

B スプライン曲面のレベルセットを用いたトポロジー最適化

A TOPOLOGY OPTIMISATION WITH LEVEL-SETS OF B-SPLINE SURFACE

飯盛 浩司¹⁾, 高橋 徹²⁾, 松本 敏郎³⁾

Hiroshi ISAKARI, Toru TAKAHASHI and Toshiro MATSUMOTO

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 406-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.ac.jp)
2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 406-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)
3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 406-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

In this paper, we propose a new topology optimisation using level-sets of B-spline surface. In the present method, geometric complexity of the optimal design can be controlled by arranging the number of control points and/or the order of the B-spline basis function for the level-set function. The update rule of the level-set function relies on a method based on spherical linear interpolation (SLERP) of topological derivative and level-set function. We show in detail the new discretisation for the SLERP-based topology optimisation using B-spline surface and confirm the performance of the proposed method through simple numerical examples in 2D Helmholtz' equation.

Key Words : Topology Optimisation, Level-set Method, B-spline Surface, SLERP, Boundary Element Method

1. はじめに

Bendsøe and Kikuchi⁽¹⁾ による先駆的な研究以来、トポロジー最適化は主として材料力学・構造力学の分野で研究が進められてきた。当初の主眼であった、与えられた材料の体積の上限の制約の下で剛性を最大化する部材形状を得るための手法としてのトポロジー最適化は、機械工学などの分野では既に実用化されつつある⁽²⁾。近年では、材料力学・構造力学の分野に限らず、波動問題⁽³⁾ や流体問題⁽⁴⁾ に支配される場におけるトポロジー最適化法に関する研究も数多く報告されるようになってきた。

代表的なトポロジー最適化法として、均質化法に基づく方法⁽¹⁾、密度法 (solid isotropic material with penalisation: SIMP 法)⁽⁵⁾、レベルセット法^(6, 7) を挙げることができる。中でも、レベルセット法はスカラー関数の零等位面により最適化過程の形状の境界を表現する手法であり、明示的な外形形状を持つ最適構造が得られる特徴を有する。レベルセット法に基づく方法の一つである Yamada らの方法^(7, 8) では、トポロジー導関数を反応項を持つ反応拡散方程式によりレベルセット関数の時間発展を記述する。本手法は、複雑度係数と呼ばれるパラメータ (反応拡散方程式の拡散項の係数に相当する) を変更することにより形状の複雑さを陰的に制御できるという点において優れた手法であり、様々な種類の問題に対して適用され、概ね良好な結果を得ることが示されてき

た^(4, 9, 10, 11)。しかしながら、未だその取束性の数学的な証明は与えられていない。

一方で、レベルセット関数とトポロジー導関数の球面線形補間を次の時間ステップのレベルセット関数とする方法 (以降、Amstutz の方法と呼ぶ)⁽¹²⁾ も提案されている。Amstutz の方法は、これまでに種々の適用例⁽¹³⁾ が報告されているのみならず、その数学的な解析も行われており⁽¹⁴⁾、その信頼性は高いと考えられる。しかしながら、Amstutz の方法には Yamada らの方法のような得られる最適設計解の複雑さを規定するパラメータが存在せず、これを制御することが困難であるように思われる。

そこで、本研究では、滑らかな曲面を容易に表現することのできる B スプライン曲面を用いてレベルセット関数の分布を表し、その制御点の数あるいは B スプライン基底関数の次数を変化させることにより、Amstutz の方法に最適設計解の複雑さを規定するパラメータを付与することを検討する。本論文はそのような試みの第一報である。本論文では、簡単のため、2次元 Helmholtz 方程式の Neumann 問題に支配される場におけるトポロジー最適化問題を例としてアルゴリズムを記述し、観測点において定義される目的関数の最小化・最大化問題を解いた例を示し、提案手法の妥当性・有効性を確認する。なお、無限遠を含む領域における Helmholtz 方程式を例題として選んだことから、トポロジー導関数の評価には境界要素法を用いるが、提案するトポロジー最適化法は偏微

分方程式のソルバーの選択に依らず利用することができる。

2. 最適化問題と関連するトポロジー導関数

本節では、本論文取り扱うトポロジー最適化問題の定義とその求解に用いるトポロジー導関数について簡潔に述べる。

ここでは、簡単な例として、Fig. 1 に示す、関数 u に対する 2 次元 Helmholtz 方程式の Neumann 問題を制約にもつ以下のトポロジー最適化問題を考える。

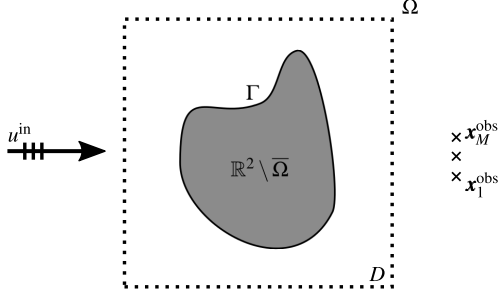


Fig. 1 Optimisation problem.

$$\inf_{\Omega} J(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M |u(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})|^2 \quad (1)$$

subject to

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma := \partial\Omega \quad (3)$$

$$\text{散乱場 } u - u^{\text{in}} \text{ に対する Sommerfeld の放射条件} \quad (4)$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega} \subset D \quad (5)$$

ここに、 J は目的関数である。 $\mathbf{x}_m^{\text{obs}}$ は m 番観測点、 M はその個数、 u^{in} は入射場、 $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ は波数、 ω は角周波数、 ε 、 μ は Ω で定義される定数、 \mathbf{n} は Ω の境界 Γ における外向き単位法線、 D は有限の大きさの設計領域である。また、 Ω は無限遠を含むとする。

トポロジー導関数 $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ は、点 \mathbf{x} 中心の円形散乱体が現れた際の目的関数 J の変化の割合を表す関数であり、次式で定義される⁽¹⁵⁾。

$$\delta J(\mathbf{x}) = \mathcal{T}(\mathbf{x})v(\varepsilon) + o(v(\varepsilon)) \quad (6)$$

ここに、 $\delta J(\mathbf{x})$ は点 \mathbf{x} に半径 ε の円形散乱体 Ω_ε が発生したことに伴う目的関数の変化量、 $v(\varepsilon)$ は $\varepsilon (> 0)$ の単調増加関数である。目的関数が (1) で定義され、発生する円形散乱体 Ω_ε の境界において斉次 Neumann 境界条件を課す場合、トポロジー導関数は以下のように評価できる⁽¹⁵⁾。

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \Re [2\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla \tilde{u}(\mathbf{x}) - k^2 u(\mathbf{x})\tilde{u}(\mathbf{x})] \quad (7)$$

ここに、 \tilde{u} は随伴変数であり、以下の境界値問題の解である。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) + k^2 \tilde{u}(\mathbf{x}) \\ + \sum_{m=1}^M \frac{u(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})}{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m^{\text{obs}})} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (9)$$

$$\tilde{u} \text{ に対する Sommerfeld の放射条件} \quad (10)$$

本研究では、トポロジー導関数 (7) の評価 (すなわち順問題 (2)–(4) 及び随伴問題 (8)–(10) の求解) に境界要素法を用いる。これは、順問題・随伴問題ともに無限遠を含む領域において定義される波動問題であるため、領域の離散化が境界のみでよく、放射条件を厳密に取り扱うことができる境界要素法が最も適しているためである。ただし、トポロジー導関数の計算に他の偏微分方程式の解法を用いることも可能であり、したがって、次節以降に述べるトポロジー最適化法はこの場合にもそのまま適用可能である。

3. B スプライン曲面のレベルセットによるトポロジー最適化の定式化

本節では、B スプライン曲面のレベルセットを用いたトポロジー最適化問題 (1)–(5) の解法について述べる。3.1、3.2 節で、参照の便宜のため、トポロジー導関数とレベルセット関数の球面線形補間に基づく方法⁽¹²⁾ についてごく簡単に解説したのち、3.3 節で、提案する B スプライン曲面のレベルセットを用いたトポロジー最適化法について述べる。3.4 節は提案法のアルゴリズムに含まれる直線探索について述べる。3.4 節のアルゴリズムも軽微な変更を除いて原著論文⁽¹²⁾ と同様のものである。

3.1. レベルセット関数の時間発展について

最適化問題 (1)–(5) を解くにあたって、仮想的な時刻 t を導入して領域 $\Omega(t)$ を時間の関数とし、 $\Omega(t)$ を時間発展させることを考える。ここでは、領域 $\Omega(t)$ の形状を次のようにレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ を用いて表現する。

$$\Omega(t) = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}, t) > 0\} \quad (11)$$

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad (12)$$

$$D \setminus \overline{\Omega(t)} = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}, t) < 0\} \quad (13)$$

定義 (11)–(13) より、レベルセット関数には定数倍の自由度があるため、レベルセット関数に以下の制約を課す。

$$\forall t, \|\phi(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(D)} := \int_D |\phi(\mathbf{x}, t)|^2 d\Omega(\mathbf{x}) = 1 \quad (14)$$

すなわち、 ϕ を $L^2(D)$ ノルムの意味で正規化しておく。

トポロジー導関数の定義 (6) により、 $\mathbf{x} \in \Omega(t)$ において $\mathcal{T}(\mathbf{x}, t) < 0$ であるときに \mathbf{x} に散乱体を配置すれば目的関数は小さくなるのだから、

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathcal{T}(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

のようにレベルセット関数の時間発展を記述することは合理的に思える。しかし、トポロジー導関数 \mathcal{T} は最適解におい

て恒等的には零ではないため、(15)の解は最適解において停留しない。そこで、(15)を次のように置き換える。

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathcal{T}(\mathbf{x}, t) - (\mathcal{T}, \phi)_{L^2(D)} \phi(\mathbf{x}, t) \quad (16)$$

ここに、 $(f, g)_{L^2(D)} = \int_D f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\Omega(\mathbf{x})$ である。このように定義した時間発展方程式(16)の解 $\phi(\mathbf{x}, t)$ は以下の2つの性質を持つ。

1. $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ となつたとき $\mathcal{T}(\mathbf{x}, t) = s\phi(\mathbf{x}, t)$ をみたす $s \in \mathbb{R}$ が存在する。

このとき、 $\forall \mathbf{x} \in \Omega(t)$ に散乱体が発生した際に目的関数値が上昇する。すなわち、得られた $\Omega(t)$ は“トポロジー”最適化問題(1)–(5)の解であると言える。

2. $\|\phi(\mathbf{x}, 0)\|_{L^2(D)} = 1$ ならば $\forall t, \|\phi(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(D)} = 1$

3.2. レベルセット関数の発展方程式の時間に関する離散化について

本節ではレベルセット関数の時間発展式(16)の時間変数 t に関する離散化について述べる。(16)の左辺を前進差分により近似すると以下を得る。

$$\phi_{i+1}(\mathbf{x}) = (1 - \Delta t_i (\mathcal{T}_i(\mathbf{x}), \phi_i(\mathbf{x}))_{L^2(D)}) \phi_i(\mathbf{x}) + \Delta t_i \mathcal{T}_i(\mathbf{x}) \quad (17)$$

ここに、 $t_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ は時間選点、 Δt_i は時間ステップ幅であり $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ である。また、 $\phi_i(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t_i)$ 、 $\mathcal{T}_i(\mathbf{x}) = \mathcal{T}(\mathbf{x}, t_i)$ を定義した。(17)は、 $\mathcal{T}_i(\mathbf{x})/\|\mathcal{T}_i(\mathbf{x})\|_{L^2(D)}$ と $\phi_i(\mathbf{x})$ の球面線形補間(SLERP)により $\phi_{i+1}(\mathbf{x})$ を得る式とみなすことができる。実際、

$$\theta_i = \cos^{-1} \frac{(\mathcal{T}_i, \phi_i)_{L^2(D)}}{\|\mathcal{T}_i\|_{L^2(D)} \|\phi_i\|_{L^2(D)}} \quad (18)$$

$$\kappa_i = \frac{\cos^{-1}(\phi_{i+1}, \phi_i)_{L^2(D)}}{\theta_i} \quad (19)$$

$$\alpha_i = 1 - \Delta t_i (\mathcal{T}_i, \phi_i)_{L^2(D)} \quad (20)$$

$$\beta_i = \frac{\Delta t_i}{\|\mathcal{T}_i\|_{L^2(D)}} \quad (21)$$

とおき、Fig. 2を参照すれば、

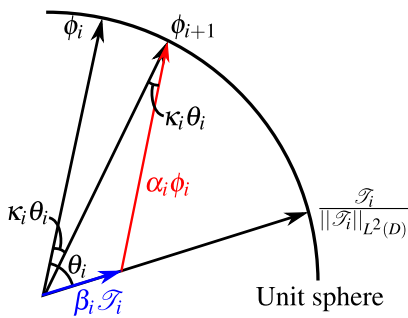


Fig. 2 Illustrative sketch for time evolution of the level-set function by SLERP of $\mathcal{T}_i(\mathbf{x})/\|\mathcal{T}_i(\mathbf{x})\|_{L^2(D)}$ and ϕ_i .

$$\alpha_i = \frac{\sin((1 - \kappa_i)\theta_i)}{\sin \theta_i} \quad (22)$$

$$\beta_i = \frac{1}{\|\mathcal{T}_i\|_{L^2(D)}} \frac{\sin \kappa_i \theta_i}{\sin \theta_i} \quad (23)$$

を得る。すなわち、(17)は次のように書ける。

$$\phi_{i+1}(\mathbf{x}) = \frac{\sin((1 - \kappa_i)\theta_i)}{\sin \theta_i} \phi_i(\mathbf{x}) + \frac{\sin \kappa_i \theta_i}{\sin \theta_i} \frac{\mathcal{T}_i(\mathbf{x})}{\|\mathcal{T}_i(\mathbf{x})\|_{L^2(D)}} \quad (24)$$

最適化アルゴリズムにおける κ_i の選び方(直線探索: linear search)については後述する。

3.3. レベルセット関数の発展方程式の空間に関する離散化について

本節ではレベルセット関数の時間発展式(24)の空間変数 \mathbf{x} に関する離散化について述べる。

本研究では、以下のようにレベルセット関数 $\phi_i(\mathbf{x})$ をBスプライン曲面により構成する。

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^n B_k^p(x) B_\ell^q(y) \hat{\phi}_{k\ell} \quad (25)$$

ここに、 $\mathbf{x} = (x, y)$ である。以降、簡単のため、 $x, y \in [0, 1]$ としておく。また、 $n + 1$ (resp. $m + 1$)、 p (resp. q)は各々 x (resp. y)方向のBスプライン基底関数の数、次数である。Bスプライン展開(25)の係数(制御変数) $\hat{\phi}_{k\ell}$ の“ \mathbf{x} 座標”(あるいは空間変数 \mathbf{x} の制御点)には以下のGreville abscissaeを用いる。

$$\hat{\mathbf{x}}_{k\ell} = (\hat{x}_k, \hat{y}_\ell) \quad (26)$$

$$\hat{x}_k = \frac{1}{p} (\bar{x}_{k+1} + \bar{x}_{k+2} + \dots + \bar{x}_{k+p}) \quad (27)$$

$$\hat{y}_\ell = \frac{1}{q} (\bar{y}_{\ell+1} + \bar{y}_{\ell+2} + \dots + \bar{y}_{\ell+q}) \quad (28)$$

ここに、 $k = 0, 1, \dots, m$ 、 $\ell = 0, 1, \dots, n$ である。また、 $\{\bar{x}_k\}_{k=0}^{m+p+1}$ 、 $\{\bar{y}_\ell\}_{\ell=0}^{n+q+1}$ はノットの列である。ノットベクトルの選び方にはいくつかの選択肢があるが、ここでは以下の等間隔なclamped knotを採用する。

$$\begin{aligned} 0 = \bar{x}_0 = \bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_{p-1} = \bar{x}_p \leq \bar{x}_{p+1} \\ \leq \dots \leq \bar{x}_m \leq \bar{x}_{m+1} = \bar{x}_{m+2} = \dots = \bar{x}_{m+p} = \bar{x}_{m+p+1} = 1 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} 0 = \bar{y}_0 = \bar{y}_1 = \dots = \bar{y}_{q-1} = \bar{y}_q \leq \bar{y}_{q+1} \\ \leq \dots \leq \bar{y}_n \leq \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_{n+2} = \dots = \bar{y}_{n+q} = \bar{y}_{n+q+1} = 1 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1} \quad (i = p + 1, p + 2, \dots, m) \quad (31)$$

$$\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i = \bar{y}_i - \bar{y}_{i-1} \quad (i = q + 1, q + 2, \dots, n) \quad (32)$$

$(\hat{x}_k, \hat{y}_\ell, \hat{\phi}_{k\ell})$ をBスプライン曲面の制御変数と呼ぶことがある。 B_k^p はBスプライン基底関数であり、以下の漸化式(de

Boor Cox の漸化式) により計算できる。

$$B_k^0(x) = H(x - \bar{x}_k) - H(x - \bar{x}_{k+1}) \quad (33)$$

$$B_k^p(x) = \frac{x - \bar{x}_k}{\bar{x}_{k+p} - \bar{x}_k} B_k^{p-1}(x) + \frac{\bar{x}_{k+p+1} - x}{\bar{x}_{k+p+1} - \bar{x}_{k+1}} B_{k+1}^{p-1}(x) \quad (34)$$

ここに、 $H(t)$ は Heaviside 関数である。(33)–(34) により B スプライン基底関数は以下のような局所的な台を持つことが分かる。

$$\text{supp.}(B_k^p) = [\bar{x}_k, \bar{x}_{k+p+1}) \quad (35)$$

同様に、トポロジー導関数 $\mathcal{T}_i(\mathbf{x})$ も以下のように B スプライン曲面により構成する。

$$\mathcal{T}_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^n B_k^p(x) B_\ell^q(y) \hat{\mathcal{T}}_{k\ell} \quad (36)$$

しかしながら、(7) を用いてトポロジー導関数の B スプライン展開の制御変数 $\hat{\mathcal{T}}_{k\ell}$ を直接計算することはできない。そこで、 $(n+1)(m+1)$ 個のサンプル点で計算したトポロジー導関数の値を B スプライン曲面 (36) で補間することで $\hat{\mathcal{T}}_{k\ell}$ を得る。ここでは、サンプル点として Greville abscissae (26)–(28) を採用する。すなわち、これらの点においてトポロジー導関数を計算し、得られた値を (36) の左辺に代入して得られる $(n+1)(m+1)$ 次の線形代数方程式を解いて制御変数 $\hat{\mathcal{T}}_{k\ell}$ を得る。なお、このようにして得られる線形代数方程式の係数行列は B スプライン基底関数の台の局所性 (35) により疎行列である。

(18) の θ_i は離散化されたレベルセット関数とトポロジー導関数を用いて以下のように計算できる。

$$(\mathcal{T}_i, \phi_i)_{L^2(D)} = \sum_{k=0}^m \sum_{k'=0}^m \left(\int_0^1 B_k^p(x) B_{k'}^p(x) dx \right) \sum_{\ell=0}^n \sum_{\ell'=0}^n \left(\int_0^1 B_\ell^q(y) B_{\ell'}^q(y) dy \right) \hat{\phi}_{k\ell} \hat{\mathcal{T}}_{k'\ell'} \quad (37)$$

(37) の計算に必要な

$$A_{kk'} = \int_0^1 B_k^p(x) B_{k'}^p(x) dx \quad (38)$$

の積分区間 $[0, 1]$ は B スプライン基底関数の性質 (35) により、 $[\min\{\bar{x}_k, \bar{x}_{k'}\}, \max\{\bar{x}_{k+p+1}, \bar{x}_{k'+p+1}\}]$ に置き換えることができるが、この区間において被積分関数は高々 $2p$ 次の多項式なので、(38) の積分は $p+1$ 次の Gauss-Legendre 求積により厳密に計算できる。

以上をまとめると (24) を用いて ϕ_i (の制御変数) から ϕ_{i+1} (の制御変数) を計算する手順は以下のとおりである。

1. 境界要素生成アルゴリズムの要求する格子点における ϕ_i の値を (25) により計算する。メッシュ生成用の格子点の数を B スプライン基底関数 (または制御変数) の数 $(n+1)(m+1)$ よりも多く取ることで、境界要素法の精度を制御することが可能である。

2. 上で計算した ϕ_i の分布に基づき $\Gamma(t_i)$ に対応する境界要素を生成し、必要であればこれを Hermite スプラインを用いて改良する (9)。
3. 境界要素法を実行し、(26)–(28) で定義された Greville abscissae におけるトポロジー導関数 (7) を計算する。
4. 上で得た Greville abscissae におけるトポロジー導関数の値を B スプライン曲面 (36) により補間し、トポロジー導関数の制御変数 $\hat{\mathcal{T}}_{k\ell}$ を計算する。
5. (37) により $(\mathcal{T}_i, \phi_i)_{L^2(D)}$ を計算する。
6. 後述の直線探索により設定した κ_i に対し、(24) により $\hat{\phi}_{i+1}$ を得る。

3.4. κ_i の設定 (直線探索) と収束判定について

初期ステップにおいては $\kappa_0 = 1$ とする。ステップ $i > 0$ においては、(最小化問題を解く場合には) 以下の手順により κ_i を設定する。

1. $\kappa_i = \min\{1, a\kappa_{i-1}\}$
2. while $J(\Omega(t_i)) > cJ(\Omega(t_{i-1}))$ do
 $\kappa_i \leftarrow b\kappa_i$
enddo

ここに、 $a > 1$ 、 $b < 1$ 、 $c < 1$ はパラメータである。このとき、 κ_i の値は次第に小さくなる傾向が見られ、局所解に trap されることがある。そこで、 κ_i が閾値 ε_1 を下回ったときに $\kappa_i = 1$ と初期化する。 κ_i が N_{trap} 回初期化され、かつ、 κ_i が閾値 ε_2 よりも小さくなったとき、あるいはステップ数があらかじめ定めた最大回数 N_{max} に達した際に最適化アルゴリズムを終了する。

4. 数値計算結果

最後に、簡単な数値計算例を示す。設計領域を $D = [-10, 10]^2$ とし、 x_1 軸方向正の向きに進む角周波数 $\omega = 0.7$ の平面波に対して、 $M = 15$ 個の観測点 $(15 + 2n_x, -3 + 3n_y)$ ($n_x = 0, 1, \dots, 5, n_y = 0, 1, 2$) における $|u|^2/2$ の和を最小化する散乱体の形状を求めた。B スプライン基底関数 (制御変数) の数 $N_c (= n = m)$ は 12、16 あるいは 26 とし、その次数は 2 で固定した。境界要素の生成に用いるレベルセット関数を評価する格子点の数は D 内に 3721 点、等間隔に配置した。また、 Ω の材料定数は $\varepsilon = \mu = 1$ とした。3.4 節で導入した最適化アルゴリズムのパラメータは $a = 1.5$ 、 $b = 0.5$ 、 $c = 0.99$ 、 $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ 、 $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ 、 $N_{\text{trap}} = 3$ 、 $N_{\text{max}} = 100$ とした。

得られた最適形状を Fig. 3 に、目的関数の推移を Fig. 4 に示す。目的関数はどの場合にも小さくなり、 N_c の大きさに対応して形状の複雑さが概ね制御できていることが分かる。また、複雑な形状 (N_c が大きい) 場合に目的関数の値がより小さくなっており、予想通りの結果が得られた。

前と同じ設定で最大化問題を解いた場合の最適形状を Fig. 5 に、目的関数の推移を Fig. 6 に示す。概ね最小化の場合と同じ議論が成り立つが、目的関数の値と N_c の大きさの相関が見られない。局所解に陥った等の理由が考えられるため、直線探索法の修正や収束判定の見直しが必要であると考えられる。

5. おわりに

本論文では、トポロジー導関数とレベルセット関数の球面線形補間によるトポロジー最適化法⁽¹²⁾に対して、レベルセット関数の空間離散化にBスプライン曲面を用いる手法を提案した。提案法を用いて2次元Helmholtz方程式のNeumann問題に支配される場で定義されたトポロジー最適化問題を解いた。制御点の数をパラメータとすることで得られる形状の複雑さを制御しつつ、最適解を求めることができた。一方で、Bスプライン基底関数の次数をパラメータとする場合の数値計算は本論文では取り扱うことができず、今後の課題となった。その他の今後の検討課題としては、直線探索法や収束判定に関する詳細な検討をおこなうこと、2次元Helmholtz方程式以外の偏微分方程式に支配される場(特に三次元問題)における提案手法の実装を行い、数値計算例を蓄積すること、加工性・成形可能性を考慮した設計法⁽¹⁶⁾へと本手法を拡張すること等が挙げられる。

最後に、トポロジー導関数とレベルセット関数の球面線形補間によるトポロジー最適化法⁽¹²⁾において、感度解析に境界要素法を用いて、無限遠を含む領域におけるトポロジー最適化を実装したこと自体も本論文の重要な成果の一つであることを付記する。

参考文献

- (1) M.P. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2, pp. 197–224, 1988.
- (2) I. Ferguson, et al. Topology optimization software for additive manufacturing: A review of current capabilities and a real-world example. In *ASME 2016 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pp. V02AT03A029. American Society of Mechanical Engineers, 2016.
- (3) M.B. Dühring, J.S. Jensen, and O. Sigmund. Acoustic design by topology optimization. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 317, No. 3, pp. 557–575, 2008.
- (4) K. Yaji, T. Yamada, M. Yoshino, T. Matsumoto, K. Izui, and S. Nishiwaki. Topology optimization using the lattice boltzmann method incorporating level set boundary expressions. *Journal of Computational Physics*, Vol. 274, pp. 158–181, 2014.
- (5) M.P. Bendsøe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 69, No. 9, pp. 635–654, 1999.
- (6) G. Allaire, F. Jouve, and A.M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No. 1, pp. 363–393, 2004.
- (7) T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, and A. Takezawa. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45, pp. 2876–2891, 2010.
- (8) H. Isakari, K. Kuriyama, S. Harada, T. Yamada, T. Takahashi, and T. Matsumoto. A topology optimisation for three-dimensional acoustics with the level set method and the fast multipole boundary element method. *Mechanical Engineering Journal*, Vol. 1, No. 4, pp. CM0039, 2014.
- (9) H. Isakari, K. Nakamoto, T. Kitabayashi, T. Takahashi, and T. Matsumoto. A multi-objective topology optimization for 2D electro-magnetic wave problems with the level set method and BEM. *European Journal of Computational Mechanics*, Vol. 25, No. 1-2, pp. 165–193, 2016.
- (10) H. Isakari, T. Kondo, T. Takahashi, and T. Matsumoto. A level-set-based topology optimisation for acoustic-elastic coupled problems with a fast BEM–FEM solver. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 315, pp. 501–521, 2017.
- (11) Y. Noguchi, T. Yamada, M. Otomori, K. Izui, and S. Nishiwaki. An acoustic metasurface design for wave motion conversion of longitudinal waves to transverse waves using topology optimization. *Applied Physics Letters*, Vol. 107, No. 22, p. 221909, 2015.
- (12) S. Amstutz and H. Andrä. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 216, No. 2, pp. 573–588, 2006.
- (13) S.M. Giusti, A. Ferrer, and J. Oliver. Topological sensitivity analysis in heterogeneous anisotropic elasticity problem. theoretical and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 311, pp. 134–150, 2016.
- (14) S. Amstutz. Analysis of a level set method for topology optimization. *Optimization Methods and Software*, Vol. 26, No. 4-5, pp. 555–573, 2011.
- (15) A. Carpio and M.L. Rapan. Solving inhomogeneous inverse problems by topological derivative methods. *Inverse Problems*, Vol. 24, No. 4, p. 045014, 2008.
- (16) 佐藤勇気, 山田崇恭, 泉井一浩, 西脇眞二. 仮想的な物理モデルに基づく幾何学的制約付きトポロジー最適化(型成形及びフライス加工のための幾何学的制約法). *日本機械学会論文集*, Vol. 83, No. 851, pp. 17–00081, 2017.

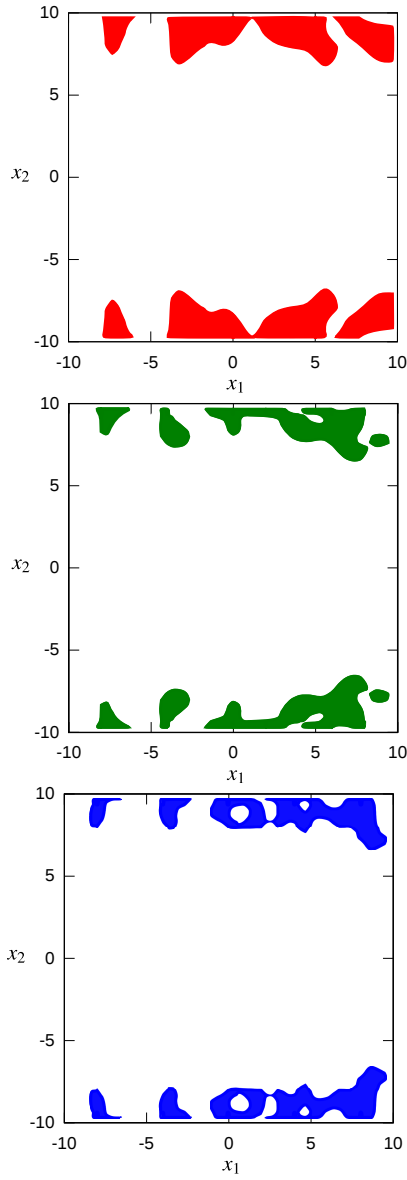


Fig. 3 Optimal configurations of minimisation problem for the case of $N_c = 12$ (top), 16 (centre) and 26 (bottom). The configuration is simplified when the number of control points decreases.

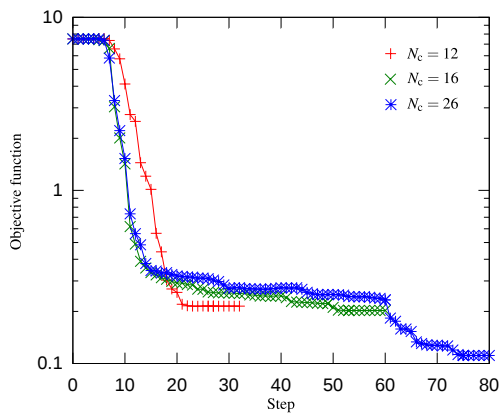


Fig. 4 History of the objective function of minimisation problem.

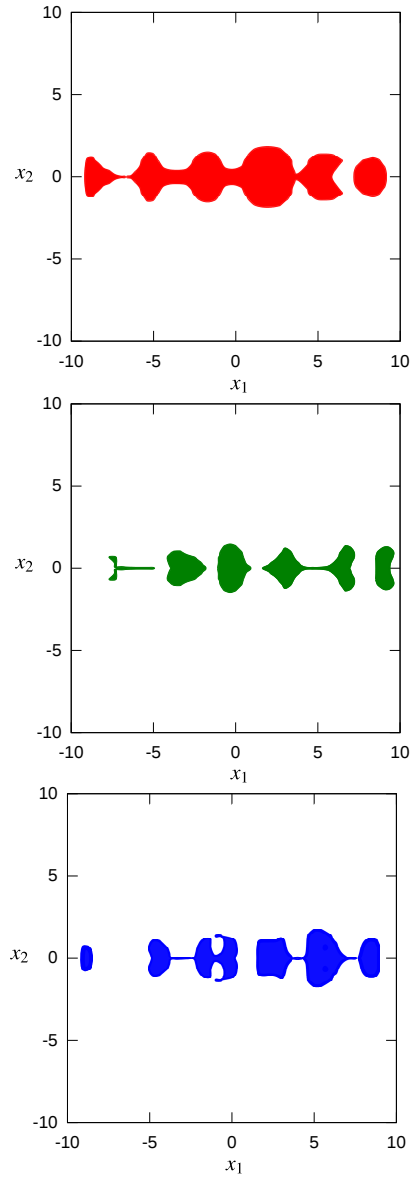


Fig. 5 Optimal configurations of maximisation problem for the case of $N_c = 12$ (top), 16 (centre) and 26 (bottom). The configuration is simplified when the number of control points decreases.

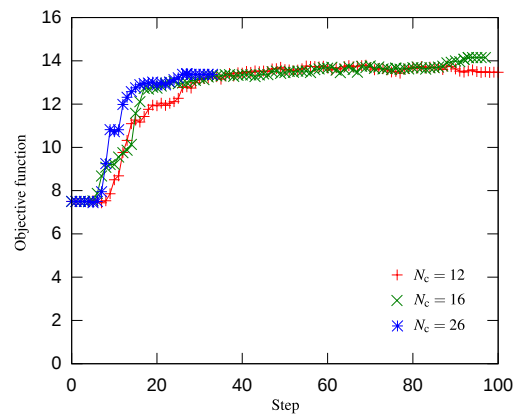


Fig. 6 History of the objective function of maximisation problem.