

## SPH による超弾性体の計算の安定化

## STABILIZATION OF SPH FOR HYPER-ELASTIC MATERIAL

西藤 潤<sup>1)</sup>, 草地 陵平<sup>2)</sup>

Jun SAITO and Ryohei KUSACHI

1) 京都大学大学院工学研究科 (〒 617-0824 京都市西京区京都大学桂 C, E-mail: saito.jun.3n@kyoto-u.ac.jp)

2) 京都大学大学院工学研究科 (〒 617-0824 京都市西京区京都大学桂 C, E-mail: kusachi@basewall.kuciv.kyoto-u.ac.jp)

Updated Lagrangian formulation by conventional smoothing particle hydrodynamics (SPH) for hyper-elastic material causes numerical instability such as zero energy mode or tensile instability. To control these numerical instability, non-physical terms are widely used. These terms work well but they include indeterministic parameters that depend on problems. To stabilize calculation without non-physical term, we use gradient of deformation gradient. The high order term restricts numerical instability and improves accuracy. We solved two problems, bar extension problem and rings collision problem and the results show that the proposed method can suppress the numerical instability.

**Key Words:** Corrected Smoothed Particle Hydrodynamics, hyperelasticity, numerical instability

## 1. はじめに

本研究では、地盤材料に見られる弾塑性材料の大変形を解析するための前段階として、SPH を用いた超弾性体の動的解析手法の開発を行う。地盤崩壊のような大変形に対して有限要素法を用いるとメッシュが変形を追い切れずに潰れ、計算が困難になることがある。一方で、メッシュを持たず Lagrangian 的観測をする粒子法は、大変形の追従が得意である。本研究では、解析手法には粒子法のひとつである Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)<sup>(1)</sup> を用いる。SPH は流体解析で広く用いられている手法であるが、弾性の解析に用いると引張不安定<sup>(2)</sup> やゼロエネルギーモード<sup>(3)</sup> などの数値不安定が生じることが知られている。Gray ら<sup>(4)</sup> は、人工粘性および人工応力を加えることで計算不安定を解消した。しかし、人工粘性と人工応力の二つの計算において、それぞれ非物理的なパラメータの決定が必要になる。また、Bonet・Kulasegaram ら<sup>(3)(5)(6)</sup> は Total Lagrangian に基づく SPH の定式化をした。彼らはカーネル関数を修正して計算精度を向上させる Corrected SPH (CSPH) を導入し、仮想仕事の原理に基づいて定式化を行った。しかし、彼らの手法を Updated Lagrangian に拡張すると、数値不安定が生じ適切な解が得られないという問題点がある。この問題に対して Vidal ら<sup>(7)(8)</sup> は CSPH の修正勾配に安定化項を加えることで数値的不安定を回避した。しかし、安定化項は非物理項であり、それに含まれるベクトルパラメータの決め方は

定まっていない。そこで、本研究では、Bonet らの CSPH を Updated Lagrangian に拡張し、非物理項を用いず、数値不安定性を抑制する方法を提案する。

## 2. SPH による超弾性体の動的解析

## 2.1. CSPH による勾配の計算

SPH では粒子  $a$  の物理量を以下の式で近似する。

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle_a = \sum_b f_b W_{ab} V_b \quad (1)$$

$b$  は粒子  $a$  の近傍粒子、 $f_b$ 、 $V_b$  はそれぞれ粒子  $b$  の物理量と体積を表している。 $W_{ab}$  は粒子  $a$  と  $b$  の間のカーネル関数である。カーネル関数は、Monaghan<sup>(1)</sup> によって提唱された Cubic Spline を用いる。

物理量  $f(\mathbf{x})$  の勾配は、式 (1) を用いて次のように書くことが出来る。

$$\langle \nabla f \rangle_a = \sum_b f_b \nabla W_{ab} V_b \quad (2)$$

上式では勾配を計算する近傍粒子が少ないと微分の精度が得られないので、 $\nabla W_{ab} V_b$  を補正した関数  $\mathbf{g}_a(\mathbf{x}_b)$  を用いる<sup>(9)</sup>。

$$\langle \nabla f \rangle_a = \sum_b f_b \mathbf{g}_a(\mathbf{x}_b) \quad (3)$$

と表される。 $\mathbf{g}_a(\mathbf{x}_b)$  は

$$\mathbf{g}_a(\mathbf{x}_b) = V_b \mathbf{L}_a [\nabla W_{ab} + \boldsymbol{\varepsilon}_a \delta_{ab}] \quad (4)$$

で定義され、 $L_a, \varepsilon_a$  は

$$\sum_b \mathbf{g}(\mathbf{x}_b) = \mathbf{0}, \quad \sum_b \mathbf{x}_b \otimes \mathbf{g}(\mathbf{x}_b) = \mathbf{I} \quad (5)$$

を満足するように定める. この修正した勾配を用いる方法を Corrected SPH(CSPH) と呼ぶ.

## 2.2. 運動方程式

弾性体の運動方程式は次式で表される.

$$\rho_0 \mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}_0 \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{P}$  は加速度、第一 Piola-Kirchhoff 応力である.  $\mathbf{X}$  は物質座標である. また、 $\mathbf{b}_0$ 、 $\rho_0$  は初期配置における物体力、密度である. 初期配置における表面力  $\mathbf{t}_0$ 、体積を  $V_0$  とすると、仮想変位速度  $\delta \mathbf{v}$  との内積を取ることで次式を得る.

$$\int_{V_0} \rho_0 \mathbf{a} \delta \mathbf{v} dV + \int_{V_0} \mathbf{P} : \delta \dot{\mathbf{F}} dV = \int_{V_0} \mathbf{b}_0 \delta \mathbf{v} dV + \int_{\partial V_0} \mathbf{t}_0 \delta \mathbf{v} dA \quad (7)$$

は二重縮約である. 左辺の第二項は内部仕事率  $\dot{\Pi}_{\text{int}}$  の変分であり. 仮想速度をくくりだすことで内力  $\mathbf{T}^{\text{int}}$  を計算することができる.

$$\int_{V_0} \mathbf{P} : \delta \dot{\mathbf{F}} dV = \int_{V_0} \mathbf{T}^{\text{int}} \cdot \delta \mathbf{v} dV \quad (8)$$

## 2.3. Updated Lagrangian CSPH

Vidal ら<sup>(7)</sup> の提案した Updated Lagrangian に基づく定式化について説明する. ただし、非物理項はここでは加えない.

粒子の初期位置を  $\mathbf{X}$ 、参照配置を  $\mathbf{x}^r$ 、現配置を  $\mathbf{x}^n$  (Fig.1 参照) とすると、粒子  $a$  における参照配置から現配置へ変形勾配の増分  $\mathbf{f}_a$  および初期配置から現配置への変形勾配  $\mathbf{F}_a^n$  は次式で表される.

$$\mathbf{f}_a = \nabla_{\mathbf{x}^r} \mathbf{x}_a^n = \sum_b \mathbf{x}_b^n \otimes \mathbf{g}_a(\mathbf{x}_b^r) \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_a^n = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}_a^n = \frac{\partial \mathbf{x}_a^n}{\partial \mathbf{x}_a^r} \frac{\partial \mathbf{x}_a^r}{\partial \mathbf{X}_a} = \mathbf{f}_a \mathbf{F}_a^r \quad (10)$$

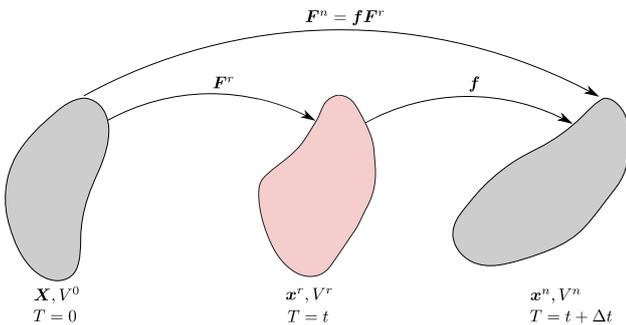


Fig.1 変形物の運動

次に粒子がもつ内力を仮想仕事の原理から求める. 弾性体の仮想的な内力仕事率は式 (8) から式変形して次のように書ける.

$$\int_{V_0} \mathbf{P} : \delta \dot{\mathbf{F}}^n dV_0 \sim \sum_a V_{0a} \mathbf{P}_a : \delta \dot{\mathbf{F}}_a^n \quad (11)$$

$$= \sum_b \delta \mathbf{v}_b \cdot \left( \sum_a V_{0a} \mathbf{P}_a [\mathbf{F}_a^r]^T \mathbf{g}_a(\mathbf{x}_b^r) \right) \quad (12)$$

よって、粒子  $a$  とその近傍粒子  $b$  の間に成り立つ内力  $\mathbf{T}_a$  は

$$\mathbf{T}_a^{\text{int}} = \sum_b V_{0b} \mathbf{P}_b [\mathbf{F}_b^r]^T \mathbf{g}_b(\mathbf{x}_a^r) \quad (13)$$

となる.

## 2.4. 速度と位置の更新

式 (7) を離散化し、仮想速度  $\delta \mathbf{v}$  を消去すると、以下の運動方程式を得る.

$$m_a \mathbf{a}_a = \mathbf{T}_a^{\text{int}} + \mathbf{T}_a^{\text{ext}} \quad (14)$$

これにより得られた加速度  $\mathbf{a}_a$  を用いて、速度  $\mathbf{v}_a$  と位置  $\mathbf{x}_a$  の更新は以下のように計算する.

$$\mathbf{v}_a^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}_a^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \mathbf{a}_a^n \quad (15)$$

$$\mathbf{x}_a^{n+1} = \mathbf{x}_a^n + \Delta t \mathbf{v}_a^{n+\frac{1}{2}} \quad (16)$$

タイムステップ  $\Delta t$  は Courant 条件に従う. すなわち、Courant 数  $\alpha$ 、音速  $c$  として

$$\Delta t = \alpha \frac{h}{c} \quad (17)$$

とする.

## 2.5. ゼロエネルギーモード

SPH の微分作用素は、差分法における中央差分のような形になるため、ゼロエネルギーモードを生じる原因となりうる. ここでは、ゼロエネルギーモードを一次元のモデルで説明する. 粒子が直線上に均等に並んでおり、修正勾配が以下のように与えられるとする.

$$g_a(x_{a-1}) = -\frac{1}{2h}, \quad g_a(x_a) = 0, \quad g_a(x_{a+1}) = \frac{1}{2h} \quad (18)$$

粒子  $a$  において SPH により得られる関数  $\phi_a(x)$  の勾配は

$$\left\langle \frac{d\phi}{dx} \right\rangle_a = \frac{\phi_{a+1}(x) - \phi_{a-1}(x)}{h} \quad (19)$$

で表される. 例えば、関数  $\phi_a(x) = (-1)^a$  が与えられると、その勾配は

$$\left\langle \frac{d\phi}{dx} \right\rangle_a = \frac{(-1)^{a+1} - (-1)^{a-1}}{h} = 0 \quad (20)$$

となる. このように、定数でない関数に対して勾配が 0 となることがある. 力学モデルにおいては、変形の勾配が 0 であるにもかかわらず、変形が許容されることになる. そのため、2章で示した定式化をそのまま用いると、数値的に不安となることがある.

## 2.6. 修正変形勾配の適用

ゼロエネルギーモードを発生させないために、変形勾配に対して Taylor 展開の一次近似を考える. 高次の項を入れることで、勾配が線型関数となり、勾配をより正確に表すことが可能となる. その結果、ゼロエネルギーモードを排除することが可能となる.

$$\mathbf{F}_{b(a)}^n = \mathbf{F}_a^n + \nabla_{\mathbf{x}^r} \mathbf{F}_a^n (\mathbf{x}_b^r) \quad (21)$$

修正変形勾配  $\mathbf{F}_{b(a)}^n$  は粒子  $a$  から見た粒子  $b$  の変形勾配を示している。ここで  $\nabla_{\mathbf{x}^r} \mathbf{F}^n$  の計算は次の二式を介して得られる。

$$\nabla_{\mathbf{x}^r} \mathbf{F}^n = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{F}^r (\mathbf{F}^r)^{-1} \quad (22)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{F}^n = (\nabla_{\mathbf{x}^r} \mathbf{f}) \mathbf{F}^r + \mathbf{f} (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{F}^r) \quad (23)$$

式 (23) の  $\nabla_{\mathbf{x}^r} \mathbf{f}$  は、以下に示すように重み付き最小二乗法により計算する。現在の座標位置  $\mathbf{x}^n$  を参照配置  $\mathbf{x}^r$  の関数として Taylor 展開し、2 次より大きな項を無視すると

$$\mathbf{x}_b^n \sim \mathbf{x}_a^r + \nabla \mathbf{f} \mathbf{x}_{ba} + \mathbf{x}_{ba}^r{}^T (\nabla_{\mathbf{x}^r} \mathbf{f}) \mathbf{x}_{ba}^r \quad (24)$$

を得る。式 (24) が良い近似となるように、左辺と右辺の差を最小化する。

$$I = \sum_b \left| \left( \mathbf{f}^a - \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}^r} \mathbf{f}^a \mathbf{x}_{ba}^r \right) \mathbf{x}_{ba}^r - \mathbf{x}_{ba}^n \right|^2 W_{ab} \quad (25)$$

式 (25) を最小化すると、以下の線型方程式に帰着する。

$$\sum_b z_p^{ab} z_q^{ab} \nabla_{\mathbf{x}} f_{iq}^a \widehat{W}^{ab} = 2 \sum_b z_p^{ab} y_i^{ab} \widehat{W}^{ab} \quad (26)$$

ここで、変数  $y$  および  $z$  は次式で表される。

$$y_i^{ab} = f_{ij}^a x_j^{r,ab} - x_i^{n,ab} \quad (27)$$

$$z_p^{ab} = x_j^{r,ab} x_k^{r,ab} \quad (28)$$

また、添字  $p, q$  はそれぞれ下付き添字  $(j, k), (l, m)$  の集合を表す。本論文では、インデックス表記の場合、上付き添字を粒子番号、下付き添字を空間の方向成分とする。

修正された変形勾配を用いて内力  $\mathbf{T}^{\text{int}}$  を計算する。まず、単位体積あたりの内部仕事率の重み付き平均を求める。

$$\langle \mathbf{P} : \delta \dot{\mathbf{F}}^n \rangle_a = \sum_b \mathbf{P}_{b(a)} : \delta \dot{\mathbf{F}}_{b(a)}^n \widehat{W}_{ab} \quad (29)$$

$$\widehat{W}_{ab} = \frac{W_{ab} V_b}{\sum_b W_{ab} V_b} \quad (30)$$

これにより、式中に修正変形勾配  $\mathbf{F}_{b(a)}$  が現れる。粒子  $a$  から見た粒子  $b$  における第一 Piola-Kirchhoff 応力  $\mathbf{P}_{b(a)}$  は修正変形勾配を用いて以下のように得られる。

$$\mathbf{P}_{b(a)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{F}_{b(a)}} \quad (31)$$

ここで、 $\Phi$  はポテンシャルである。式 (29) より内部仕事率は次式で与えられる。

$$\int_{V_0} \mathbf{P} : \delta \dot{\mathbf{F}}^n dV_0 \sim \sum_{a=1} V_{0a} \sum_b \mathbf{P}_{b(a)} : \delta \dot{\mathbf{F}}_{b(a)}^n \widehat{W}_{ab} \quad (32)$$

ここで、2.3 節に示したように、式 (32) から仮想速度  $\delta \mathbf{v}$  をくりだすことで内力  $\mathbf{T}^{\text{int}}$  を得ることができる。これより、

粒子  $d$  の  $x_l$  方向成分の内力  $T^{\text{int}}_l^d$  は次式で書ける。

$$\begin{aligned} T^{\text{int}}_l^d &= \sum_{a,b} \widehat{P}_{lk}^{ab} F_{jk}^{r,ab} g_j^{ad} \\ &- \sum_{a,b} \widehat{P}_{lj}^{ab} g_j^{ad} \left[ (Z^{ac})_{pq}^{-1} \sum_e z_p^{ae} x_j^{ae} V^{0,a} \widehat{W}^{ae} \right] F_{nj}^{r,a} F_{ms}^{r,a} (F^{r,a})_{sk}^{-1} x_k^{ab} \\ &+ 2 \sum_b \widehat{P}_{lj}^{ab} \left[ (Z^{dc})_{pq}^{-1} \sum_e z_p^{de} V^{0,d} \widehat{W}^{de} \right] F_{nj}^{r,d} F_{ms}^{r,d} (F^{r,d})_{sk}^{-1} x_k^{db} \\ &- 2 \sum_{a,b} \widehat{P}_{lj}^{ab} \left[ (Z^{ac})_{pq}^{-1} \sum_e z_p^{ad} V^{0,a} \widehat{W}^{ad} \right] F_{nj}^{r,a} F_{ms}^{r,a} (F^{r,a})_{sk}^{-1} x_k^{ab} \\ &- \sum_{a,b} \widehat{P}_{lk}^{ab} g_m^{ad} \nabla_X F_{mjs}^{r,a} (F^{r,a})_{sk}^{-1} x_k^{ab} \end{aligned} \quad (33)$$

ここで、 $\widehat{P}_{lj}^{ab}, Z_{pq}^{ab}$  は以下の式で表される変数である。

$$\widehat{P}_{lj}^{ab} = V^{0,a} \widehat{W}^{ab} P_{lj}^{ab} \quad (34)$$

$$Z_{pq}^{ab} = z_p^{ab} z_q^{ab} V^{0,a} \widehat{W}^{ab} \quad (35)$$

この内力を用いることで、数値的に安定な計算が可能となる。計算のフローを Algorithm 1 に示す。

---

#### Algorithm 1 計算のフロー

---

データの読み込み

**for** particles **do**

近傍粒子の探索

修正勾配  $g_a$  の計算

変形勾配  $\mathbf{F}_a$ , 修正変形勾配  $\mathbf{F}_{b(a)}$  の計算

内力の計算  $\mathbf{T}_a^{\text{int}}$

速度  $\mathbf{v}_a$ , 配置  $\mathbf{x}_a$  の更新

**end for**

---

### 3. 数値解析例

#### 3.1. 一次元解析

Dyka<sup>(10)</sup> の数値解析例を参考に弾性体の棒を一次元として伸縮運動を計算する。この問題は Vidal ら<sup>(7)</sup> によって示されているように、Updated Lagrangian に基づく SPH で、安定化項を用いずに解くと、数値不安定が発生し、棒が単調に伸び続ける結果となる。

Fig.2 は左端を固定端、右端を自由端とした厚みを考慮しない長さ 0.1333 m の一次元の線形弾性体である。物性は弾性定数  $\kappa$  を 0.03 MN/m<sup>2</sup>, 線密度 1.0 kg/m で与えている。粒子の距離間隔は  $3.418 \times 10^{-3}$  m で 40 個の粒子を固定端、自由端上を含めて配置する (Fig.2 参照)。また初期条件として、右端の 10 個の粒子に対して、右方向に速度 5.0 m/s を与える。クーラン数  $\alpha$  は  $1.0 \times 10^{-2}$  とする。

自由端の変位の時間経過を Fig. 3, 4 に示す。図にはまた、Fig.5, 6 に自由端の速度を示す。本論文で示した Updated Lagrangian に基づく手法に加え、提案手法を Total Lagrangian に適用した手法の結果も示した。Total Lagrangian に基づく

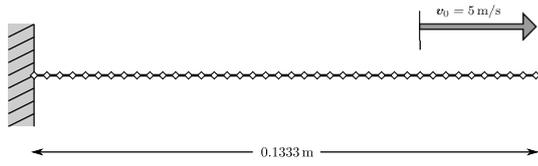


Fig. 2 一次元弾性体

定式化は、式 (21) において、空間座標系ではなく物質座標系を用いることで、Updated Lagrangian と同様に導出できる。また、比較のため、Bonet<sup>(5)</sup> の手法、FEM による結果をプロットした。提案手法と参照した手法について変位および速度の変化は良好な一致を示している。

また、Fig. 4, 6 が示すように Updated Lagrangian に基づく提案手法は、提案手法を Total Lagrangian に適用した場合の結果とよく一致している。Total Lagrangian に基づく定式化では、初期配置と現配置の関係を用いて直接、変形勾配を計算しているため、変更勾配は正しく計算されている。これより、Updated Lagrangian を用いた提案手法においても、変形勾配の更新が精度よく行われていることが分かる。

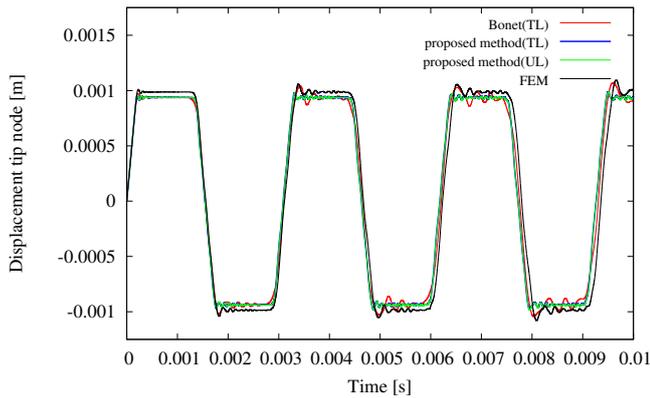


Fig. 3 自由端の変位

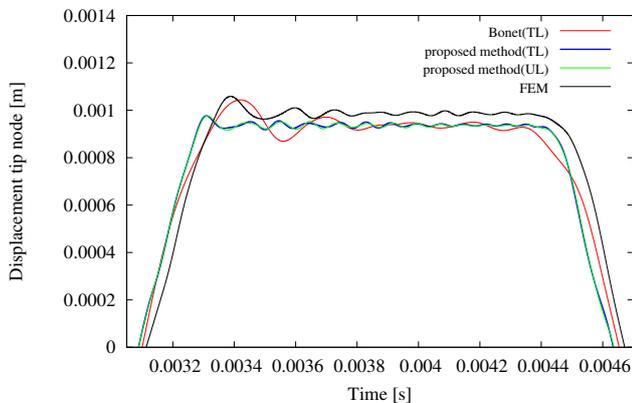


Fig. 4 自由端の変位 (0.0031s ~ 0.0047s)

### 3.2. 二次元解析

二次元解析として二つの超弾性体のリングが衝突したとき

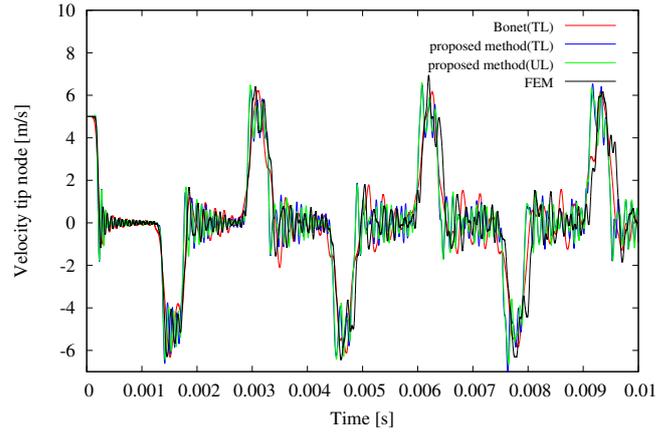


Fig. 5 自由端の速度

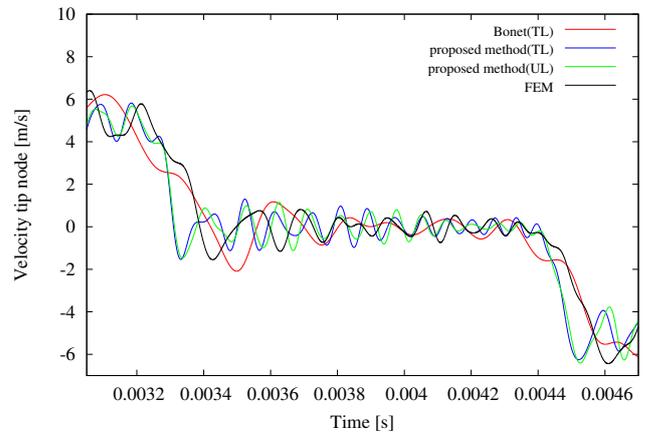


Fig. 6 自由端の速度 (0.0031s ~ 0.0047s)

の個々のリングの変形を計算をする。この問題を、安定化項のない Updated Lagrangian に基づく SPH で解くと、粒子間距離が大きくなり、リングが数カ所で割れる結果が得られ、適切に問題が解けない。Fig.7 の二つのリングは同じ寸法で内径 3 cm、外径 4 cm であり、初期配置として二つのリングの間隔は最も短いところで 1 cm 離れている。

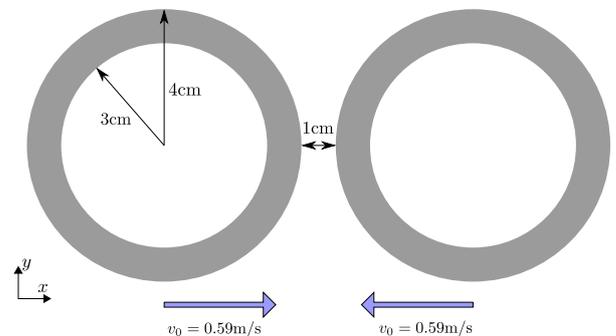


Fig. 7 二次元超弾性体

物性も同一であり、ともに nearly incompressible Neo Hookean モデルに従うものとする。nearly incompressible Neo Hookean

のポテンシャルは以下で与えられる.

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\mu(\text{tr}\hat{\mathbf{C}} - 3) + \frac{1}{2}\kappa(J - 1)^2 \quad (36)$$

ここで, テンソル  $\hat{\mathbf{C}}$  は修正右 Cauchy-Green 変形テンソル  $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}}$  である.  $\hat{\mathbf{F}}$  は Flory の変形勾配テンソル  $\hat{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}}\mathbf{F}$  である. この問題では弾性定数  $\mu$  を  $0.3571 \text{ MN/m}^2$ , 弾性定数  $\kappa$  を  $1.67 \text{ MN/m}^2$  で与える. Gray<sup>(4)</sup> の解析例を参考に解析では二つの物体の初速はそれぞれ  $0.59 \text{ m/s}$ , 相対初速が  $1.18 \text{ m/s}$  となるように与えて近づけていき, 正面から衝突させる. 進行方向  $x$  軸に鉛直な方向を  $y$  方向とする. クーラン数は  $0.01$  を用いた. また, 二つのリングをそれぞれリング  $A$ , リング  $B$  とする. この解析では陽的計算で物体同士の衝突を表現するために, リング  $A$  の粒子とリング  $B$  の粒子が接近した時にそれぞれの粒子に反発力を与える. リング  $A$  の粒子  $a$  に作用する反発力  $R_a$  は以下のように定める.

$$R_a = \frac{\kappa \sum_b V_b W_{ab}}{\sum_{\hat{a}} V_{\hat{a}} W_{a\hat{a}}} \quad (37)$$

ここで, リング  $A$  の粒子  $a$  の近傍粒子のうち, リング  $A$  の粒子を  $\hat{a}$ , リング  $B$  の粒子を  $b$  とする. この式で与えられる反発力は, リング間の距離が短くなったときに増大する. したがって, リング同士が近づくことで反発力が増大する. ここで得られた反発力を用いて, 次式のように速度を更新する.

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a - \Delta t \left\{ \sum_c m_b \left( \frac{R_a}{\rho_a^2} + \frac{R_b}{\rho_b^2} \right) \nabla W_{ab} \right\} \quad (38)$$

式 (38) 右辺第二項は, 作用反作用を考慮した形になっており, SPH の計算で標準的に用いられる式である<sup>(1)</sup>.

$0.01 \text{ s}$  ごとのスナップショットを Fig.8 に示す. これらの図は Vidal ら<sup>(7)</sup> の結果と似た分布を示している. また, 数値不安定性によりリングが割れるような挙動は示さず, 弾性体として計算されていることが分かる.

$y$  方向の最大変位を Fig.9 に示す. 本研究の提案手法およびそれを Total Lagrangian に拡張した手法, Bonet ら<sup>(5)</sup> の手法による結果をそれぞれプロットした. なお, Bonet らの論文では, 反発力の式が明示されていなかったため, ここでは Bonet らの手法でも式 (37) を用いて反発力を計算した. 提案手法によって得られた数値解析結果は, Bonet らの結果とよく似た一致を示している.

#### 4. 結論

本研究では, 以下の成果を得た.

- SPH の弾性解析におけるゼロエネルギーモードを回避するために, 変形勾配の高次な項を用いて定式化を行った. 本手法では, 非物理項およびチューニングパラメータを使うことなく, 定式化が可能であることを示した.
- 新しい定式化に基づいてプログラムコードの開発を行った. また, Updated Lagrangian に基づく定式化で

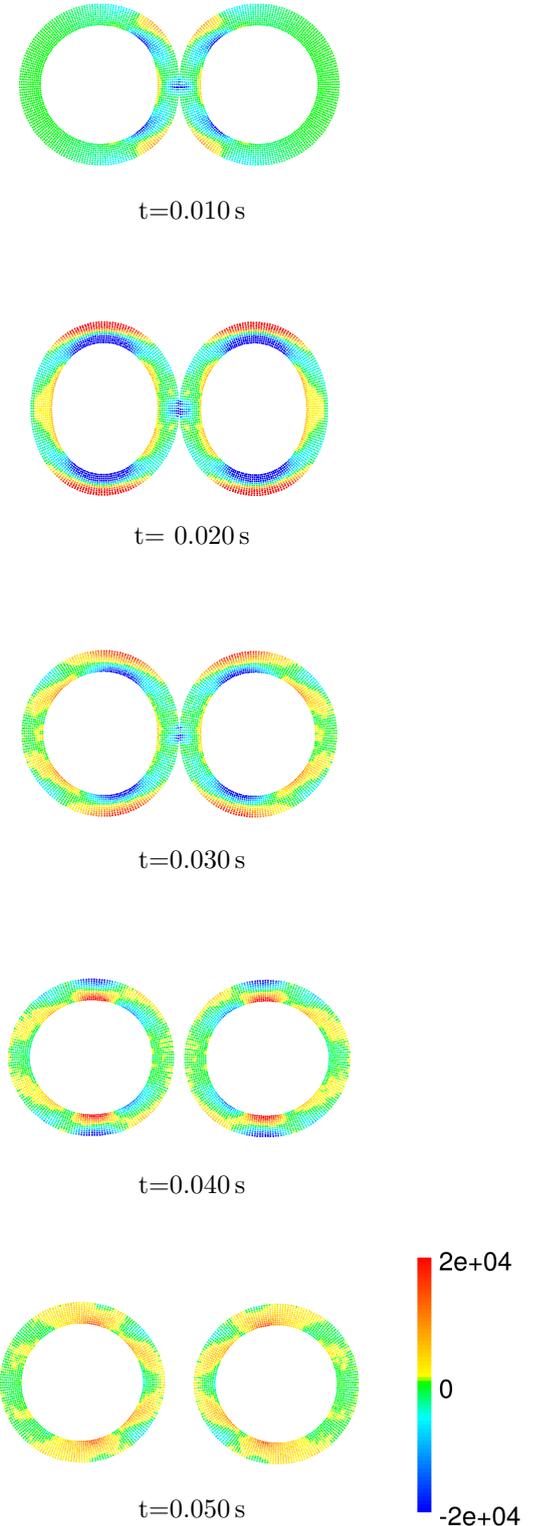


Fig. 8  $P_{xx}$  の分布

是非物理項を加えないと解けなかった問題でも, 提案手法を用いると, 数値不安定が生じることなく解けることを確認した.

今後の課題としては, 三次元問題への拡張, 塑性を考慮することが挙げられる.

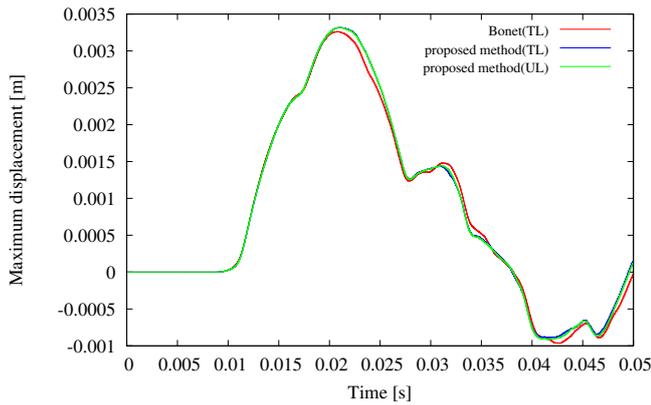


Fig. 9  $y$  方向の最大変位

### 参考文献

- (1) JJ Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual review of astronomy and astrophysics*, Vol. 30, No. 1, pp. 543–574, 1992.
- (2) JW Swegle, DL Hicks, and SW Attaway. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *Journal of computational physics*, Vol. 116, No. 1, pp. 123–134, 1995.
- (3) J Bonet and Sd Kulasegaram. Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 47, No. 6, pp. 1189–1214, 2000.
- (4) JP Gray, JJ Monaghan, and RP Swift. SPH elastic dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 190, No. 49, pp. 6641–6662, 2001.
- (5) Javier Bonet and Sivakumar Kulasegaram. Remarks on tension instability of eulerian and lagrangian corrected smooth particle hydrodynamics (CSPH) methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 52, No. 11, pp. 1203–1220, 2001.
- (6) J Bonet, S Kulasegaram, MX Rodriguez-Paz, and M Profit. Variational formulation for the smooth particle hydrodynamics (SPH) simulation of fluid and solid problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 12, pp. 1245–1256, 2004.
- (7) Y Vidal Seguí, J Bonet, and A Huerta. Stabilized updated lagrangian corrected SPH for explicit dynamic problems. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 69, No. 13, pp. 2687–2710, 2007.
- (8) A Huerta, Y Vidal, and J Bonet. Updated lagrangian formulation for corrected smooth particle hydrodynamics. *International Journal of Computational Methods*, Vol. 3, No. 04, pp. 383–399, 2006.
- (9) J Bonet and Lok, T. -S. L. Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulations. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 180, No. 1, pp. 97–115, 1999.
- (10) CT Dyka and RP Ingel. An approach for tension instability in smoothed particle hydrodynamics (SPH). *Computers & structures*, Vol. 57, No. 4, pp. 573–580, 1995.