

3次元 Helmholtz 方程式の2周期境界値問題に対する isogeometric 境界要素法の開発

DEVELOPMENT OF ISOGEOMETRIC BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR DOUBLY PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR 3D HELMHOLTZ EQUATION

角谷 将基¹⁾, 高橋 徹²⁾, 飯盛 浩司³⁾, 松本 敏郎⁴⁾

Masaki SUMIYA, Toru TAKAHASHI, Hiroshi ISAKARI and Toshiro MATSUMOTO

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ma.sumiya@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 4) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

We newly incorporate the isogeometric analysis (IGA) to the boundary element method (BEM) to solve the doubly-periodic boundary value problems for three-dimensional Helmholtz equation. Both the surface of the computation domain and the boundary densities in the underlying boundary integral equations are discretised successfully with the tensor product of the B-spline bases, following the concept of the IGA. We validated the proposed isogeometric BEM (IGBEM) through the numerical examples.

Key Words: Boundary element method, Isogeometric analysis, Periodic boundary value problem

1. 緒言

本研究グループは、周期構造と波動の相互作用に関する解析と設計に資する数値解析技術の確立と言う立場から、近年注目を集めている isogeometric 解析 (IGA) に立脚した境界要素法 (BEM) の開発を行っている^(1, 2, 3, 4)。ここで、IGA とは、CAD において幾何形状を表現するために一般に用いられている非一様有理 B-spline (NURBS) 関数を、形状関数と補間関数に採用した一種の isoparametric 要素に関連する離散化体系である^(5, 6)。直近では、2次元 Helmholtz 方程式の1周期境界値問題に対する isogeometric 境界要素法 (IGBEM) を提案し、シリコン太陽電池の電極形状の最適設計に応用した^(7, 8)。本研究はこれにならい、3次元2周期境界値問題に対する IGBEM の開発を目的とする。なお、3次元 Helmholtz 方程式に対する IGBEM は過去に研究例^(9, 10, 11)があるが、周期境界値問題を扱ったものはない。また、本研究グループによる報告⁽⁴⁾では、本研究と同じ3次元 Helmholtz 方程式に関する2周期境界値問題を扱っているが、IGBEM における特異積分の評価について記したものであり、周期境界値問題を解くには至っていない。

以下、2節では本3次元2周期境界値問題の定式化とその

IGBEM の構成について述べる。3節では本 IGBEM の妥当性を検証する。最後、4節で本研究の結論を述べる。

2. IGBEM の構成

2.1. 3D Helmholtz 方程式に関する2周期境界値問題

3次元空間において、 x_1 および x_2 軸方向に周期的であり、 x_3 軸に沿って異なる媒質が積層した系におけるスカラー波動散乱問題を考える。本研究では簡単のため二層 Ω_1, Ω_2 の場合について考える (Fig. 1)。ここで、 x_1, x_2 軸方向の周期をそれぞれ L_1, L_2 とする。このとき、整数 μ_1, μ_2 の組によって定まる領域 $[\mu_1 L_1, (\mu_1 + 1)L_1] \times [\mu_2 L_2, (\mu_2 + 1)L_2] \times [-\infty, \infty]$ について、 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ の領域を unit cell (UC)、それ以外の領域を replica cell (RC) と呼ぶ。ここで、 Ω_1 と Ω_2 の界面 (境界) を S と表し、UC に含まれる S の部分を S_0 と表す。境界 S は滑らかであると仮定する。また、UC の側面 ($x_1 = 0, L_1$ および $x_2 = 0, L_2$) を周期境界と呼ぶ。

領域 Ω_m ($m = 1, 2$) におけるスカラー波動場 $u_m : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ は、次の3次元 Helmholtz 方程式、境界条件および擬周期境

界条件を満たすものとする:

$$\Delta u_m + k_m^2 u_m = 0 \quad \text{in } \Omega_m \quad (1a)$$

$$u_1 = u_2 (= u), \quad \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} (= q) \quad \text{on } S \quad (1b)$$

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{p}^{(\mu)}) = e^{i\mathbf{K}_m \cdot \mathbf{p}^{(\mu)}} \varphi(\mathbf{x}) \quad (\varphi = u, q) \quad (1c)$$

さらに、散乱場 $u^{\text{inc}} - u$ に関する放射条件を満たすものとする。ここで、 ω は周波数、 ε_m は Ω_m の特性値 (定数)、 k_m は Ω_m における波数 $k_m := \omega\sqrt{\varepsilon_m}$ 、 $\mathbf{p}^{(\mu)} := (\mu_1 L_1, \mu_2 L_2, 0)^T$ は translation ベクトルである。法線 \mathbf{n} は Ω_2 から Ω_1 に向かう方向と定める。また、 $\mathbf{K}_m := k_m(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, -\cos \theta)^T$ は波数ベクトル (角 θ および ϕ の定義は Fig. 1 の通り) であり、領域 Ω_1 には振幅を A とする平面入射波 $u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) := Ae^{i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{x}}$ を与える。

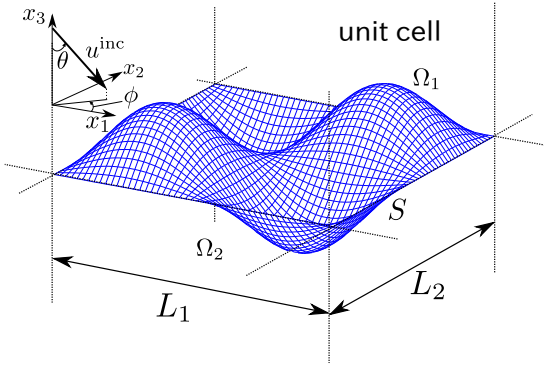


Fig. 1 Schematic illustration of the doubly periodic boundary value problems of interest.

2.2. 境界積分方程式

式 (1) および放射条件によって表される本周期境界値問題の境界積分方程式として次のものを用い、選点法で解く:

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{D}^1\right) u(\mathbf{x}) + \varepsilon_1 \mathcal{S}^1 q(\mathbf{x}) = u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) \quad (2a)$$

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}^2\right) u(\mathbf{x}) - \varepsilon_2 \mathcal{S}^2 q(\mathbf{x}) = 0 \quad (2b)$$

ここで、 \mathcal{I} は恒等作用素、 $\mathcal{D}^m u$ 、 $\mathcal{S}^m q(\mathbf{x})$ はそれぞれ二重層ポテンシャル、一重層ポテンシャルであり、

$$\mathcal{D}^m u(\mathbf{x}) := \int_{S_0} \frac{\partial G_m^p(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} u(\mathbf{y}) dS_y \quad (3a)$$

$$\mathcal{S}^m q(\mathbf{x}) := \int_{S_0} G_m^p(\mathbf{x} - \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) dS_y \quad (3b)$$

である。また、 $G_m^p(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ は波数 k_m の周期 Green 関数

$$G_m^p(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} e^{i\mathbf{K}_m \cdot \mathbf{p}^{(\mu)}} \frac{e^{ik_m |\mathbf{x} - (\mathbf{y} + \mathbf{p}^{(\mu)})|}}{|\mathbf{x} - (\mathbf{y} + \mathbf{p}^{(\mu)})|} \quad (4)$$

である。周期 Green 関数は、直接計算すると無限和の収束が非常に遅いため、本研究では Ewald の方法に従い、収束の速い二つの無限和 (すなわち、実領域の関数 $G^{\text{P}1}$ および波数領域の関数 $G^{\text{P}2}$) に分解して計算する (付録を参照) (12)。

2.3. isogeometric 離散化

本研究では、境界積分方程式 (2) を IGA の概念に則って離散化する。簡単のため、NURBS 基底の重みを一様として得

られる (p 次の) B-spline 基底を用いる。基底を構成するためのノットを $\{t_0, t_1, \dots, t_{n+p}\}$ と表すとき、本研究では次式のように最初と最後の $p+1$ 個をそれぞれ重ねたノット (以下、clamped ノットと呼ぶ) を採用する:

$$t_i = \begin{cases} 0 & i = 0, \dots, p \\ \frac{i-p}{n-p} & i = p+1, \dots, n-1 \\ 1 & i = n, \dots, n+p \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 $S_0(\subset S)$ が滑らかである (「角」が存在しない) ように、中間のノットは重ねないと仮定した。このとき、 p 次 B-spline 基底は次の Cox de Boor の漸化式によって定義される (13):

$$N_j^0(t) = \begin{cases} 1 & t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_j^p(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+p} - t_j} N_j^{p-1}(t) + \frac{t_{j+p+1} - t}{t_{j+p+1} - t_{j+1}} N_{j+1}^p(t)$$

ここに、 $j = 0, \dots, n-1$ であり、第二式右辺の各項において、分母が零となるものは形式的に除外すればよい。Fig. 2 は $p = 2, n = 7$ の場合の B-spline 基底を例示している。

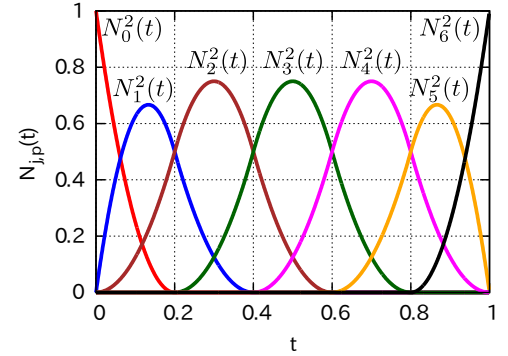


Fig. 2 B-spline bases for $p = 2$ and $n = 7$ with the $n+p+1$ knots such as $\{0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1\}$.

さて、境界 S_0 を B-spline 基底の直積により表現する。すなわち、境界上の点 \mathbf{y} を二つの曲面パラメータ s および t を用いて

$$\mathbf{y}(s, t) = \sum_{i=0}^{n_s-1} \sum_{j=0}^{n_t-1} N_i^p(s) N_j^p(t) \mathbf{P}_{ij} \quad (7)$$

と表現する。ここで、 $s \in [s_p, s_n]$ および $t \in [t_p, t_n]$ であり、 \mathbf{P}_{ij} は与えるべき制御点を表す。本研究では、境界 S_0 の縁上に \mathbf{P}_{0j} 、 $\mathbf{P}_{n_s-1,j}$ 、 \mathbf{P}_{i0} および \mathbf{P}_{i,n_t-1} を設ける (ここに $i = 0, \dots, n_s-1$ および $j = 0, \dots, n_t-1$)。このとき、式 (5) に示した clamped ノットを用いているため、式 (7) はこれらの制御点を通過することが保証される。この性質は S_0 の形状を定めるのに都合が良い。その他の制御点については、式 (5) を満たす (特に、中間のノットは重ねない) ように、かつ、自己交差が発生しないように任意に定めればよい。このとき、 S_0 の縁を除いて、 $\mathbf{y}(s, t)$ は微分可能な曲面となる。なお、 \mathbf{y} の S_0 の縁を越えての微分可能性は制御点を適宜配置して担保する必要がある。

境界変数 u および q も、 u_{ij}, q_{ij} を制御変数（未知変数）として、次のように B-spline 基底の直積により補間する：

$$\varphi(s, t) = \sum_{i=0}^{n_s-1} \sum_{j=0}^{n_t-1} N_i^p(s) N_j^p(t) \varphi_{ij} \quad (\varphi = u, q) \quad (8)$$

式 (7) および (8) により境界積分方程式 (2) を離散化すると、次の線形方程式を得る：

$$\sum_{i=0}^{n_s-1} \sum_{j=0}^{n_t-1} (C_{kl,ij} - D_{kl,ij}^1) u_{ij} + \varepsilon_1 \sum_{i=0}^{n_s-1} \sum_{j=0}^{n_t-1} S_{kl,ij}^1 q_{ij} = u^{\text{inc}}(\mathbf{x}_{kl}) \quad (9a)$$

$$\sum_{i=0}^{n_s-1} \sum_{j=0}^{n_t-1} (C_{kl,ij} + D_{kl,ij}^2) u_{ij} - \varepsilon_2 \sum_{i=0}^{n_s-1} \sum_{j=0}^{n_t-1} S_{kl,ij}^2 q_{ij} = 0 \quad (9b)$$

ここに、 $k = 0, \dots, n_s - 2, l = 0, \dots, n_t - 2$ である。また、

$$C_{kl,ij} := \frac{1}{2} N_i^p(\hat{s}_k) N_j^p(\hat{t}_l) \quad (10a)$$

$$S_{kl,ij}^m := \int_{t_j}^{t_{j+p+1}} \int_{s_i}^{s_{i+p+1}} G_m^p(\mathbf{x}_{kl} - \mathbf{y}(s, t)) N_i^p(s) N_j^p(t) J(s, t) ds dt \quad (10b)$$

$$D_{kl,ij}^m := \int_{t_j}^{t_{j+p+1}} \int_{s_i}^{s_{i+p+1}} \frac{\partial G_m^p(\mathbf{x}_{kl} - \mathbf{y}(s, t))}{\partial n_y} N_i^p(s) N_j^p(t) J(s, t) ds dt \quad (10c)$$

ここに、 $J(s, t) := \left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \right|$ はヤコビアンを表す。なお、式 (10b) および (10c) の積分区間は、 $N_j^p(t)$ の台が $t_j \leq t \leq t_{j+p+1}$ であると言う事実により定まるものである。

式 (9) に含まれる未知変数の数は $2n_s n_t$ であるが、擬周期境界条件により次のような $2(n_s + n_t - 1)$ 個の関係式が得られる ($m = 1, 2$)：

$$\varphi_{n_s-1, j} = e^{iK_{m1}L_1} \varphi_{0j} \quad (j = 0, \dots, n_t - 2)$$

$$\varphi_{i, n_t-1} = e^{iK_{m2}L_2} \varphi_{i0} \quad (i = 0, \dots, n_s - 2)$$

$$\varphi_{n_s-1, n_t-1} = e^{i(K_1L_1 + K_2L_2)} \varphi_{00}$$

ここに、 K_{m1}, K_{m2} は波数ベクトル \mathbf{K} の x_1, x_2 成分である。よって、未知数は $2(n_s - 1)(n_t - 1)$ 個に減らすことができる。したがって、同数の方程式を得るために、 S_0 上に $(n_s - 1)(n_t - 1)$ 個の選点を設ければよい。そこで、二次元問題の場合にならい^(2, 3)、選点を $\mathbf{x}_{kl} := \mathbf{y}(\hat{s}_k, \hat{t}_l)$ （ここに $k = 0, \dots, n_s - 2, l = 0, \dots, n_t - 2$ ）と表すとき、 s 方向に関して k 番目の選点に対応するパラメータ \hat{s}_k は、 $N_k^p(s)$ を最大化するような s に定める。 \hat{t}_l も同様に定める。

2.4. 特異積分の評価

式 (10b) および (10c) の積分は、 \mathbf{x} が \mathbf{y} に一致する領域で特異性を有する。本研究はこれらの特異積分を Radial Integral Method (RIM) を用いて評価する^(14, 15)。そのために、Ewald の方法で分解された周期 Green 関数の実領域の関数を、特異項と正則項に更に分解し、特異項 $\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ およびその法線微分に関する積分に RIM を用いる。

実装した RIM を定積分

$$I(\mathbf{x}) := \int_A \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^\beta} \frac{\partial |\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{\partial x_1} dS_y$$

の評価に適用し、その数値精度を測定した。ここで、 β は特異性のオーダーを表すパラメータであり、本研究の用途に合わせて $\beta = 1, 2, 3$ とした。また、 $A := [0, 4] \times [-1, 1] \times [0, 0]$ ($x_3 = 0$ 上の長方形領域)、 $\mathbf{x} := (\frac{1}{2}, 1, 0)$ とした。Table 1 に理論値との相対誤差を示す。参考として、文献⁽¹⁵⁾の結果も示すが、その計算に用いられた各種パラメータの値は不明である。そのため、本計算値と参照値は完全に一致はしていないが、同程度の精度が得られていることがわかる。

Table 1 Accuracy of the numerical integral of $I(\mathbf{x})$ with the RIM.

β	理論値	本研究		文献 ⁽¹⁵⁾	
		計算値	相対誤差	計算値	相対誤差
1	-2.057701	-2.0577013	1.4×10^{-7}	-2.05769	5.4×10^{-6}
2	-1.866635	-1.8666419	3.7×10^{-6}	-1.86667	1.9×10^{-5}
3	-1.947746	-1.9477702	1.2×10^{-5}	-1.94782	3.8×10^{-5}

本 IGBEM では、空間の周期性に起因して発生する特異積分に留意する必要がある。例えば、周期境界 $\{\mathbf{x} | x_1 = 0\} \cap S_0$ 上に位置する選点 \mathbf{x}_{0l} を考える (Fig. 3(a))。この選点に関して UC 上で周期 Green 関数 G^p を含む積分を実行する際、 \mathbf{x}_{0l} を含む UC の左端の領域（同図の緑色の枠）の積分が特異積分であることは明らかであるが、UC の右端の領域（同図の赤色の枠）の積分も特異積分である。なぜならば、その領域は UC の左隣の RC（つまり $(\mu_1, \mu_2) = (-1, 0)$ に相当する RC）の右端の領域（同図の桃色の枠）に該当し、 G^p の $(\mu_1, \mu_2) = (-1, 0)$ の成分が特異となるためである。

同様に、 $\{\mathbf{x} | x_2 = 0\} \cap S_0$ 上の選点に対しては G^p の $(\mu_1, \mu_2) = (0, -1)$ の成分が特異であり (Fig. 3(b))、選点 $(0, 0)$ に対しては $(\mu_1, \mu_2) = (0, -1), (-1, 0), (-1, -1)$ の成分が特異である (Fig. 3(c))。このような特異積分も RIM を用いて評価する。

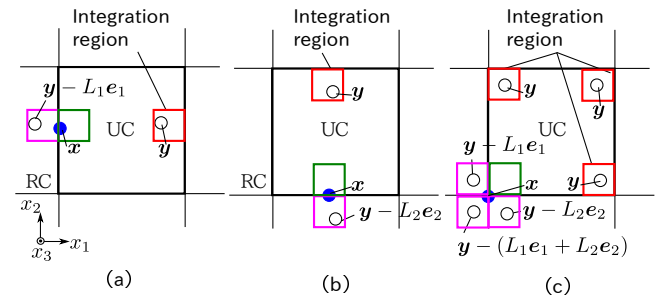


Fig. 3 Singular integrals specific to the underlying doubly periodic problems. Here, $\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0)^T$ and $\mathbf{e}_2 := (0, 1, 0)^T$ are the unit vectors.

3. 数値実験

前節に基づいて開発した IGBEM コードの妥当性を検証するための数値実験を行なった。比較として、区分一定要素を用いた 2 周期境界値問題用の BEM（以下、CBEM と呼ぶ）も実行した。なお、CBEM では近特異積分の解析的な評価も考慮した。すなわち、 G^p に含まれる特異項 $\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ およびその法線微分の積分に関して、UC 内の選点 \mathbf{x} に対する UC 内の区分一定要素については全て解析的に評価す

る。また、UC 内の \boldsymbol{x} に対する RC 内の要素については、 $|x_1 - (y_1 + \mu_1 L_1)| \lesssim \frac{L_1}{10}$ または $|x_2 - (y_2 + \mu_2 L_2)| \lesssim \frac{L_2}{10}$ を満たす場合、解析的に評価した。

3.1. 平面境界による反射と透過

領域 Ω_1 と Ω_2 の境界 S が平面である場合を考える。領域の属性値は $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$ とし、周波数は $\omega = 1$ とする。また平面波の入射角は $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\phi = 0$ とした。この問題は半無限場の非周期問題であるが、周期を任意とする周期問題と捉えることができる。本計算では周期を $L_1 = 1$, $L_2 = 1$ とした。

本問題の解析解は計算することができて、境界上の u と q は次のようになる：

$$u(x_1, x_2) = \frac{2\eta_1 \cos \theta}{\eta_2 \cos \theta + \eta_1 \cos \psi} e^{ik_2(x_1 \sin \theta \cos \phi + x_2 \sin \theta \sin \phi)}$$

$$q(x_1, x_2) = \frac{-ik_2 \cos \theta}{\varepsilon_2} u(x_1, x_2)$$

ここに、 $\eta_i := \sqrt{\varepsilon_i}$ であり、 $\psi := \sin^{-1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \theta \right)$ である。

本 IGBEM では、 S_0 を 2 次の B-spline 基底により生成するが、その際に必要な制御点 \boldsymbol{P}_{ij} は次のように定める：

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \left(\frac{iL_1}{n_s - 1}, \frac{jL_2}{n_t - 1}, 0 \right)^T$$

ここに、 $i = 0, \dots, n_s - 1$, $j = 0, \dots, n_t - 1$ 。また、 $n_s \equiv n_t := \nu$ として、 $\nu = 8, 16, 32$ と変化させる。

線形方程式 (9) は GMRES 法⁽¹⁶⁾ を用いて解く。反復の停止条件は (9) の残差の l_2 ノルムを右辺ベクトルの l_2 ノルムで除したものが $\text{tol} = 10^{-5}$ 以下であるとした。

線形方程式 (9) を解いて得られた係数 u_{ij} および q_{ij} を (8) に代入し、パラメータ s, t として選点に対応する \hat{s}_k, \hat{t}_l を代入して得られた数値解を $\tilde{u}(\hat{s}_k, \hat{t}_l)$ および $\tilde{q}(\hat{s}_k, \hat{t}_l)$ と表す。これらと解析解 $u(\hat{s}_k, \hat{t}_l)$ および $q(\hat{s}_k, \hat{t}_l)$ との相対 l_2 誤差、すなわち

$$E_\varphi := \sqrt{\frac{\sum_k \sum_l |\varphi(\hat{s}_k, \hat{t}_l) - \tilde{\varphi}(\hat{s}_k, \hat{t}_l)|^2}{\sum_k \sum_l |\tilde{\varphi}(\hat{s}_k, \hat{t}_l)|^2}} \quad (\varphi = u, q)$$

を計測する。また、区分一定要素の場合には、選点において得られた境界量について相対誤差を計測した。

未知数の数に対する相対誤差を Fig. 4 に示す。ここで、CBEM の未知数の数は、 S_0 を $m \times m$ 個の四角形に分割した後に、各四角形を等分して得られる三角形を区分一定要素としているため、 $2m^2$ である。なお、 m は 8, 16, 32 とした。同図において IGBEM と CBEM を比較すると、 E_u については IGBEM が 2 次、CBEM が 1 次オーダーで収束している。一方、 E_q については共に 1 次オーダーであり、IGBEM の結果は CBEM よりもわずかに劣る結果となった。このように q が振る舞う理由は現時点で不明であるが、未知数の増加と共に誤差が収束した意味において、本 IGBEM の妥当性が示されたと考えられる。

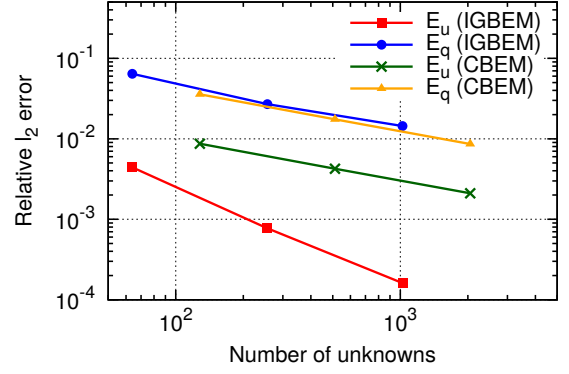


Fig. 4 Relative l_2 error for the first example.

3.2. 曲面境界による透過問題

次に、境界 S_0 を非平面

$$x_3 = \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{L_1} \sin \frac{2\pi x_2}{L_2}$$

とする 2 周期境界値問題を考える。ここで、 S_0 を生成するために必要な制御点は

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \left(\frac{iL_1}{n_s - 1}, \frac{jL_2}{n_t - 1}, \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{i}{n_s - 1}\right) \sin\left(2\pi \frac{j}{n_t - 1}\right) \right)^T$$

($i = 0, \dots, n_s - 1$, $j = 0, \dots, n_t - 1$)

と定めた。このとき、生成される境界は S_0 に完全に一致しないが、境界形状は任意でよい問題設定であるため、この不一致は以下の数値解析に影響は無い。また、

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \Big|_{x_1=L_1}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \Big|_{x_2=L_2}$$

であることから S_0 の縁で UC と RC は滑らかに接続しており、いわゆる角点を考慮する必要がない事に注意する。

使用するノット数 $\nu := n_s = n_t$ は 8, 16, 32 とする。Fig. 5 に $\nu := n_s = n_t = 8$ の場合の \boldsymbol{P}_{ij} および S_0 を示す。

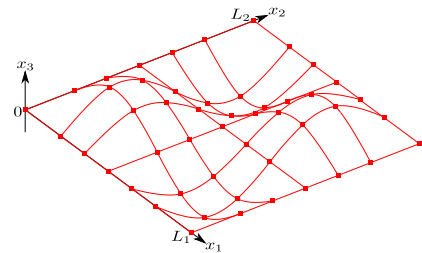


Fig. 5 Boundary S_0 and the control points \boldsymbol{P}_{ij} of the second example in the case of $\nu := n_s = n_t = 8$.

本問題は $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ の場合には解析解が計算できないので、 $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 = 1$ として、入射波 u^{inc} が境界により反射することなく伝搬するような問題とする。この場合、 S_0 上の解析解 u は u^{inc} そのものであり、 q は u^{inc} の勾配と S_0 の法線の内積から直ちに計算できる。

前例と同じように、未知数の数に対する相対誤差を Fig. 7 に示す。ここで、GMRES の相対許容残差 tol は 10^{-5} であり、CBEM は実行に至っていない。この例題では、 u の相対

誤差 E_u は未知数の数に依らず良好である*。 E_u は 10^{-5} 程度で停滞しているが、これは離散化誤差というよりもむしろ、GMRES の相対許容残差 (10^{-5}) によって生じた誤差と考えられる。実際、相対許容残差 tol を 10^{-8} と変更した結果、 E_u は 10^{-8} 程度となった (Fig. 7)。一方、相対許容残差の値とは無関係に、 q については前例と同じく 1 次オーダーの収束** に留まっており、 Fig. 7 からわかるように CBEM よりも少し悪い。

なお、CBEM では近特異積分を考慮することで q の精度が向上し、収束のオーダーも改善した。実際、 Fig. 7 における「CBEM*」は近特異積分を考慮しなかった場合の結果である。これは、本 IGBEM でも近特異積分を考慮することで q の精度が改善される可能性を示唆している。

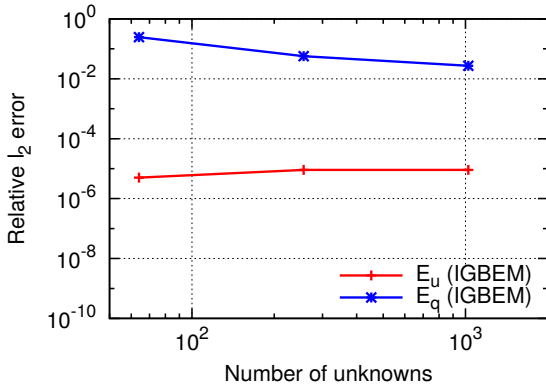


Fig. 6 Relative l_2 -error for the second example ($\text{tol} = 10^{-5}$).

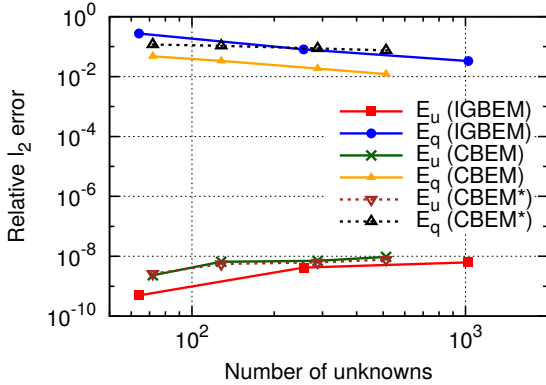


Fig. 7 Relative l_2 -error for the second example ($\text{tol} = 10^{-8}$).

4. 結論

本論文では 2 層からなる領域において、3 次元 Helmholtz 方程式の 2 周期境界値問題を解くための isogeometric 境界要

*この E_u の振る舞いについては次のように説明される：式 (2) において $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 =: \varepsilon$ とすると、 $D^1 = D^2 =: D$ 、 $S^1 = S^2 =: S$ と書ける。このとき、(2a) と (2b) の辺々を足すと $u = u^{\text{inc}}$ が得られる。したがって、数値解 u に含まれる誤差は u^{inc} を B-spline 基底で近似する際に生じる誤差であると考えられる。そのため、 u の精度は未知数の数に依らず十分良いと考えられる。

**前の脚注と同じ議論により、(2b) から $q = \frac{1}{\varepsilon} S^{-1} (\frac{1}{2} I + D) u^{\text{inc}}$ が得られる。これは、 q の精度については作用素 S および D の離散化に確かに影響を受ける事を表している。

素法 (IGBEM) を提案した。境界と境界密度は共に B-spline 基底関数の直積によって離散化した。その際、clamped ノットを利用することにより境界が容易に設定できるように考慮した。また、空間の周期性に伴って生じる特異積分の存在を勘案した上で、Radial Integral Method (RIM) によって数値積分するものとした。開発した IGBEM で得られた数値解析結果は概ね良好と判断できるが、流束 q の収束の振る舞いは予想外*** と言え、近特異積分の影響を含めて今後はその誤差の原因を特定する必要がある。また、より現実的な問題設定 (3 層以上の多層化、閉領域として表される介在物の導入など) を行い、本 IGBEM の適応性を評価する必要がある。さらに、2 次元問題における先行研究 (7, 8) で示したように、IGBEM は一般に感度解析ないしは形状最適化と相性が良く、その方面への応用も重要である。

付録：関数 G^{p1} と G^{p2} の具体形 (12)

式 (4) の周期 Green 関数 G_p は、Ewald の方法 (12) により、

$$G^p(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = G^{p1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + G^{p2}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

として収束の速い次の二つの関数 G^{p1} および G^{p2} に分解できる。これらの具体形は以下のように表されるが、実領域の関数 G^{p1} が、 $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ かつ $j = 0$ の項すなわち $\frac{1}{4\pi r}$ の存在により、 $r = 0$ のときに特異であることがわかる：

$$\begin{aligned} G^{p1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{a}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}(\mu)} \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{k}{2a} \right)^{2j} (ar)^{2j-1} \Gamma \left(\frac{1}{2} - j, a^2 r^2 \right) \\ G^{p2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{i}{4L_1 L_2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{k\rho^{(\nu)}} e^{ik\mathbf{d}^{(\nu)} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &\times \left[e^{-ik\rho^{(\nu)}(x_3 - y_3)} \text{erfc} \left(-i \frac{k\rho^{(\nu)}}{2a} + a(x_3 - y_3) \right) \right. \\ &\left. + e^{ik\rho^{(\nu)}(x_3 - y_3)} \text{erfc} \left(-i \frac{k\rho^{(\nu)}}{2a} - a(x_3 - y_3) \right) \right] \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{r} := \mathbf{x} - (\mathbf{y} + \mathbf{p}(\mu))$ 、 $r := |\mathbf{r}|$ 、 Γ は不完全ガンマ関数、erfc は相補誤差関数 (18)、 $\mathbf{q} := (\frac{2\pi}{L_1} \nu_1, \frac{2\pi}{L_2} \nu_2, 0)^T$ (ただし、 $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}$)、 $\mathbf{d}^{(\nu)} := \frac{1}{k} (\mathbf{K} + \mathbf{q}^{(\nu)})$ 、 $\rho^{(\nu)} := \sqrt{1 - |\mathbf{d}^{(\nu)}|^2}$ である。また、 a は無限和の収束に関するパラメータであり、無限和の収束判定に用いるパラメータ ϵ を 10^{-10} と与えることによって決定した。

謝辞：本研究は科学研究費 (15K06683) の助成の元に遂行された。また、脚注* および** に関しては匿名査読者のご見解を参考にさせて頂いた。記して謝意を表す。

***予想外と言うのは、先行研究 (3) である 2 次元解析において、本論文と同種の数値解析例における IGBEM の q の相対 l_2 誤差精度が CBEM よりも高いと言う事実に反したと言う意味である。なお、本研究と同様な clamped ノットに基づく B-spline 基底を採用した場合 (3)、 q の収束オーダーは 0.5 程度であったが、周期性を考慮した B-spline 基底を採用した場合 (17) には q の収束オーダーは 1 程度に改善したことを付記する。

参考文献

- (1) T. Takahashi, T. Matsumoto: An application of fast multipole method to isogeometric boundary element method for Laplace equation in two dimensions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **36**(2012), pp. 1766–1775.
- (2) 榛葉祐太, 高橋徹, 飯盛浩司, 松本敏郎: 波動問題の1周期境界値問題に対するアイソジオメトリック境界要素法の開発, *日本機械学会計算力学講演会論文集*, **28**(2015), CDROM.
- (3) 角谷将基, 高橋徹, 飯盛浩司, 松本敏郎: 2次元 Helmholtz 方程式に対する周期アイソジオメトリック境界要素法の開発と高速多重極法による高速化, *計算工学講演会論文集*, **21**(2016), CDROM.
- (4) 角谷将基, 高橋徹, 飯盛浩司, 松本敏郎: 3次元2周期境界値問題への isogeometric 境界要素法の適用, *日本機械学会計算力学講演会論文集*, **30**(2017), CDROM.
- (5) T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell: Isogeometric analysis CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**(2005), pp. 4135–4195.
- (6) J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, Y. Bazilevs: *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*, 1st Edition, Wiley Publishing, 2009.
- (7) 山本達郎, 高橋徹, 飯盛浩司, 松本敏郎: アイソジオメトリック境界要素法に基づく形状最適化, *日本機械学会東海支部総会講演会講演論文集*, **66**(2017), CDROM.
- (8) T. Takahashi, T. Yamamoto, Y. Shimba, H. Isakari, T. Matsumoto: A framework of shape optimisation based on the isogeometric boundary element method toward designing thin-silicon photovoltaic devices. (submitted).
- (9) R. Simpson, M. Scott, M. Taus, D. Thomas, H. Lian: Acoustic isogeometric boundary element analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **269**(2014), pp. 265–290.
- (10) M. Peake, J. Trevelyan, G. Coates: Extended isogeometric boundary element method (XIBEM) for three-dimensional medium-wave acoustic scattering problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **284**(2015), pp. 762–780.
- (11) L. Coox, O. Atak, D. Vandepitte, W. Desmet: An isogeometric indirect boundary element method for solving acoustic problems in open-boundary domains, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **316**(2017), pp. 186–208, special Issue on Isogeometric Analysis: Progress and Challenges.
- (12) S. Schmitt, T. Arens, K. Sandfort: Analysing Ewald’s method for the evaluation of Green’s functions for periodic media, *IMA Journal of Applied Mathematics*, **26**(2013), pp. 405–431.
- (13) L. Piegl, W. Tiller: *The NURBS Book*, (1997), Springer.
- (14) X.W. Gao: The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **26**(2002), pp. 905–916.
- (15) X.W. Gao: An effective method for numerical evaluation of general 2D and 3D high order singular boundary integrals, *Comput. Method. Appl. Mech. Engrg.*, **199**(2010), pp. 2856–2864.
- (16) Y. Saad, M. H. Schultz: GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **7**(1986), pp. 856–869.
- (17) 榛葉祐太, 高橋徹, 山本達郎, 飯盛浩司, 松本敏郎: 1周期アイソジオメトリック境界要素法の開発と表面プラズモン解析への応用, *電子情報通信学会技術研究報告* **115**(2015), pp. 69–74.
- (18) M. Abramowitz, I.A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (eighth Dover printing) (1972), Dover Publications.