計算数理工学論文集 Vol. 17 (2017 年 12 月)，論文 No. 05-171215 JASCOME

熱流動解析に対する境界条件強制型 Smoothed Profile-Lattice Boltzmann Methodの提案

BOUNDARY CONDITION-ENFORCED SMOOTHED PROFILE-LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR INCOMPRESSIBLE THERMAL FLOWS

瀬田　剛 [1)]，内山 知実 [2)]，高野　登 [3)]

Takeshi SETA, Tomomi UCHIYAMA and Noboru TAKANO

1) 富山大学大学院理工学研究部 (工学)　(〒 930-8555　富山市五福 3190,　E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp)
2) 名古屋大学　未来材料・システム研究所　(〒 464-0814　名古屋市千種区不老町,　E-mail: uchiyama@is.nagoya-u.ac.jp)
3) 富山大学大学院理工学研究部 (工学)　(〒 930-8555　富山市五福 3190,　E-mail: takano@eng.u-toyama.ac.jp)

In this study, the smoothed profile-lattice Boltzmann method is proposed to enforce the Dirichlet type boundary conditions for thermal-hyperbolic systems. A smoothed-profile with a smoothly spreading solid-fluid interface layer identifies the solid domain for non-slip and non-penetration conditions. To satisfy the Dirichlet boundary condition, the present scheme computes the interaction force and the heat transfer based on the high-order accurate definitions of the fluid velocity and the temperature. The analytical and numerical solutions for the symmetric shear flows demonstrate that the proposed method effectively reduces the boundary-value deviation. In several two-dimensional numerical investigations including those determining the Couette flows, flow around a circular cylinder, and natural convection, the numerical results of streamlines, isotherms show good agreement with those of the previous studies or the existing theoretical work.

Key Words: Smoothed Profile Method, Lattice Boltzmann Method, Dirichlet Boundary Condition, Thermo-Hydraulics

1. はじめに

格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, LBM) は，独立した分布関数の運動により流体挙動が再現され，圧力に関するポアソン方程式を解く必要がないため，並列効率に優れ，高速計算に適している [(1)]．直交デカルト格子系で，非圧縮性 Navier-Stokes (NS) 方程式が計算される LBM を用い，複雑な幾何形状を有し，大規模計算が必要な，蓮の葉表面の超撥水作用や，電子機器の冷却現象を解明するためには，埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method, IBM) [(2, 3)] や，Smoothed Profile Method (SPM) [(4, 5, 6)] の適用が効果的である．Guo によって提案された流速の定義式 [(7)] に基づき，Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method (IB-LBM) の外力を導出することで，Direct forcing method [(2)] で観察された固体壁面への流体の漏れの除去に成功している [(3)]．SPM では，任意の界面厚さを有するプロファイルを定義することにより，デカルト格子のみで，流体と構造体との連成問題を解くことができる [(4)]．本論文では，Guo による流速の定義式 [(7)] に基づき定式化された Smoothed Profile-Lattice Boltzmann Method (SP-LBM) [(6)] を温度方程式を解析出来るように改良する．熱源を含む温度の定義式 [(8)] に基づき，ソース項を計算した場合の SP-LBM の境界条件の計算精度への影響を検証する．

2. 計算手法

2.1. Lattice Boltzmann Method

構造物と流体との熱輸送を含む相互作用がある非圧縮性流体に対する連続の式，NS 方程式，温度方程式，

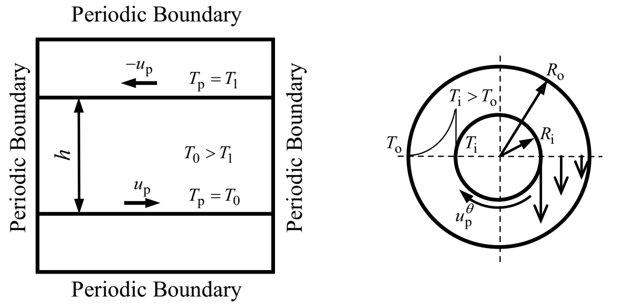
$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)T=\chi\nabla^2T+Q, \tag{3}$$

を，LBM により解析する．ここで ρ は流体の密度，$\boldsymbol{u}$ は流速，T は流体の温度，p は圧力，ν は動粘性係数，χ は熱拡

2017 年 9 月 21 日受付，2017 年 11 月 8 日受理



(a) symmetric shear flows　(b) cylindrical Couette flow

Fig. 1　Schematic diagrams.

散率，$\boldsymbol{F}$ は構造物と流体との相互作用力，Q は熱源である．LBM では，離散速度 $\boldsymbol{c}_\alpha$ に対応した粒子速度分布関数 f_α，g_α が時間発展することで，流体運動が求められる．式 (1)-(3) に対応する LBM の発展方程式は，

$$f_\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_\alpha\delta_t, t+\delta_t) = f_\alpha(\boldsymbol{x},t) - \frac{f_\alpha(\boldsymbol{x},t) - f_\alpha^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x},t)}{\tau_\mathrm{f}} + \delta_t F_\alpha(\boldsymbol{x},t), \tag{4}$$

$$g_\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_\alpha\delta_t, t+\delta_t) = g_\alpha(\boldsymbol{x},t) - \frac{g_\alpha(\boldsymbol{x},t) - g_\alpha^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x},t)}{\tau_\mathrm{g}} + \delta_t Q_\alpha(\boldsymbol{x},t), \tag{5}$$

で与えられる．緩和時間 τ_f，τ_g は，動粘性係数と熱拡散率に対し $\nu = c^2\delta_t(\tau_\mathrm{f} - 0.5)/3$，$\chi = c^2\delta_t(\tau_\mathrm{g} - 0.5)/3$ の関係がある．D2Q9 モデルに対する平衡分布関数 f_α^{eq}，g_α^{eq} は，

$$f_\alpha^{\mathrm{eq}} = \omega_\alpha\rho\Big[1 + \frac{3\boldsymbol{c}_\alpha\cdot\boldsymbol{u}}{c^2} + \frac{9(\boldsymbol{c}_\alpha\cdot\boldsymbol{u})^2}{2c^4} - \frac{3\boldsymbol{u}^2}{2c^2}\Big], \tag{6}$$

$$g_\alpha^{\mathrm{eq}} = \omega_\alpha T\Big[1 + \frac{3\boldsymbol{c}_\alpha\cdot\boldsymbol{u}}{c^2} + \frac{9(\boldsymbol{c}_\alpha\cdot\boldsymbol{u})^2}{2c^4} - \frac{3\boldsymbol{u}^2}{2c^2}\Big], \tag{7}$$

で定義される．重み係数は $\omega_0 = \frac{4}{9}$，$\omega_{1-4} = \frac{1}{9}$，$\omega_{5-8} = \frac{1}{36}$ である．式 (4)，(5) に，Chapman-Enskog 展開を適用すると，式 (4) から連続の式 (1) と NS 方程式 (2) が，式 (5) から温度方程式 (3) が導出される．圧力は $p = c^2\rho/3$ で与えられる．運動量フラックスに対する外力の非物理的な影響を除去するため，Guo は流速の定義式と外力項を，

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha, \quad \boldsymbol{u}^* = \frac{1}{\rho}\sum_\alpha f_\alpha\boldsymbol{c}_\alpha, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* + \delta_t\frac{\boldsymbol{F}}{2}, \tag{8}$$

$$F_\alpha = \omega_\alpha\rho\Big(1 - \frac{1}{2\tau_\mathrm{f}}\Big)\Big[\frac{3(\boldsymbol{c}_\alpha - \boldsymbol{u})}{c^2} + \frac{9(\boldsymbol{c}_\alpha\cdot\boldsymbol{u})}{c^4}\mathbf{c}_\alpha\Big]\cdot\boldsymbol{F}, \tag{9}$$

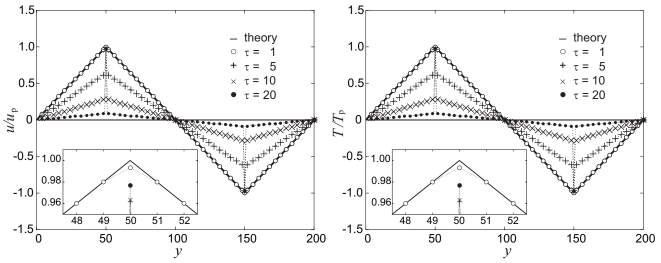
のように提案した [7]．同様に，温度の時間に関する微分項による温度方程式への非物理的な影響を除去するために温度とソース項は，

$$T^* = \sum_\alpha g_\alpha, \quad T = T^* + \delta_t\frac{Q}{2}, \quad Q_\alpha = \omega_\alpha\Big(1 - \frac{1}{2\tau_\mathrm{g}}\Big)Q, \tag{10}$$

のように定義される [8]．なお，ρ，u，T 等変数の無次元化は，文献 [9] に従う．

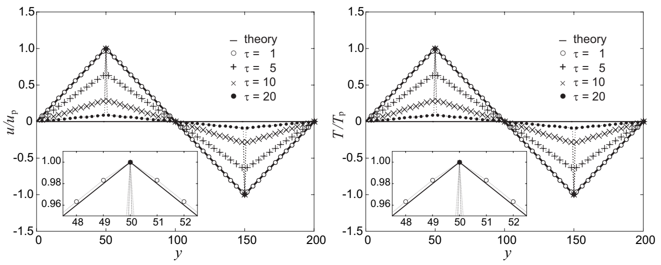
2.2. Smoothed Profile Method

次式で示されるように，SPM では流体領域において $\varphi_i = 0$，固体領域において $\varphi_i = 1$ となるプロファイル φ_i を定義し，



(a-1) velocity　(a-2) temperature

(a) conventional SP-LBM [4]



(b-1) velocity　(b-2) temperature

(b) present SP-LBM

Fig. 2　Velocity and temperature profiles obtained through calculation of the symmetric shear flows.

粒子境界近傍に格子幅に相当する境界幅 ξ を仮定する [4]．

$$\varphi_i(\boldsymbol{x},t) = s(a_i - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_i(t)|), \tag{11}$$

$$s(x) = \begin{cases} 0, & x < -\xi/2, \\ \frac{1}{2}\Big(\sin\frac{\pi x}{\xi} + 1\Big) & |x| < \xi/2, \\ 1. & x > \xi/2. \end{cases} \tag{12}$$

ここで，添え字 i は粒子番号，a_i は粒子半径，$\boldsymbol{X}_i(t)$ は時間 t における粒子の中心位置を示す．総数 N_p 個の粒子が存在する計算領域全体に対する粒子のプロファイル φ は，

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \sum_{i=1}^{N_\mathrm{p}}\varphi_i(\boldsymbol{x},t), \tag{13}$$

で与えられる．粒子の速度場 $\boldsymbol{u}_\mathrm{p}$，温度場 T_p は，

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}_\mathrm{p}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{i=1}^{N_\mathrm{p}}\varphi_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{V}_i(t) + \sum_{i=1}^{N_\mathrm{p}}\varphi_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\Omega}_i(t)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_i(t)), \tag{14}$$

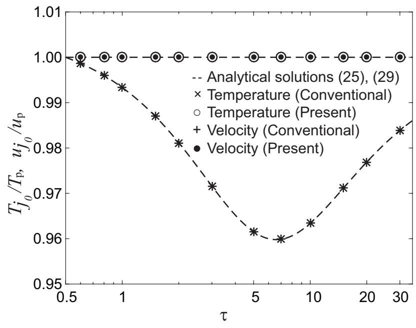
$$\varphi(\boldsymbol{x},t)T_\mathrm{p}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{i=1}^{N_\mathrm{p}}\varphi_i(\boldsymbol{x},t)T_i(t), \tag{15}$$

で表される．$\boldsymbol{V}_i$，$\boldsymbol{\Omega}_i$ はそれぞれ，時間 t における i 番目の粒子の並進速度と角速度を表す．ここで，式 (8) に，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\mathrm{p}$ を代入すると，SP-LBM における外力は，

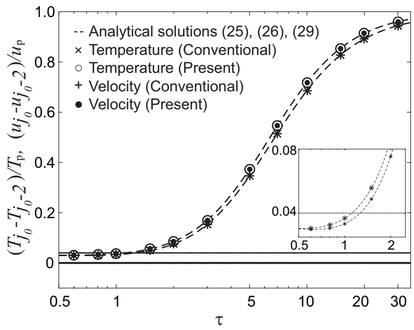
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) = \varphi(\boldsymbol{x},t)\frac{2(\boldsymbol{u}_\mathrm{p}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x},t))}{\delta_t}, \tag{16}$$

となる．式 (16) を式 (8) に代入すると，

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \varphi(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}_\mathrm{p}(\boldsymbol{x},t) + (1 - \varphi(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x},t), \tag{17}$$

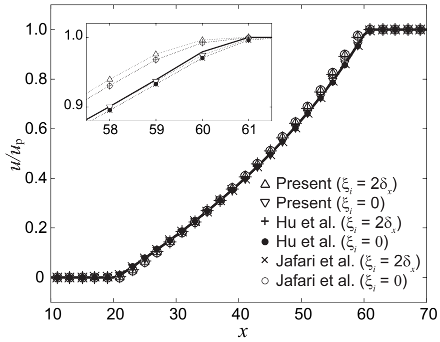


(a) boundary-value deviation

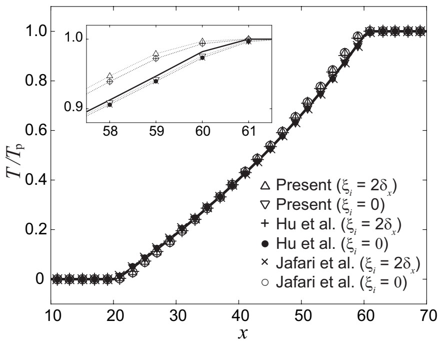


(b) boundary slip

Fig. 3 Comparison of analytical and numerical solutions depending on the relaxation time.



(a) velocity



(b) temperature

Fig. 4 Tangential velocity and temperature profiles as calculated by the SP-LBMs in cylindrical Couette flows.

が得られる．流体領域において $\varphi=0$ であるから，式 (16) より，外力は $\boldsymbol{F}=0$ となる．式 (8) に $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ を代入すると，$\boldsymbol{u}^*$ は流体の速度 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}$ と一致する．よって，式 (17) は，Jafari によって示された SPM における流速の定義式 [4] と一致する．

$$\boldsymbol{u}=\varphi\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}+(1-\varphi)\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}. \tag{18}$$

式 (18) の両辺の発散を取り，$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}=0$ とすれば，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\nabla\varphi\cdot(\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}), \tag{19}$$

が得られる．境界において $\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}$ と $\boldsymbol{u}_{\mathrm{f}}$ が一致し，流体の固体壁への漏れがなければ，$\boldsymbol{u}$ に対する連続の式 (1) が満足される．同様にして，熱源は，

$$Q(\boldsymbol{x},t)=\varphi(\boldsymbol{x},t)\frac{2(T_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x},t)-T^*(\boldsymbol{x},t))}{\delta_t}, \tag{20}$$

によって求められる．本手法では，式 (16)，(20) から得られた $\boldsymbol{F}$，Q を式 (8)，(9)，(10) に代入することで，熱輸送を伴う流体運動が計算される．

なお，Jafari は，粒子を剛体球と考える Direct forcing method[2] に基づき，相互作用力 $\boldsymbol{F}$ を，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)=\varphi(\boldsymbol{x},t)\frac{\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\delta_t}, \tag{21}$$

で与えた．同様に，ソース項 Q は次式で与えることが出来る．

$$Q(\boldsymbol{x},t)=\varphi(\boldsymbol{x},t)\frac{T_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x},t)-T(\boldsymbol{x},t)}{\delta_t}. \tag{22}$$

この場合，式 (4)，(5) の外力項とソース項は，

$$F_\alpha=\omega_\alpha\rho\frac{3\boldsymbol{c}_\alpha\cdot\boldsymbol{F}}{c^2}, \qquad Q_\alpha=\omega_\alpha Q, \tag{23}$$

で与えられ，流体の密度，流速，温度は次式で求められる．

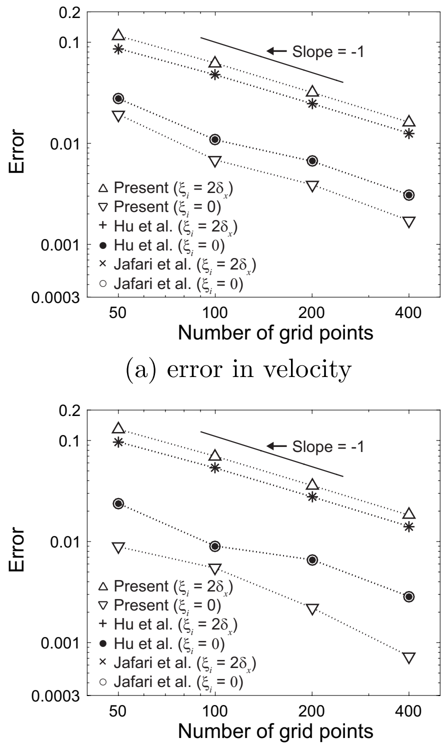
$$\rho=\sum_\alpha f_\alpha, \qquad \boldsymbol{u}=\frac{1}{\rho}\sum_\alpha \boldsymbol{c}_\alpha f_\alpha, \qquad T=\sum_\alpha g_\alpha. \tag{24}$$

Hu によって提案された SP-LBM では，本モデルと同様に，流速，外力項，温度，ソース項に対し，式 (8)，(9)，(10) が用いられるが，外力と熱源は，Jafari によって提案された式 (21)，(22) が用いられる [5]．式 (12) の φ_i に対し，様々なプロファイルが提案されており，文献 [8] では一般的な tanh 関数を用いたが，本研究では Jafari のモデル [4] と同様に sin 関数を用いる．

3. 計算結果

3.1. Symmetric shear flows

Fig. 1(a) に示す symmetric shear flows に対し，200×200 の格子点を用い，$y=50\delta_x$，$y=150\delta_x$ の位置に，SPM により，$u_{\mathrm{p}}=0.01$，$u_{\mathrm{p}}=-0.01$ の流速を，$T_{\mathrm{p}}=1$，$T_{\mathrm{p}}=-1$ の温度を，それぞれ，設定する．ここで，$\delta_x=c\delta_t$ であり，全ての計算で，$\delta_x=\delta_t=c=1$ とする．後述する解析解の導出手順の単純化のため，界面幅を $\xi=0$ とする．つまり，$y=50\delta_x$，$y=150\delta_x$ の位置でのみ，$\varphi=1$ となり，それ以外の格子点では $\varphi=0$ となる．Fig. 2(a) に Jafari によって提案された従来型の SP-LBM による計算結果を，Fig. 2(b) に，本手法による計算結果を示す．SP-LBM においても，IB-LBM と同様に，緩和時間 τ が増加すると，境界近傍で流速と温度に歪が生じている．本手法では，式 (16)，(20) により強制的に境界値が設定されるため，Dirichlet 条件が常に満足されることが，Fig. 2(b) から分かる．



(a) error in velocity

(b) error in temperature

Fig. 5　Relative error versus number of grid points in the calculation of the cylindrical Couette flows.

文献 (8) の手法を用い，Fig. 2 で観察された境界近傍の歪に対する解析解を導出する．境界点 j_0 における値 ϕ_{j_0} と，境界点から 2 格子分離れた点 j_0-2 における値 ϕ_{j_0-2} に関する Jarari の手法の解析解は，以下のように与えられる．

$$\frac{\phi_{j_0}}{\phi_{\mathrm{p}}} = \frac{(2\tau-1)B(AC+1)+4\tau^2-5\tau+3}{4\tau^2-3\tau+2}, \tag{25}$$

$$\frac{\phi_{j_0-2}}{\phi_{\mathrm{p}}} = BC. \tag{26}$$

ϕ は流速または温度を表す．ここで，

$$A = \frac{4\tau^2-3\tau+2}{4\tau^2-3\tau+5}, \qquad B = \frac{3}{4\tau^2-3\tau+5}, \tag{27}$$

$$C = \sum_{k=1}^{48} \frac{1}{(k+1-Ak)} \frac{1}{(k-A(k-1))}, \tag{28}$$

である．本手法に対する解析解は，

$$\frac{\phi_{j_0}}{\phi_{\mathrm{p}}} = 1, \qquad \frac{\phi_{j_0-2}}{\phi_{\mathrm{p}}} = BC, \tag{29}$$

となる．C は式 (28) で与えられ，A，B は以下のようになる．

$$A = \frac{8\tau^2-8\tau+5}{8\tau^2-8\tau+11}, \qquad B = \frac{6}{8\tau^2-8\tau+11}. \tag{30}$$

Fig. 3 に，ϕ_{j_0} と $\phi_{j_0} - \phi_{j_0-2}$ に関する数値解と解析解とを示す．解析解と数値解とは良く一致しており，緩和時間が大きくなると，境界近傍の歪が大きくなることが分かる．本手法にでは，緩和時間に関わらず，境界値が設定値と常に一致することが解析解と数値解から証明された．

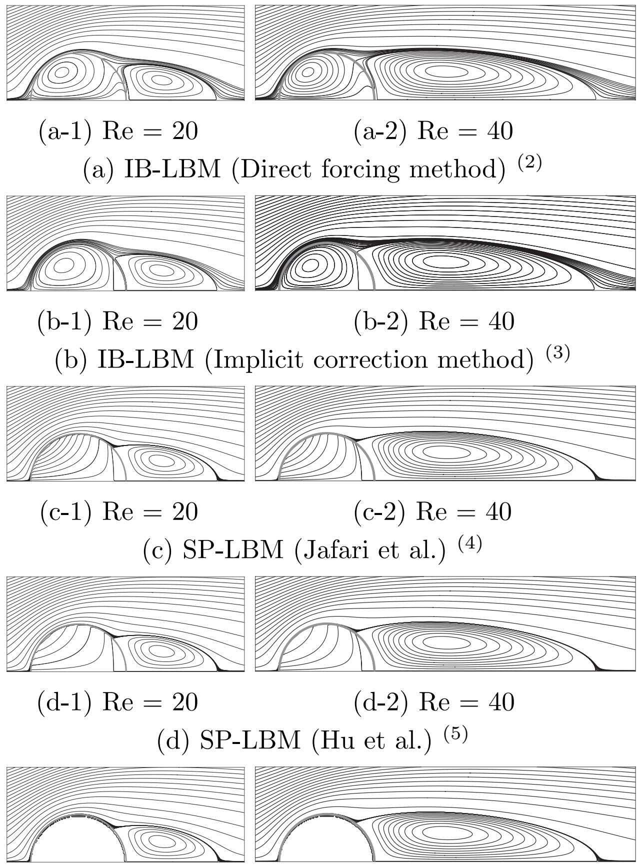
3.2. Cylindrical Couette flows

Fig. 1(b) に示す cylindrical Couette flows の計算を行い，SP-LBM の解析精度を検証する．計算領域は $200\delta_x \times 200\delta_x$，内円の半径は $R_{\mathrm{i}} = 40\delta_x$，外円の半径は $R_{\mathrm{o}} = 80\delta_x$，内円の温度は $T_{\mathrm{i}} = 1$，外円の温度は $T_{\mathrm{o}} = 0$ とする．外円は静止しており，内円は一定の速度 $u_{\mathrm{p}}^{\theta} = 0.01c$ で回転している．緩和時間は $\tau_{\mathrm{f}} = \tau_{\mathrm{g}} = 0.75$ とする．厳密解 $\hat{u}^{\theta}$，$\hat{T}$ は，

$$\hat{u}^{\theta}(R) = u_{\mathrm{p}}^{\theta} \frac{R/R_{\mathrm{o}} - R_{\mathrm{o}}/R}{R_{\mathrm{i}}/R_{\mathrm{o}} - R_{\mathrm{o}}/R_{\mathrm{i}}}, \tag{31}$$

$$\hat{T}(R) = \frac{T_{\mathrm{o}}\log(R/R_{\mathrm{i}}) - T_{\mathrm{i}}\log(R/R_{\mathrm{o}})}{\log(R_{\mathrm{o}}/R_{\mathrm{i}})}, \tag{32}$$

で与えられる．Jafari の手法 (4)，Hu の手法 (5)，本手法に対する $y = 100\delta_x$ の断面における流速分布と温度分布を Fig. 4 に示す．仮想的な固液界面幅 $\xi = 2\delta_x$ を設定した場合，温度分布，速度分布共に，$\xi = 0$ の場合よりも厳密解からのずれが大きくなる．Fig. 5 に計算領域の一辺の格子点数の数と誤差との関係を示す．$\xi = 2\delta_x$ の場合，固液界面における φ のプロファイルの影響により，本手法の計算精度は向上しない．固液界面幅が $\xi = 0$ であれば，Dirichlet 境界条件が厳密に満足される本手法の誤差が，Fig. 5 で最も小さくなっている．



(a-1) Re = 20　(a-2) Re = 40
(a) IB-LBM (Direct forcing method) (2)

(b-1) Re = 20　(b-2) Re = 40
(b) IB-LBM (Implicit correction method) (3)

(c-1) Re = 20　(c-2) Re = 40
(c) SP-LBM (Jafari et al.) (4)

(d-1) Re = 20　(d-2) Re = 40
(d) SP-LBM (Hu et al.) (5)

(e-1) Re = 20　(e-2) Re = 40
(e) present SP-LBM

Fig. 6　Streamlines for flow past a circular cylinder at Re = 20 and 40. The thick line indicates the zero streamline. The gray line indicates the surface of the circular cylinder.

3.3. Flow past a circular cylinder

レイノルズ数 Re = 20 と 40 における円柱周り流れの計算を行う．緩和時間は $\tau_{\mathrm{f}} = 0.65$ に設定し，円柱の直径は $D = 100\delta_x$，代表速さは $u_0 = \mathrm{Re}\nu/D$ で与える．格子点数

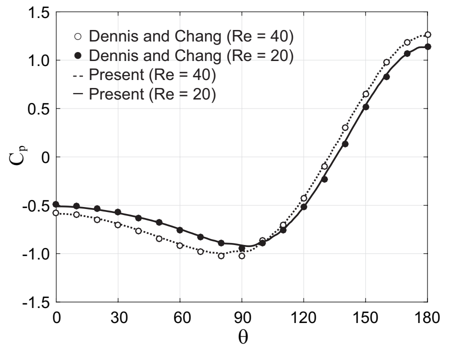


Fig. 7　Pressure distribution on the cylinder.

$40D \times 40D$ の計算領域の $(16D, 20D)$ の位置に円柱を設置し，密度は $\rho = 1.0$ とする．数値的安定性のため，$\xi = 2\delta_x$ としたSPMにより円柱の境界条件を設定する．外周の4辺における f_α の境界条件は，密度が $\rho = 1.0$，流速が u_0 に対応した平衡分布関数 $f_\alpha^{\rm eq}$ により与える．Fig. 6に，流れ関数分布を示す．Fig. 6(a)，(c)，(d)に示されるように，Direct forcing methodに基づき，外力を求める手法では，流速の漏れが発生している．Fig. 6(b)に示されるImplicit correction methodの結果と同様に，定義式(8)と，式(9)の外力項を用いる本手法では，流速の漏れが除去されることがFig. 6(e)から分かる．

本手法に対する抗力係数 $\mathrm{C_d}$ と圧力係数 $\mathrm{C_p}$ とを求める．

$$\mathrm{C_d} = \frac{F_{\rm d}}{(1/2)\rho u_0^2 D}, \qquad \mathrm{C_p} = \frac{p_{\rm s} - p_0}{(1/2)\rho u_0^2}. \tag{33}$$

抗力 $F_{\rm d}$ は，運動量保存則に基づき，$\boldsymbol{F}$ の x 成分 F_x から，

$$F_{\rm d} = -\int_{\forall_{\rm p}} F_x(\boldsymbol{x}, t) dx, \tag{34}$$

のように求められる．円柱表面上の圧力 $p_{\rm s}$ はIBMで用いられる補間関数を用い，境界から $3\delta_x$ 離れた点で評価される．一様流の圧力は $p_0 = c^2\rho/3$ で与えられる．Fig. 7において，本手法で得られた圧力係数 $\mathrm{C_p}$ の分布は参照解[10]と一致しており，圧力分布も正確に計算出来ることが分かる．Table 1にまとめられた抗力係数 $\mathrm{C_d}$，後流長さ L，剥離点 $\theta_{\rm s}$，圧力係数 $\mathrm{C_p}$ が参照解[10, 11, 12]と良い一致を示した．なお，Table 1のIB-LBM[3]，SP-LBM[4]，SP-LBM[5]の値は，文献値ではなく，著者らにより実施されたFig. 6の計算結果から導出された値である．

3.4. Natural convection

最後に，円柱周りの自然対流解析を行い，ヌセルト数，最大流れ関数，流速分布，温度分布について検証する．温度 $T_{\rm o} = 0$ の正方形の領域の中心に温度 $T_{\rm i} = 1$ の円柱を置く．格子点数は 221×221，$\xi = 0$ とする．プラントル数を $\mathrm{Pr} = 0.71$ とし，レイリー数Raと，計算領域の幅 L と半径 R との比 R/L を変化させた場合の温度分布と流速分布をFig.8に示す．Fig.8の破線で示すように，正方形領域の端から幅 $10\delta_x$ までの固体領域をSPMにより設定する．これにより，代表長さは $h = 200\delta_x$ となる．緩和時間を $\tau_{\rm g} = 0.6$ とし，熱拡散率 χ を求めた後，$\nu = \chi Pr$ から動粘性係数を求め，緩和時間を $\tau_{\rm f} = 3\nu + 0.5$ から導出する．浮力は，ブジネスク近似 $\boldsymbol{G} = \beta G(T - T_m)\boldsymbol{j}$ により与える．β は体積膨張率，G は重力加速度の大きさ，$\boldsymbol{j}$ は重力加速度の向きと逆向きの単位ベクトル，T_m は基準温度を表し，$T_m = 0.5$ とする．体積膨張率は，$\beta = \mathrm{Ra}\nu\chi/h^3$ で与える．本計算により得られた流れ関数および温度分布は，参照解[13, 14]と良い一致を示しており，本SP-LBMは自然対流解析に有効であることが明らかになった．本手法から求められた円柱上の平均ヌセルト数 $\bar{\mathrm{Nu}}$ と流れ関数の最大値 $\psi_{\max}$ とが，参照解[13, 14]と良い一致を示すことがTable 2から分かる．

Table 1　Comparison of drag coefficient $\mathrm{C_d}$, wake length $2L/D$, separation angle $\theta_{\rm s}$, pressure coefficient at the front stagnation point $\mathrm{C_p}(\pi)$, and pressure coefficient at the rear stagnation point $\mathrm{C_p}(0)$ as calculated by the proposed SP-LBM and in previous studies.

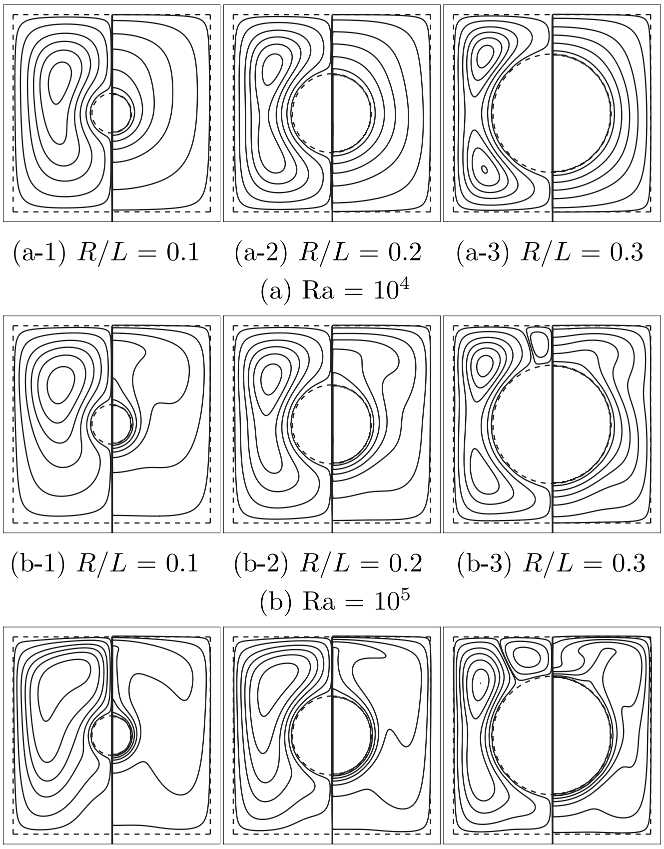
Re	References	$\mathrm{C_d}$	$2L/D$	$\theta_{\rm s}$	$\mathrm{C_p}(\pi)$	$-\mathrm{C_p}(0)$
20	FDM [10]	2.045	1.88	43.7	1.269	0.589
	SAM [11]	2.053	1.786	43.37	1.274	0.582
	LBM [12]	2.152	1.842	42.96	1.233	0.563
	IB-LBM [3]	2.103	1.900	40.89	1.220	0.580
	SP-LBM [4]	2.092	1.900	41.62	1.250	0.587
	SP-LBM [5]	2.091	1.900	41.55	1.250	0.588
	Present	2.095	1.920	41.64	1.250	0.587
40	FDM [10]	1.522	4.69	53.8	1.144	0.509
	SAM [11]	1.550	4.357	53.34	1.117	0.554
	LBM [12]	1.499	4.490	52.84	1.133	0.487
	IB-LBM [3]	1.566	4.600	50.70	1.105	0.505
	SP-LBM [4]	1.562	4.640	51.23	1.133	0.512
	SP-LBM [5]	1.562	4.640	51.18	1.133	0.512
	Present	1.565	4.660	51.29	1.135	0.512

4. おわりに

SP-LBMにおいて外力と熱源の導出方法を修正することにより，Dirichlet境界条件の計算精度を向上させた．Symmetric shear flowsの計算において，本SP-LBMにおいても，緩和時間が大きいと境界近傍に流速や温度の歪が発生するが，境界値は設定値と常に一致することが解析解と数値解から証明された．円柱周り流れと自然対流の計算において，固体壁への流体の漏れが除去され，流れ関数分布，温度分布とも適切に計算されたことから，本手法の熱流動解析への有効性が確認された．本論文では単純な定常問題のみが検証されており，今後，流れや温度の発達過程を含む非定常問題への本手法の有効性を検証する必要がある．本研究はJSPS科研費16K06070の助成を受けたものである．ここに記して謝意を表す．

参考文献

(1) Chen, S.，Doolen, G. D.：Lattice Boltzmann method for fluid flows， Annu. Rev. Fluid Mech.， **30**(1998),



(a-1) $R/L = 0.1$ (a-2) $R/L = 0.2$ (a-3) $R/L = 0.3$

(a) $\mathrm{Ra} = 10^4$

(b-1) $R/L = 0.1$ (b-2) $R/L = 0.2$ (b-3) $R/L = 0.3$

(b) $\mathrm{Ra} = 10^5$

(c-1) $R/L = 0.1$ (c-2) $R/L = 0.2$ (c-3) $R/L = 0.3$

(c) $\mathrm{Ra} = 10^6$

Fig. 8 Streamlines and isotherm contours for different values of R/L at $\mathrm{Ra} = 10^4$, $\mathrm{Ra} = 10^5$, and $\mathrm{Ra} = 10^6$. Streamlines and isotherm contours are shown on the left- and right-hand sides, respectively.

Table 2 Surface-averaged Nusselt number and maximum absolute value of stream function.

Ra	R/L		Present	SIMPLE [13]	DQM [14]
10^4	0.1	$\bar{\mathrm{Nu}}$	2.019	2.071	2.08
		$\psi_{\max}$	1.792	1.73	1.71
	0.2	$\bar{\mathrm{Nu}}$	3.234	3.331	3.24
		$\psi_{\max}$	1.016	1.02	0.97
	0.3	$\bar{\mathrm{Nu}}$	5.601	5.826	5.40
		$\psi_{\max}$	0.510	0.50	0.49
10^5	0.1	$\bar{\mathrm{Nu}}$	3.672	3.825	3.79
		$\psi_{\max}$	10.16	10.15	9.93
	0.2	$\bar{\mathrm{Nu}}$	4.918	5.08	4.86
		$\psi_{\max}$	8.391	8.38	8.10
	0.3	$\bar{\mathrm{Nu}}$	6.490	6.212	6.21
		$\psi_{\max}$	5.180	5.10	5.10
10^6	0.1	$\bar{\mathrm{Nu}}$	5.887	6.107	6.11
		$\psi_{\max}$	20.81	25.35	20.98
	0.2	$\bar{\mathrm{Nu}}$	8.860	9.374	8.90
		$\psi_{\max}$	23.95	24.07	24.13
	0.3	$\bar{\mathrm{Nu}}$	12.54	11.62	12.00
		$\psi_{\max}$	20.47	21.30	20.46

pp. 329–364.

(2) Feng, Z.-G., Michaelides, E. E. : Proteus: a direct forcing method in the simulations of particulate flows, J. Comput. Phys., **202**(2005), pp. 20–51.

(3) Wu, J., Shu, C. : Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications, J. Comput. Phys., **228**(2009), pp. 1963–1979.

(4) Jafari, S., Yamamoto, R., Rahnama, M. : Lattice-Boltzmann method combined with smoothed-profile method for particulate suspensions, Phys. Rev. E, **83**(2011), pp. 026702.

(5) Hu, Y, Li, D., Shu, S., Niu, X, : An efficient smoothed profile-lattice Boltzmann method for the simulation of forced and natural convection flows in complex geometries, Int. Commun. Heat Mass, **68**(2015), pp. 188–199.

(6) Seta, T., Uchiyama, T., Takano, N. : Smoothed profile-lattice Boltzmann method for non-penetration and wetting boundary conditions in two and three dimensions, Comput. Fluids, **159**(2017), pp. 64–80.

(7) Guo, Z., Zheng, C., Shi, B. : Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method, Phys. Rev. E, **65**(2002), pp. 046308.

(8) Seta, T., Hayashi, K., Tomiyama, A. : Analytical and numerical studies of the boundary slip in the immersed boundary-thermal lattice Boltzmann method, Int. J. Numer. Methods Fluids, (2017), DOI: 10.1002/fld.4462 (published online).

(9) Inamuro, T., Yoshino, M., Inoue, H., Mizuno, R., Ogino, F. : A lattice Boltzmann method for a binary miscible fluid mixture and its application to a heat-transfer problem, J. Comput. Phys., **179**(2002), pp. 201–215.

(10) Dennis S. C. R, Chang G. Z. : Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100, J. Fluid Mech., **42**(1970), pp. 471–489.

(11) Nieuwstadt F., Keller, H. B. : Viscous flow past circular cylinders, Comput. Fluids, **1**(1973), pp. 59–71.

(12) He X, Doolen G. D. : Lattice Boltzmann method on curvilinear coordinates system: flow around a circular cylinder, J. Comput. Phys., **134**(1997), pp. 306–15.

(13) Moukalled, F., Acharya, S. : Natural convection in the annulus between concentric horizontal circular and square cylinders, J. Thermophysics Heat Tr., **10**(1996), pp. 524–531.

(14) Shu, C., Zhu, Y. D. : Efficient computation of natural convection in a concentric annulus between an outer square cylinder and an inner circular cylinder, Int. J. Numer. Methods Fluids, **38**(2002), pp. 429–445.