

# 熱方程式に対する space-time 境界要素法における Calderon の前処理について

Calderon's preconditioning for a space-time boundary element method for the heat equation

新納 和樹<sup>1)</sup>, Olaf Steinbach<sup>2)</sup>

Kazuki Niino and Olaf Steinbach

- 1) 京都大学 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: niino@i.kyoto-u.ac.jp)  
2) グラーツ工科大学 (〒 8010 Steyrergasse 30/3 Graz, E-mail: o.steinbach@tugraz.at)

A space-time boundary element method (BEM) for the heat equation in 2D is discussed. The space-time method is one of discretisation method for time-domain problems, which deal with the time axis as an additional axis to the space. In this paper, we discuss how to calculate integral operators in the space-time BEM for the heat equation in 2D. Also, we describe an implementation of the Calderon preconditioning for the space-time BEM. Accuracy of the method and the effectiveness of the preconditioning are verified through some numerical examples.

**Key Words:** Space-time method, heat equation, Galerkin method, Calderon preconditioning

## 1. 序論

熱方程式や波動方程式などの時間域における問題を扱う数値解法として, 近年 space-time 法と呼ばれる方法が盛んに研究されている<sup>(1, 2)</sup>. 時間方向と空間領域を別々に離散化し, 時間方向に逐次的に問題を解く従来の方法と異なり, space-time 法では時間軸を空間座標に対する追加の軸のように見なすことで, 空間方向と時間方向を同様に扱い問題の離散化を行う. このため space-time 法ではより柔軟な領域分割が可能となることから adaptive refinement が有効であることやより効率的な並列計算が行える<sup>(3)</sup> ことなどが利点として考えられている.

一方, space-time 法に関する研究のほとんどは有限要素法によるものであり, 境界要素法における space-time 法の研究はあまり進んでいないと言える. そこで本稿では熱方程式を支配方程式とする Dirichlet 問題に対する境界積分方程式における space-time 法について論ずる. 本稿で扱う主題は大きく二つに分けられる. 一つ目は space-time 法における層ポテンシャルの計算方法についてである. Galerkin 法によって離散化した, 熱方程式に対する従来の時間域境界要素法では, 時間に関する積分を解析的に行い, 空間に関する積分を特異積分に対応した数値積分公式によって近似的に計算することで, 精度良く層ポテンシャルを計算できることが知られている<sup>(4)</sup>. 本稿ではこの方法を素朴に space-time 法で離散

化した時間域境界要素法に適用すると二つの問題が発生することを示し, この問題を解決した新しい層ポテンシャルの計算方法を示す. 二つ目は Calderon の前処理についてである. space-time 法で得られる線形方程式の係数行列は, ブロック三角行列になるものの密行列であるため, 線形方程式の解法に何らかの高速化が必須である. 現在主流である境界要素法の高速解法としては, 高速多重極法と反復解法を組み合わせる方法と高速直接解法の二種類に大きく分けられるが, 本稿では前者の方法で必要となる反復法における Calderon の前処理について, その理論と実装法を示す.

本稿の構成は以下のとおりである. まず 2 節において熱方程式を支配方程式とする熱拡散問題, 及びこの問題に対する境界積分方程式の定式化を行い, 3 節において space-time 法における層ポテンシャルの計算方法について述べる. 次に 4 節で Calderon の前処理について記す. 5 節でいくつかの数値例を示し, 最後に 6 節にて結論を示す.

## 2. 熱方程式

時刻  $t$  に依存する滑らかな境界  $\Gamma(t)$  に囲まれた 2 次元上の単連結領域を  $\Omega(t) \in \mathbb{R}^2$  とし,  $\Omega(t)$ ,  $(0 < t < T)$  における熱方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0,$$

Dirichlet 境界条件および初期条件

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= g(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma(t) \times (0, T) \\ u(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega(0) \end{aligned}$$

を満たす関数  $u$  を求める問題を考える。

この問題に対応する積分方程式は以下の式で与えられる<sup>(4)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\Gamma(\tau)} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau)q(\mathbf{y}, \tau)d\mathbf{y}d\tau \\ &\quad - \int_0^t \int_{\Gamma(\tau)} \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}_y(\tau)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau)g(\mathbf{y}, \tau)d\mathbf{y}d\tau \\ &\quad + \int_{\Omega(0)} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)f(\mathbf{y})d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (1)$$

ここに

$$q(\mathbf{x}, t) := \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x(t)}(\mathbf{x}, t),$$

$\mathbf{n}_x(t)$  は点  $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$  上での  $\Omega(t)$  から見た外向き法線ベクトル、 $K$  は全領域における 2 次元熱方程式の Green 関数

$$K(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}}{4\pi t} H(t),$$

$H(t)$  は Heaviside 関数である。以下では簡単のため、領域  $\Omega$  とその境界  $\Gamma$ 、法線ベクトル  $\mathbf{n}_x$  が時間に依存しないとして議論を行う。

### 3. space-time 法

#### 3.1. space-time 法を用いた積分方程式の離散化

space-time 法は時間軸を空間座標に次ぐ追加の座標軸と見なし、時間軸と空間座標を同一に扱い、方程式を離散化する数値解法を指す。本節では 2 次元の熱方程式に対する境界積分方程式 (1) を space-time 法を用いて離散化する方法について記す。

まず 2 次元の空間座標に時間軸を追加した 3 次元空間内の領域  $\Omega \times (0, T)$  の境界  $\Gamma \times (0, T)$  を適当なメッシュによって近似する。本稿では三角形メッシュを用いた。例えば  $\Omega$  が半径 1 の円状領域  $B_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | |\mathbf{x}| < 1\}$  の場合、三角形メッシュは Fig. 1 のようになる。次にこのメッシュ上で定義

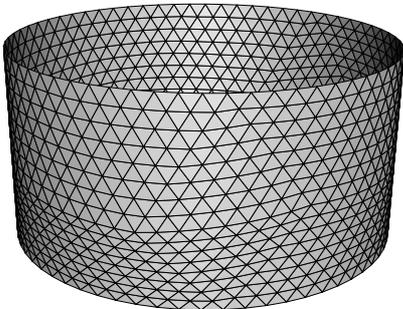


Fig. 1 A triangular mesh for a problem with a circular domain.

される基底  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を導入する。基底  $\phi_i$  の具体例

としては、各三角形要素上で定義される区分一定基底やメッシュの各頂点に関して定義される区分線形基底などがあげられる。この基底を用いて未知関数  $q$  を展開し Galerkin 法を用いることで、積分方程式 (1) は以下の代数方程式に帰着される。

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N \int_0^T \int_{\Gamma} \phi_i(\mathbf{x}, t) \int_0^t \int_{\Gamma} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \phi_j(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau d\mathbf{x} dt \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma} \phi_i(\mathbf{x}, t) \left\{ \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) g(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}g(\mathbf{x}, t) - \int_{\Omega} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\} d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (2)$$

#### 3.2. 積分作用素の計算

本節では線形方程式 (2) における係数行列

$$\int_0^T \int_{\Gamma} \phi_i(\mathbf{x}, t) \int_0^t \int_{\Gamma} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \phi_j(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau d\mathbf{x} dt \quad (3)$$

の計算方法について、 $\phi_i$  として区分一定基底を用いた場合を記す。なお基底  $\phi_i$  として区分線形基底を用いた場合でも、本節で示す方法を用いることで同様に係数行列を計算できることを後に示す。

$\Gamma \times (0, T)$  を三角形メッシュで近似し、メッシュの三角形の数を  $\tilde{N}$ 、各三角形を  $\Gamma_i$  ( $i = 1, \dots, \tilde{N}$ ) とする。 $\phi_i, \phi_j$  にそれぞれ  $\Gamma_i, \Gamma_j$  上で定義される区分一定基底を代入すると、係数行列 (3) は

$$\int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) dS_x dS_y \quad (4)$$

となる。

##### 3.2.1. 時間積分を解析的に行う方法とその問題点

区分一定基底を用いた space-time 法により得られる係数行列 (4) を計算するためには、空間変数  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  及び時刻  $t, \tau$  の計 4 種類の変数に対する積分を計算する必要がある。これは従来の Galerkin 法を用いた時間域境界要素法と同様である。従来法では時刻  $t, \tau$  に関する積分を解析的に行い、空間変数  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  に関する積分を Gauss の積分公式などを使い数値的に評価することで、積分作用素が精度良く計算できることが知られている<sup>(4)</sup>。本節ではこの方法を素朴に式 (4) の計算に応用した際の問題点を示す。

例として  $\Gamma_i = \Gamma_j$  のときの式 (4) の計算を考える。三角形領域  $\Gamma_i$  が時間軸に平行であると仮定すると、

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) dS_x dS_y \\ &= \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{x} \int_{t_{\min}(\mathbf{x})}^{t_{\max}(\mathbf{x})} dt \int_{\mathbf{y}_1}^{\mathbf{y}_2} d\mathbf{y} \int_{t_{\min}(\mathbf{y})}^{t_{\max}(\mathbf{y})} d\tau K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \end{aligned}$$

とできる。ここに  $t_{\min}(\mathbf{x}), t_{\max}(\mathbf{x})$  は三角形  $\Gamma_i$  内で空間座標を  $\mathbf{x}$  に固定した際の時刻  $t$  の最小値及び最大値、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  は  $\Gamma_i$  の空間平面内への射影によって得られる線分の端点である (Fig. 2)。上式における時刻に関する積分

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) := \int_{t_{\min}(\mathbf{x})}^{t_{\max}(\mathbf{x})} dt \int_{t_{\min}(\mathbf{y})}^{t_{\max}(\mathbf{y})} d\tau K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \quad (5)$$

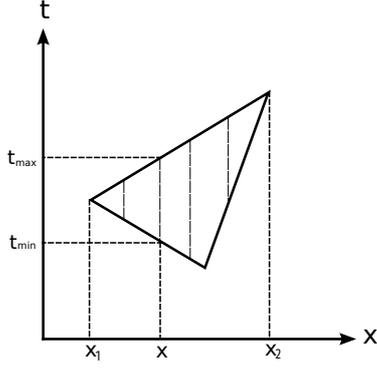


Fig. 2 A triangular domain.

は  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  を固定すると解析的に計算が可能であり, Gamma 関数を用いて表すことができる<sup>(4)</sup>. ただし関数  $f$  は

$$f(\mathbf{x}) = O(\log(|\mathbf{x}|)) \quad (6)$$

程度の特異性を持つことに注意すること. したがって積分

$$\int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{x} \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{y} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7)$$

を適当な数値積分で計算できれば, 式(4)を計算できることがわかる.

三角形  $\Gamma_i$  の頂点のうち, 空間座標  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  に対応しない頂点の空間平面内への射影の座標を  $\mathbf{x}_3$  とする (Fig. 3). 今  $\Gamma_i$

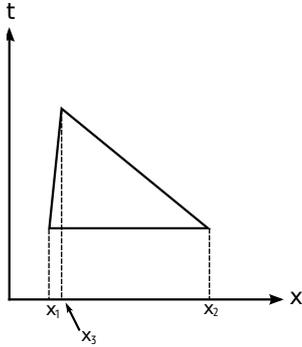


Fig. 3 A triangular domain.

は時間軸に平行であると仮定しているため,  $\mathbf{x}_3$  は  $\mathbf{x}_1$  と  $\mathbf{x}_2$  を結んでできる線分に含まれることに注意すること. 式(5)中の積分の積分範囲に注目すると,  $f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  は  $\mathbf{x}$  もしくは  $\mathbf{y}$  の関数として,  $\mathbf{x}_3$  において連続ではあるが滑らかではないことがわかる. したがって式(7)の積分を数値積分で評価するためには, 二つの積分の積分範囲を  $\mathbf{x}_1$  から  $\mathbf{x}_3$  と  $\mathbf{x}_3$  から  $\mathbf{x}_2$  に分割し, それぞれの積分に数値積分公式を用いなければならない. そのため  $\Gamma_i$  が Fig. 3 に示すような三角形の場合,  $\mathbf{x}_1$  から  $\mathbf{x}_3$  という狭い範囲における変数  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  に対する数値積分を行う必要がある. 非積分関数  $f$  は式(6)程度の特異性のある関数であるため, この  $\mathbf{x}_1$  と  $\mathbf{x}_3$  の距離が十分に近い場合, 数値積分はオーバーフローを起こすことが分かる. この問題は Fig. 3 に示した三角形の様に歪みの無い三角

形であっても, 頂点の空間平面への射影が十分に近い場合に起こる問題であるため, オーバーフローを回避するためにはメッシュに大きな制約が必要となる.

また上の計算では  $\Gamma_i$  が時間軸に平行であることを仮定したが, この制約も無視できないものである. 領域形状  $\Omega$  が時間に依存して変形する場合, 境界  $\Gamma \times (0, T)$  を近似する三角形メッシュが, 一般に時間軸に平行でないことは明らかであるが, 領域形状  $\Omega$  が時間に依存しない場合でも, Fig. 4 に示すように  $\Gamma$  が曲線を含む場合, 境界  $\Gamma \times (0, T)$  上の三点を頂点とする三角形は一般に時間軸に平行ではない.

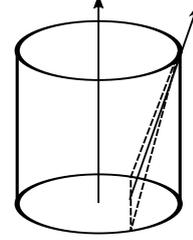


Fig. 4 A triangular patch would be oblique to the time axis even if it is on a surface without deformation.

以上より, 本節で示した方法を用いて積分(4)の計算を精度良く行うためには

- メッシュの全ての頂点の空間平面への射影によって得られる各点が十分に離れている
- メッシュの全ての三角形が時間軸に平行である

というメッシュに対する大きな制約が必要であり, space-time 法の利点の一つであるメッシュの柔軟性が大きく損なわれることが分かる.

### 3.2.2. 空間積分を解析的に行う方法

本節では前節で示した問題点を解決した式(4)の新しい計算方法を示す. 式(4)の積分の計算を以下のように空間座標から先に行うことを考える.

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) dS_i dS_j \\ &= \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \int_{\mathbf{x}_1(t)}^{\mathbf{x}_2(t)} d\mathbf{x} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} d\tau \int_{\mathbf{y}_1(\tau)}^{\mathbf{y}_2(\tau)} d\mathbf{y} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \end{aligned} \quad (8)$$

ここに  $t_{\min}, t_{\max}$  は  $\Gamma_i$  における時刻  $t$  の最小値及び最大値,  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$  は三角形領域  $\Gamma_i$  において時刻座標を  $t$  に制限して得られる線分の端点の空間座標である (Fig. 5).

この式において変数  $\mathbf{y}$  に関する積分は解析的に計算することができる.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{y}_1(\tau)}^{\mathbf{y}_2(\tau)} d\mathbf{y} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left\{ \text{erf} \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2|}{2\sqrt{t-\tau}} \right) - \text{erf} \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_1|}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

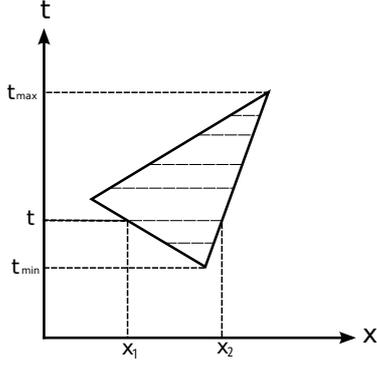


Fig. 5 A triangular patch.

ここに関数  $\text{err}$  は誤差関数

$$\text{err}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

である。誤差関数は有界関数であることに注意すると式 (9) の持つ特異性は  $\tau$  に関する  $O(1/\sqrt{t-\tau})$  程度の弱い特異性のみであり、これは  $\tau$  に関する積分において変数変換  $\sigma = \sqrt{t-\tau}$  を施すことで消去できる。したがって式 (8) は

$$\begin{aligned} & \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} dx \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} d\tau \\ & \cdot \frac{1}{4\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left\{ \text{erf} \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2|}{2\sqrt{t-\tau}} \right) - \text{erf} \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_1|}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \right\} \\ & = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} dx \int_{\sqrt{t-\tau_{\max}}}^{\sqrt{t-\tau_{\min}}} d\sigma \\ & \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \text{err} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_2}{2\sigma} \right) - \text{err} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_1}{2\sigma} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。したがって上式における三つの積分を適当な数値積分公式で計算することで式 (4) の値を得ることができる。これらの数値積分は前節と同様の理由により非常に狭い範囲で実行される可能性があるが、前節の場合と異なり被積分関数が有界であるため、数値的な問題は起こらない。また  $\Gamma_i$  が時間軸と平行でない場合においても、時間軸の  $\Gamma_i$  面内への射影によって得られる直線を考え、式 (8) における時間積分を形式的にこの直線上での積分に入れ替えることで、上と同様の計算が可能である。したがって本節で示した計算方法では、前節で述べたメッシュへの制約などを課すことなく層ポテンシャルの計算を行うことが可能である。

なお基底が区分線形基底の場合も、被積分関数の特異性は区分一定基底の場合と同じであるため、本節の議論が同様に成り立ち、本節で示した計算法によって層ポテンシャルを精度良く計算できることがわかる。

#### 4. Calderon の前処理

本節ではまず 4.1 節にて Calderon の公式の導出を行い、4.2 節で Calderon の公式を用い前処理行列を構成する。

##### 4.1. Calderon の公式

熱方程式に限らず、様々な偏微分方程式における境界積分方程式に対する Calderon の公式は、同値な式である Calderon

の射影作用素の形で多くの先行研究において導出されており、熱方程式における Calderon の射影作用素も<sup>(5)</sup> など与えられている。本節では熱方程式において、Calderon の公式を積分方程式と解の表現定理から導出する方法を示す。

積分方程式 (4) および解の法線微分に関する積分方程式

$$\frac{1}{2}u = Sq - Du + S_0f, \quad (10)$$

$$\frac{1}{2}q = D^*q - Nu + D_0f, \quad (11)$$

に加え解  $u$  とその法線微分に関する表現定理

$$u = S\phi + \frac{1}{2}\psi - D\psi + S_0f \quad (12)$$

$$q = \frac{1}{2}\phi + D^*\phi - N\psi + D_0^*f \quad (13)$$

を用いて、Calderon の公式を導出する。ここに

$$Sv = \int_0^t \int_{\Gamma} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau)v(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y}d\tau$$

$$Dv = \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau)v(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y}d\tau$$

$$D^*v = \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau)v(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y}d\tau$$

$$Nv = \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau)v(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y}d\tau,$$

$$S_0w = \int_{\Omega} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)w(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$$D_0^*w = \int_{\Omega} \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)w(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$\phi, \psi$  は境界  $\Gamma \times (0, T)$  上で定義される任意関数である。表現定理 (12), (13) を積分方程式 (10) に代入すると以下の式を得る:

$$\begin{aligned} & (SD^* - DS)\phi + \left( DD - SN - \frac{1}{2}I \right) \psi \\ & = - \left( \frac{1}{2}S_0f + SD_0^*f - DS_0f \right). \end{aligned} \quad (14)$$

ただし  $I$  は単位作用素である。ここで右辺に着目すると

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{1}{2}S_0f + SD_0^*f - DS_0f \right) \\ & = \frac{1}{2}S_0f - S \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} S_0f \right) + DS_0f - S_0f \end{aligned} \quad (15)$$

となり、積分方程式 (10) の  $u$  に  $S_0f$  を代入したものであることがわかる。 $S_0f$  は

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} S_0f & = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}}}{4\pi t} w(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ & = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ & = f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

より初期値  $f$  であり、また明らかに熱方程式を満たすため、式 (15) は 0 である。したがって  $\phi, \psi$  が任意関数であることに注意すると、式 (14) より

$$SD^* - DS = 0 \quad (16)$$

$$DD - SN = \frac{1}{4}I \quad (17)$$

を得る. 同様に積分方程式 (11) に表現定理 (12),(13) を代入し, 計算することで

$$-D^*N + \mathcal{N}D = 0 \quad (18)$$

$$D^*D^* - \mathcal{N}S = \frac{1}{4}I \quad (19)$$

を得る. 式 (16)~(19) は Calderon の公式と呼ばれる.

熱方程式に対する Calderon の公式 (16)~(19) は, 各作用素内に現れる Green 関数の定義を適切に変更することで, Laplace 方程式や Helmholtz 方程式に対する Calderon の公式と形式的に一致する. そのためこれらの方程式における Calderon の前処理の考え方が, 熱方程式においても有効であることがわかる.

#### 4.2. 離散化

作用素  $D$  がコンパクト作用素であることから, 式 (17) より作用素  $\mathcal{N}$  はコンパクト作用素を除いて単位作用素の定数倍であることがわかる. 解くべき方程式 (1) の係数行列は作用素  $S$  を離散化して得られる行列であるため, 作用素  $\mathcal{N}$  を離散化することで前処理行列が得られることが分かる.

作用素  $S, \mathcal{N}$  の性質より,  $S$  は区分一定基底で,  $\mathcal{N}$  は区分線形基底で離散化するのが自然であるが, 同一の三角形メッシュ上で定義される区分一定基底と区分線形基底の数は一般に異なるため, 作用素  $S, \mathcal{N}$  を Galerkin 法で離散化して得られる行列  $S, N$  のサイズが一致しないという問題が起こる. この問題の解決法として三角形メッシュを分割することで新しいメッシュを作成し, その上で, 元のメッシュで定義される区分一定基底と同数の区分線形基底を構成することで,  $S, \mathcal{N}$  を離散化して得られる行列のサイズを一致させる方法が知られているが, 本稿では  $S, \mathcal{N}$  とともに区分線形基底で離散化することでこの問題を解決する. この方法は元のメッシュを分割する方法に比べて, 行列の計算にかかる時間, メモリ量が少ないという利点があるが, 領域形状に角がある場合に精度が悪化する問題がある.

区分線形基底を  $\phi_i$  として, 式 (17) を Galerkin 法で離散化すると

$$S\tilde{T}^{-1}N\tilde{T}^{-1} = -\frac{1}{4}I + D\tilde{T}^{-1}D\tilde{T}^{-1} \quad (20)$$

となる. ここに

$$\begin{aligned} (S)_{ij} &= \int_0^T \int_{\Gamma} \phi_i(\mathbf{x}, t) \\ &\quad \cdot \int_0^t \int_{\Gamma} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \phi_j(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau d\mathbf{x} dt, \\ (N)_{ij} &= \int_0^T \int_{\Gamma} \phi_i(\mathbf{x}, t) \\ &\quad \cdot \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 K}{\partial n_x \partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \phi_j(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau d\mathbf{x} dt, \\ (D)_{ij} &= \int_0^T \int_{\Gamma} \phi_i(\mathbf{x}, t) \\ &\quad \cdot \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial K}{\partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \phi_j(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau d\mathbf{x} dt, \\ (\tilde{T})_{ij} &= \int_0^T \int_{\Gamma} \phi_i(\mathbf{x}, t) \phi_j(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt, \end{aligned}$$

$(X)_{ij}$  は行列  $X$  の  $ij$  要素を表す. 行列  $D\tilde{T}^{-1}D\tilde{T}^{-1}$  はコンパクト作用素を離散化して得られる行列であることに注意すると, 式 (20) より, 行列  $S\tilde{T}^{-1}N\tilde{T}^{-1}$  が良条件行列であることが期待される. 以上より, 方程式 (2) を反復解法で解く際, 右前処理行列として行列  $\tilde{T}N^{-1}\tilde{T}$  を用いることで, 反復回数の削減が期待されることわかる.

#### 5. 数値計算例

まず  $\Omega$  として半径 1 の円形領域を考えた. 初期条件  $f = 0$ , 境界条件  $g(\mathbf{x}, t) = t^2$  としたとき, この問題の解析解は

$$u = t^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k |\mathbf{x}|)}{\alpha_k^3 J_1(\alpha_k)} \left\{ t - \frac{1}{\alpha_k^2} (1 - e^{-\alpha_k^2 t}) \right\}$$

で与えられる<sup>(4)</sup>. ここに  $\alpha_k$  は 0 次 Bessel 関数の小さい方から  $k$  個目の正の零点である. これを用いて本数値解法の精度の検証を行った.

積分作用素の計算に必要な数値積分公式として, 積分点 6 点の Gauss の公式を用いた. 線形方程式の反復解法としては許容誤差  $10^{-5}$  の Generalized Minimal RESidual (GMRES) 法を用いた. Calderon の前処理に必要な  $\tilde{T}^{-1}$  の計算も許容誤差  $10^{-5}$  の GMRES で行った. また時刻の最大値を  $T = 1$  とした.

前処理法は前節で示した Calderon の前処理に加え, Point Jacobi 法と前処理無しの 3 種類の数値解法について, 様々な要素数のメッシュを用いて比較を行った. Fig. 6 は  $\Gamma \times (0, T)$  上における  $L^2$  相対誤差, Fig. 7 は GMRES の反復回数をプロットした図である. 相対誤差は前処理の種類に依らず, ま

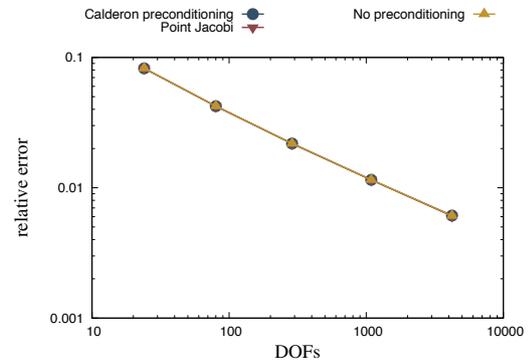


Fig. 6 The relative error for the problem with a cylinder.

たメッシュを細かくするほど誤差の値が小さくなっていることがわかる. 反復回数については, 全てのケースにおいて Calderon の前処理が最も少ない反復回数で収束した. また期待されたとおり, Calderon の前処理ではメッシュを細かくしても反復回数がそれほど増加しない一方で, 他の二解法では反復回数が増加した.

次に領域形状が時刻に伴って変形する例として, 時刻  $t$  に対し領域が半径  $r = 1 + t$  の円形領域であるような問題を解いた. 初期条件  $f = \|\mathbf{x}\|^2/4$ , 境界条件  $g = t + \|\mathbf{x}\|^2/4$  とす

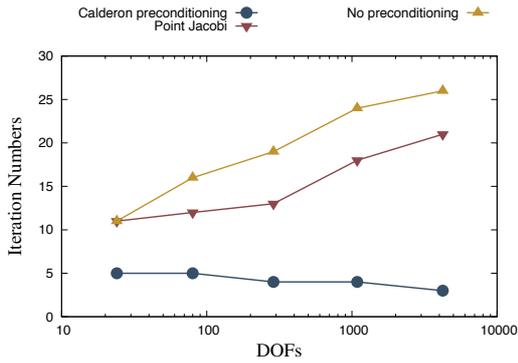


Fig. 7 The iteration number for the problem with a cylinder.

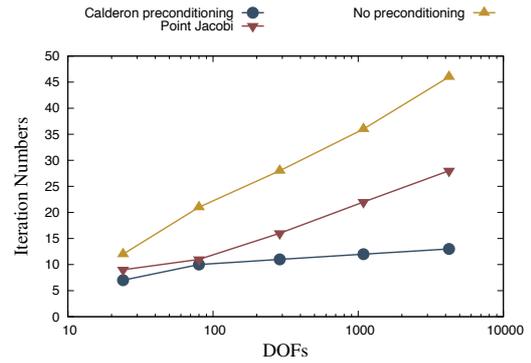


Fig. 10 The iteration number for the problem with an expanding cylinder.

ると、解は  $u = t + \|\mathbf{x}\|^2/4$  となる。Fig. 8 にこの問題を解くために用いたメッシュの一例を示す。

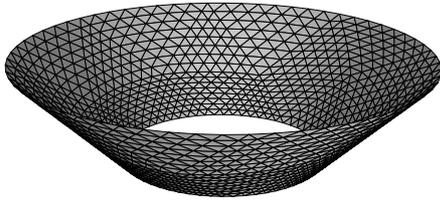


Fig. 8 A triangular mesh for the problem with an expanding cylinder.

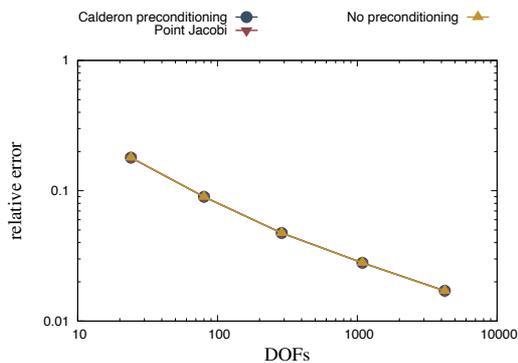


Fig. 9 The relative error for the problem with an expanding cylinder.

この問題においても数値積分公式や GMRES のパラメータとして上の例と同じ値を用いた。様々な細かさのメッシュに対して領域境界  $\Gamma \times (0, T)$  上における  $L^2$  誤差と GMRES の反復回数をプロットした図が Figs. 9, 10 である。この問題においても相対誤差と反復回数は、Figs. 6, 7 と同様の特徴を示していることが分かる。

## 6. 結論

本稿では二次元領域において熱方程式を支配方程式とする Dirichlet 問題に対する space-time 法を用いた時間域境界要素法について論じた。従来の Galerkin 法を用いた時間域境界要素法における層ポテンシャルの計算法を、space-time 法で得られる積分方程式の計算に素朴に適用した場合、計算がオーバーフローすることを示し、この問題を解決する新しい計算方法を提案した。また熱方程式に対する Calderon の公式を導出し、space-time 法における Calderon の前処理の実装を示した。

今後の課題として、space-time 境界要素法における高速解法の開発や安定性の解析が挙げられる。また波動方程式や時間域の Maxwell 方程式における space-time 境界要素法の研究も今後の課題である。

## 参考文献

- (1) Olaf Steinbach. Space-time finite element methods for parabolic problems. *Computational Methods in Applied Mathematics*, Vol. 15, No. 4, pp. 551–566, 2015.
- (2) Truman Ellis, Jesse Chan, and Leszek Demkowicz. Robust DPG methods for transient convection-diffusion. In *Building Bridges: Connections and Challenges in Modern Approaches to Numerical Partial Differential Equations*, pp. 179–203. Springer, 2016.
- (3) Martin J Gander and Martin Neumüller. Analysis of a new space-time parallel multigrid algorithm for parabolic problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 38, No. 4, pp. A2173–A2208, 2016.
- (4) Patrick James Noon. *The single layer heat potential and Galerkin boundary element methods for the heat equation*. PhD thesis, University of Maryland, College Park, 1988.
- (5) Martin Costabel. Boundary integral operators for the heat equation. *Integral Equations and Operator Theory*, Vol. 13, No. 4, pp. 498–552, 1990.