に基づく時間積分法の動弾性有限要素・境界要素結合法への適用. *境界要素法論文集*, Vol.14, pp.93-98, 1997.