

# 個別要素法による動的板曲げ問題の定式化について

## A FORMULATION FOR DYNAMIC PLATE BENDING ANALYSES BY DISTINCT ELEMENT METHOD

荒井 政大<sup>1)</sup>, 後藤 圭太<sup>2)</sup>, 森下 貴都<sup>3)</sup>, 長田 圭介<sup>4)</sup>

Masahiro ARAI, Keita GOTO, Takato MORISHITA, Keisuke NAGATA

1) 名古屋大学工学研究科航空宇宙工学専攻 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: arai@nuae.nagoya-u.ac.jp)

2) 名古屋大学工学研究科航空宇宙工学専攻 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: goto@nuae.nagoya-u.ac.jp)

3) 名古屋大学工学部機械・航空工学科 (E-mail: morishita.takato@d.mbox.nagoya-u.ac.jp)

4) 名古屋大学工学研究科航空宇宙工学専攻 (E-mail: nagata.keisuke@b.mbox.nagoya-u.ac.jp)

Distinct Element Method (DEM) have been applied for a destruction analyses. However, it is necessary to divide section into many element in order to obtain high accurate results for the bending and twisting analyses of the structures using conventional DEM. In the present study, the traditional DEM approach was improved and optimized to a plate bending problem. Using a bending joint between elements, bending moment and twisting moment can be defined. Therefore, an only one layer of elements is needed to discretize the plate structure. We have shown numerical demonstration of dynamic plate bending analyses using proposed DEM, and verified these effectiveness. Furthermore, we have also shown calculation results of plate impact response analyses taking into account plastic deformation and destruction. The present research indicate that our alternative formulation is effective for the analyses of thin plate structure. These results provide a new potential into analyses of aircraft accident, space debris and so on.

**Key Words**: Distinct Element Method, Plate Bending Problem, Dynamic Analyses, Non-linear Problems

### 1. 緒言

物体の損傷や破壊, さらには変形の非線形性を伴う固体の動的な解析に適した数値解析法として, 個別要素法 (Distinct Element Method, DEM)<sup>(1)</sup> と呼ばれる手法が知られている. . . 個別要素法とは, 1971 年に Peter A. Cundall が提案し<sup>(2)</sup>, 当初は土木工学分野において多く用いられ, 土石流の挙動や岩盤の破壊解析<sup>(3, 4, 5)</sup>, 砂利石の強度解析<sup>(6, 7)</sup> など, 様々な問題に用いられてきた. 土木工学では, 接触時のみに反発力を伝達する要素ばねのみを用いて土砂の動解析を行ってきた. その後, 要素間に間隙ばねを設置して連続体の挙動を解析できるようになり, 構造物の破壊に関する研究に用いられるようになった.

個別要素法により構造物の動的解析を行う場合, 対象の構造を円形や球形の離散要素による集合体としてモデル化し, 各要素の運動方程式を逐次的に解くことになる. 個別要素法のメリットは, モデルが単純であることから要素間の力学的関係を示すパラメータの設定が容易であり, 非線形問題への適用が容易であることが挙げられる. また, 個々の要素間の破壊を単純なクライテリアで表現できるなどの利点もある.

しかしながら, これまでの個別要素法では, 構造の曲げやねじりを扱う際, 厚さ方向の応力分布を高い精度で表現するため, 層状に細かな要素分割が必要となり, 解析コストの増大につながっていた. また, 有限要素法と同様に, 面内方向と厚さ方向の寸法差 (アスペクト比) が大きい場合に数値解が不安定になるなどの問題点もあった<sup>(8)</sup>. 従って, 航空機などのように代表寸法に対して非常に薄い殻構造や板構造の数値シミュレーションを行うには, 曲げやねじりによる構造の変形に対応した新たな要素の提案が必要不可欠である.

そこで本研究では個別要素法における離散化要素として, 個々の要素間に関節を設け, その角度に依存するモーメントを求めて曲げやねじりの力を単層の要素列で伝達する新たな手法を開発した. 本論文で提案する離散化要素は, 基本的に古典板理論に基づく連続体的手法を個別要素法に適用したものであるが, 板や殻といった構造物が非定常な動的荷重を受ける際の変形挙動および破壊挙動を簡便かつ効率的に解析することが可能な手法である. 本提案手法により, 動的な平板の曲げ問題について例題解析を行い, その有効性を検証した. また, 材料非線形性や破壊を考慮した場合についても数値実験による検証を行った.

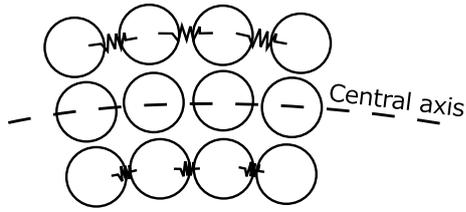


Fig. 1 A conventional DEM discrete model.

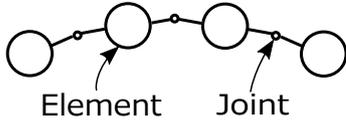


Fig. 2 An alternative DEM model.

## 2. 個別要素法の基礎理論

個別要素法では、質点をばねおよびダンパー要素によって結合した離散的なモデルにより近似することにより、その変形と運動を解析する手法である。従来の個別要素法では、Fig.1に示されるような要素間の相対距離に対して2体間の相互作用力を与える形のモデルが用いられてきた。しかしながら、薄板や殻構造においては、板厚方向に分布する曲げ応力を高い精度で近似しなければ解析精度が大きく損なわれるため、厚さ方向に多くの要素を積み上げる必要があり、そのことが解析コストを増大させる要因となっていた。

そこで、本研究ではFig.2に示すように、質量要素間に関節を設け、関節の曲げ角度に応じて両端の要素にモーメントを発生させる形の要素を提案し、個別要素法に適用する。すなわち、曲げモーメント  $M_x$  および  $M_y$  を、個々の関節の曲げ角度  $\theta_x, \theta_y$  より以下のように計算する。

$$M_x^i = k_x^i \theta_x^i, \quad M_y^i = k_y^i \theta_y^i \quad (1)$$

ここで、 $i$  は関節の番号を表すインデックスである。同様にねじりモーメントに関しても、関節におけるねじれ角  $\theta_{xy}, \theta_{yx}$  を用いて以下のように定義する。

$$M_{xy}^i = k_{xy}^i \theta_{xy}^i, \quad M_{yx}^i = k_{yx}^i \theta_{yx}^i \quad (2)$$

薄板の曲げ理論によれば、曲げ剛性  $k_x^i, k_y^i$  とねじり剛性  $k_{xy}^i, k_{yx}^i$  は、ヤング率  $E$ 、板厚  $h$ 、 $x$  方向および  $y$  方向に対する格子間距離  $\Delta x, \Delta y$  を用いて以下のようにあらわされる。

$$k_x^i = \frac{Eh^3}{12} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad k_y^i = \frac{Eh^3}{12} \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (3)$$

$$k_{xy}^i = \frac{Eh^3}{12} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad k_{yx}^i = \frac{Eh^3}{12} \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (4)$$

なお、本論文では解析手続きの簡略化のため、ポアソン比を考慮していない。

板の曲げ問題における定式化では、各質点要素における運動方程式を考える必要がある。本論文では曲げのみを扱うため、運動方程式は板の面外方向 ( $z$  軸方向) のみを考えればよい。

Fig.3に示されるように、一つの質点要素  $m_{i,j}$  に対して4つの曲げモーメントと4つのねじりモーメントが作用する。

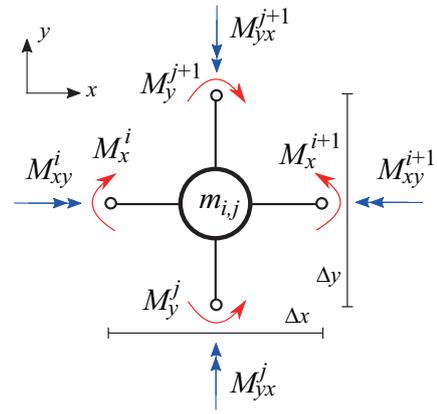


Fig. 3 Bending moment components applying a DEM element.

これらのモーメントと各結合節点に作用する  $z$  軸方向の面外力によるモーメントのつりあいを考えることにより、各質点  $m_{i,j}$  に作用する面外力  $Q_i, Q_j$  は以下ようになる。

$$Q_i = \frac{M_x^i - M_x^{i+1}}{\Delta x} + \frac{M_y^j - M_y^{j+1}}{\Delta y} \quad (5)$$

$$Q_j = \frac{M_y^j - M_y^{j+1}}{\Delta y} + \frac{M_x^i - M_x^{i+1}}{\Delta x} \quad (6)$$

ここで、上式の右辺第1項は曲げモーメントによる等価面外力であり、第二項はねじりモーメントによる等価面外力を表す。従って、各々の質量要素  $(i, j)$  に作用する  $z$  軸方向の合力が求められるので、最終的に以下のような板のたわみに関する運動方程式を得る。

$$m_{i,j} \frac{d^2 w_{i,j}}{dt^2} = (Q_i - Q_{i+1}) + (Q_j - Q_{j+1}) \quad (7)$$

ただし、 $w_{i,j}$  は板を2次元的に考えた場合の  $i$  番目 ( $x$  方向)、および  $j$  番目 ( $y$  方向) のインデックスにおけるたわみを表す。同様に  $m_{i,j}$  はインデックス  $i, j$  の位置における質量を表す。個別要素法では上式で表される運動方程式を陽的に解くことにより個々の要素の変位の時刻歴を算出する。

## 3. 材料非線形問題の解析

本研究では材料非線形問題に対する板の曲げ問題の定式化を取り扱うため、曲げ角と曲げモーメントの関係について応力ひずみ関係の非線形性に基づく関係式を導出する。ここでは議論を単純化するために、Fig.4左に示すような、材料の降伏応力を  $\sigma_0$  とし、ひずみが増加して降伏応力に達した後は応力が一定値  $\sigma_0$  になるような弾完全塑性体を仮定して議論する。

曲げモーメントは  $M$  は断面に作用する応力の積分値として求められる。塑性変形が生じているときの断面における応力分布はFig.4のようにあらわされる。すなわち、

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 \frac{\eta}{\eta_y} \\ \sigma_0 \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 $\eta$  は中立軸から着目点までの距離、 $\eta_y$  は中立軸から塑性変形開始点までの距離である。曲げモーメントを求める

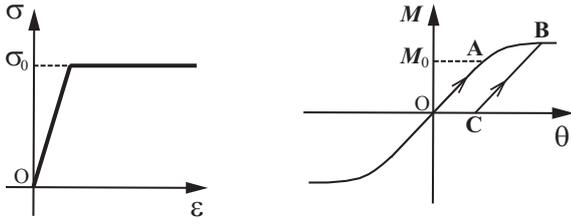


Fig. 4 Stress-Strain relation of elastic-perfectly plastic solid(left) and relation between bending angle and moment(right).

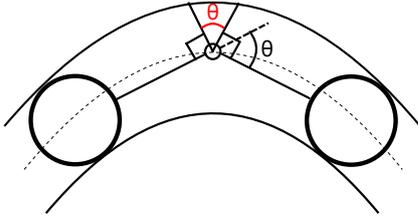


Fig. 5 Fracture criterion of the plate bending.

ために断面上の応力を積分すると,

$$M = \int_S \sigma(\eta) \eta dS = \frac{\sigma_0}{\eta_y} \int_{S_e} \eta^2 dS + \int_{S_p} \sigma_0 \eta dS \quad (9)$$

ここで,  $S_e$  は弾性領域の断面積,  $S_p$  は塑性領域の断面積である. 板の幅および厚さをそれぞれ  $b, h$  とすると,  $dS = b d\eta$  となり,

$$\begin{aligned} M &= 2b\sigma_0 \left[ \frac{1}{\eta_y} \int_0^{\eta_y} \eta^2 d\eta + \int_{\eta_y}^{h/2} \eta d\eta \right] \\ &= b\sigma_0 \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{\eta_y}{3} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, 塑性変形が生じはじめるときの曲げモーメントを  $M_0$  とおくと,

$$M_0 = \frac{4b\sigma}{h} \int_0^{h/2} \eta^2 d\eta = \frac{b\sigma_0 h^2}{6} \quad (11)$$

従って,

$$\frac{M}{M_0} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\kappa_0}{\kappa} \right)^2 \right] \quad (12)$$

ここで,  $\kappa_0$  は塑性変形が開始するときの曲率である. 結果的に, 式 (12) で与えられる曲げモーメントと曲げ角の関係は, Fig.4 右に示されるような非線形の関係を示す. すなわち, OA 間では, フックの法則に従って弾性変形が生じ, 点 A で板表面で降伏し, その後は塑性変形が進行する. その後, 塑性域の B 点でモーメントを除荷すると, 直線 OA に平行な直線 BC を移動する. さらに再び負荷を与えると, 直線 BC に沿って曲げ角が増加し, 点 B に達した後は塑性変形が再度進行し, 最終的には降伏モーメント  $M_0$  の 1.5 倍の値に漸近する特性を示す.

#### 4. 破壊基準

本研究では材料の破壊に際して基準を簡略化するため, 曲げモーメントによる破壊基準のみを考慮して解析を行う. 板の上下面で破断が生じた際に質量要素間の関節にて破壊が生

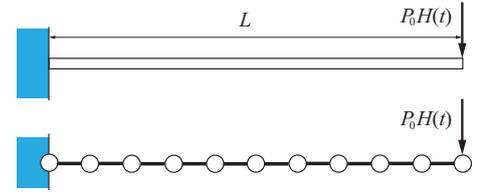


Fig. 6 A cantilever beam subjected to step-wise load.

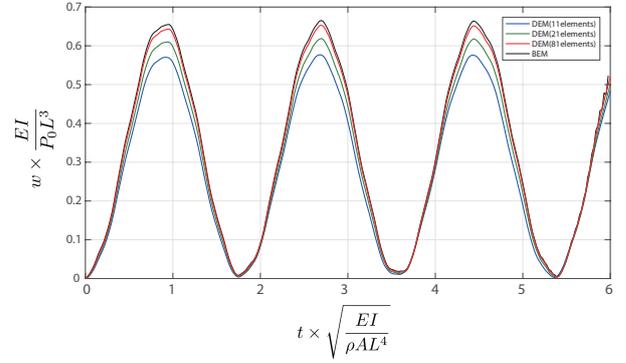


Fig. 7 Deflections of the tip on the cantilever beam subjected to step-wise load.

じたものとする. すなわち, その際の個別要素間の関節における曲げ角を用いて破壊の判定を行う. 関節の曲げ角とひずみの関係は次式で与えられる.

$$\theta_d \frac{h}{2} = \epsilon_d d_e \quad (13)$$

ここで,  $\theta_d$  は破壊時の関節の曲げ度,  $\epsilon_d$  は破壊に達する際のひずみ,  $d_e$  は要素間距離である. 上式より, 破壊が生じる際の関節の角度  $\theta$  の条件は以下ようになる.

$$\theta \geq \theta_d = \frac{2\epsilon_d d_e}{h} \quad (14)$$

#### 5. 数値解析例

##### 5.1. 単位ステップ状の荷重が作用する一端固定はりの過渡振動解析

Fig.6 に示すような一端を固定され, 他端に単位ステップ状の面外衝撃荷重  $P(t) = P_0 H(t)$  ( $H(t)$  は Heviside の単位ステップ関数) が作用した際の, はり先端におけるたわみの時間変動解を計算した. 本例題は一次元問題であり, はりは弾性体であるものとした. 個別要素は一次元的に配置し, 要素数を 11, 21, 81 の 3 通りで解析を行った.

Fig.7 に, 3 通りの要素数の場合についてははり先端のたわみの時刻歴の解析結果を示す. なお, 解析結果ははりのヤング率  $E$ , 断面 2 次モーメント  $I$ , 密度  $\rho$ , 断面積  $A$  で無次元化して示してある. また, 図中には Laplace 変換法に基づく厳密解を併せて示した.

要素数が少ない場合にはややたわみの変動が小さくなる傾向が認められるが, これは質点要素間を直線要素でつないでいる関係上, 要素関節において同じ曲げ角の状態でも要素数がより少ない場合のほうがはりの近似半径が本来の円弧よ

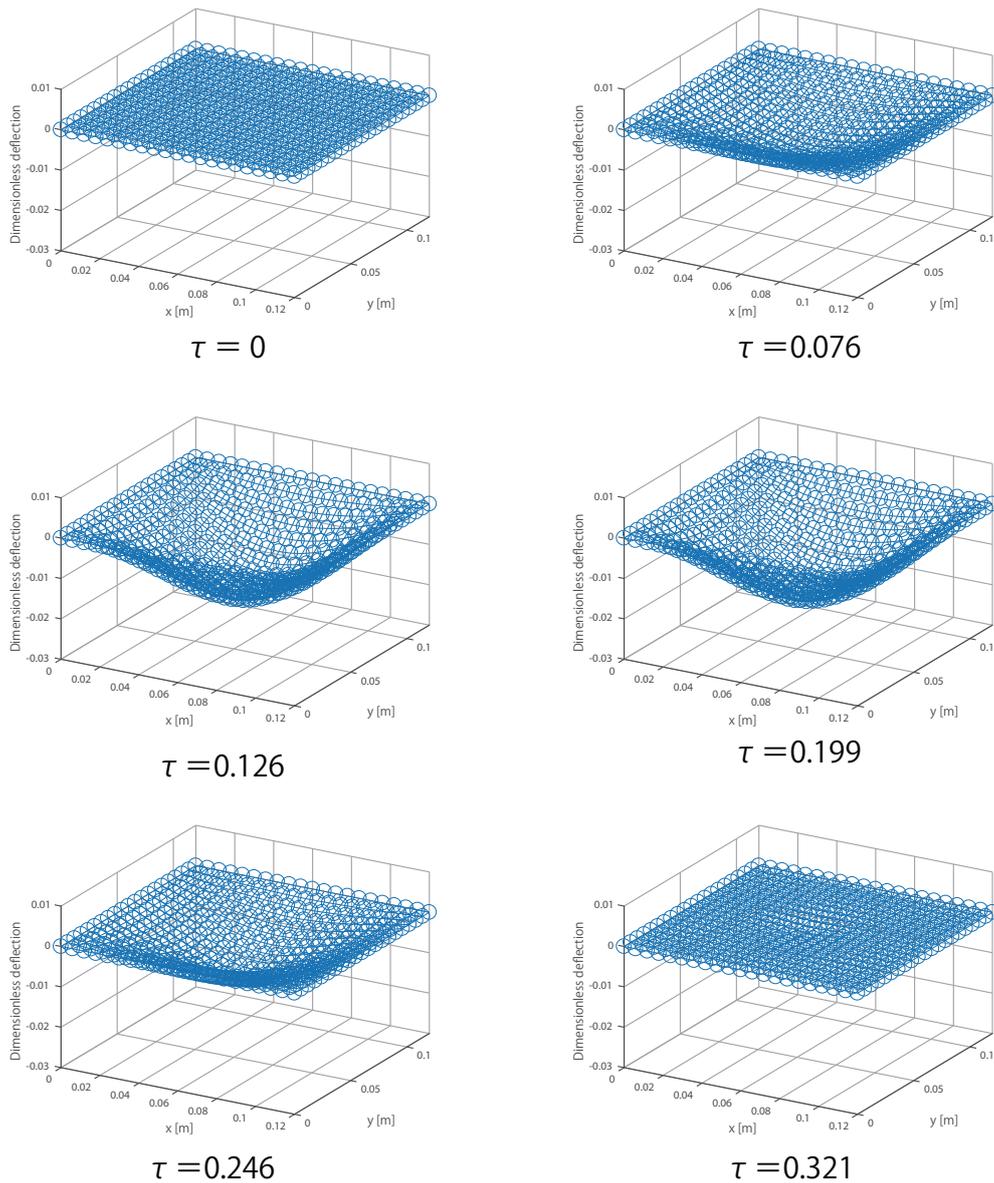


Fig. 8 Deflection histories on the loading point of a square plate subjected to step-like load.

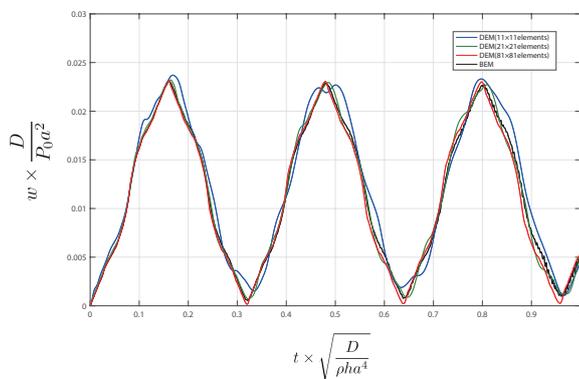


Fig. 9 Deflection histories of a square plate subjected to step-like load.

りも大きくなるため、結果的にみかけの剛性が増加し、たわみ変動が小さくなっているものと考えられる。

## 5.2. 単位ステップ状の集中荷重が作用する周辺固定単純支持板の過渡振動解析

周辺を単純支持された正方形板の中央に単位ステップ状の面外集中荷重  $P(t) = P_0 H(t)$  が作用する場合について、荷重点のたわみの時間変動解を計算した。先の例題と同様、本例題は線形弾性問題とし、計算結果を無次元化して示している。要素数は  $11 \times 11=121$ ,  $21 \times 21=441$ ,  $81 \times 81=6561$  の3通りの場合について解析を行った。

## 5.3. 平板と剛体球の衝突解析

周辺単純支持平板に剛体球が衝突した場合について数値シミュレーションを行った。本解析では材料構成式を非線形とし、アルミニウム合金を想定して弾完全塑性体として解析を行った。材料定数、要素数、剛体球の寸法等の解析条件を Table 1 に示す。平板表面の曲げひずみが9%に達したときに破壊が生じるものとして解析を実施した。

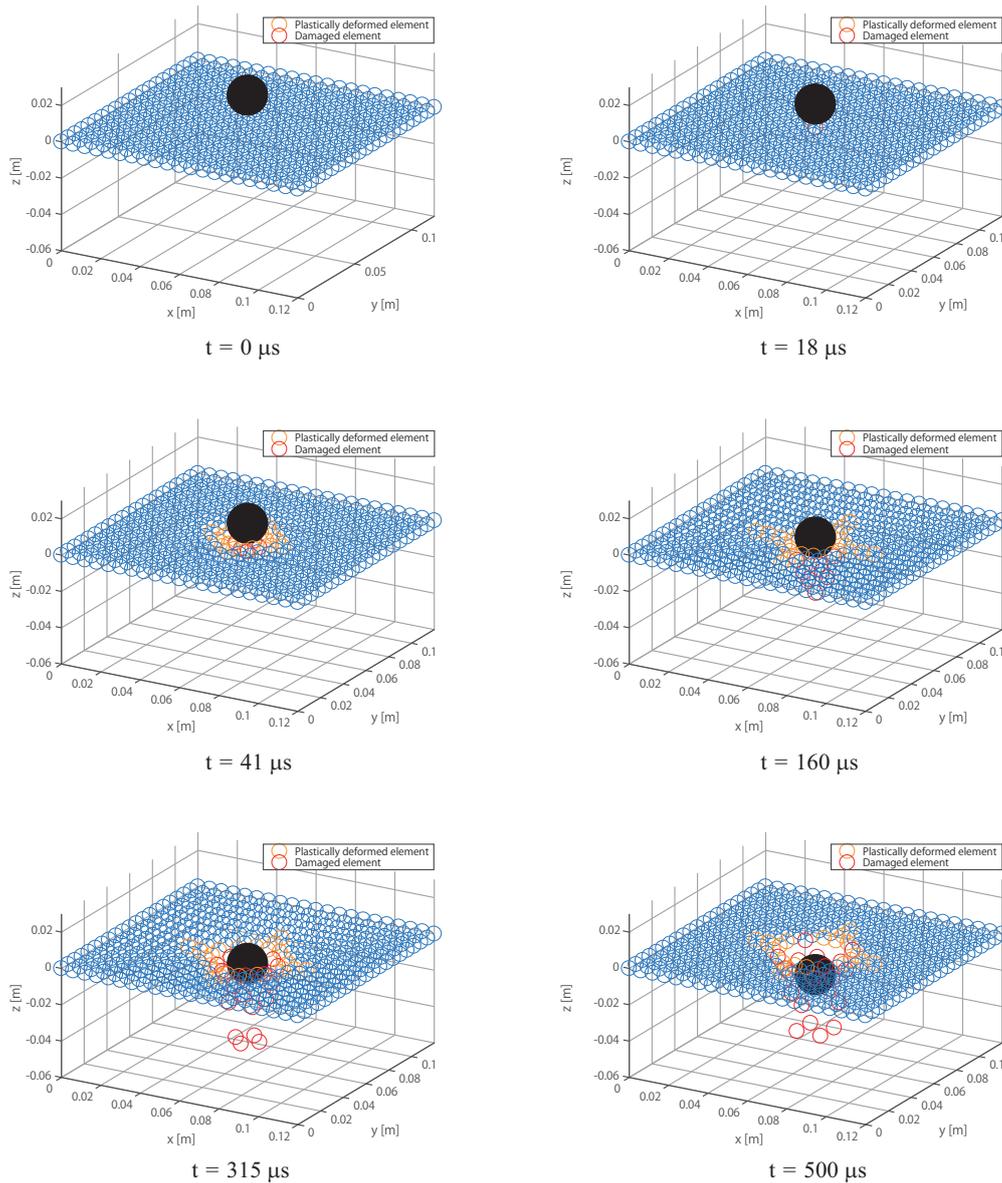


Fig. 10 Numerical analyses of impact collapse of a square plate and rigid ball.

剛体球と平板の衝突後はしだいに塑性変形領域が拡大し、 $t = 18\mu\text{s}$ において、平板中央の要素が破壊されていることが確認された。その後  $t = 41\mu\text{s}$ において、鋼球と接触している部位において塑性変形が発生、そして拡大していることが確認できる。

また、 $t = 160\mu\text{s}$ においては、塑性域が十字状に進展していることがわかる。これは板の形状および周辺の支持条件の影響であると考えられる。破壊された要素は鉛直下方向に飛ばされており、 $t = 315\mu\text{s}$ においては、剛体球が接触した部位の平板要素が破壊され、剛体球は平板を貫通している。剛体球の貫通後は、平板が自由振動を行う様子が観察された。

以上のように、構造の塑性変形と破壊・崩壊を伴う2体衝突問題の解析においても、本論文で提案される個別要素法の定式化が有効であることが確認された。

Table 1 Conditions of collision analysis.

Young's Modulus	71.6 [GPa]
Yield Stress $\sigma_0$	505 [MPa]
Number of Elements	$21 \times 21 = 441$
Radius of DEM Elements	3 [mm]
Dimension of the Plate	$120 \times 120 \times 6$ [mm]
Radius of Rigid Ball	10 [mm]
Mass of Rigid Ball	0.0224 [kg]
Velocity of Rigid Ball	200 [m/s]
Time Increment $\Delta t$	$1 \times 10^{-7}$ [s]

## 6. 結 論

本研究では材料非線形問題や多体問題、衝突問題、構造の破壊および崩壊を伴う複雑な動的問題の解析に多くの利点を有する個別要素法に対し、薄板や殻構造を効率的に解析可能な新たな定式化を提案し、数値シミュレーションによってその有効性を検証した。本論文の結論を以下に総括する。

1. 薄板や殻構造の曲げを取り扱うための新たな要素を提案した。隣接要素間の曲げ角と曲げモーメント、ねじれ角とねじりモーメントの関係から運動方程式を導出し、離散化するための新たな定式化を与え、従来の個別要素法に改良を加えた。
2. 弾完全塑性体に対して曲げモーメントねじれ角の関係を求め、それらの関係を個別要素法に適用して材料非線形問題に拡張するための定式化を示した。
3. 厳密解の得られる線形弾性問題に対して本手法を適用し、その有効性について検証した。要素数を増加させるとともに厳密解に収束する傾向を示すことから、本手法によって十分な精度で薄板およびはりの動的曲げ解析が可能となることを示した。
4. 鋼球が平板に衝突する問題について数値シミュレーションを実施した。本解析手法により、平板の塑性変形や損傷を簡便に取り扱うことが可能であり、構造物衝突・崩壊現象の効率的な解析が可能となることを示した。

## 参考文献

- (1) Catherine O'Sullivan, 鈴木輝一 訳: 粒子個別要素法-Particle Discrete Element Modeling: A Geomechanics Perspective-, 森北出版, 2014.
- (2) P. A. Cundall and O., D., L. Strack : A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique* 29, No.1, 1997, pp.47-65.
- (3) S. Utili, T. Zhao, G. T. Houlsby: 3D DEM investigation of granular column collapse: Evaluation of debris motion and its destructive power, *Engineering Geology*, Vol.186, 2015, pp.3-16.
- (4) P. W. Cleary, M. D. Sinnott, R. D. Morrison, S. Cummins, G. W. Delaney: Analysis of cone performance with change in material properties and operating conditions using DEM, *Materials Engineering*, 2017, pp.49-70.
- (5) B. Oing-Sheng, T. Shi-Hao, Z. Cun, Z.: DEM investigation of the fracture mechanism of rock disc containing hole(s) and its influence on tensile strength, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics (Part B)*, Vol.86, 2016, pp.197-216.
- (6) C. Ergenzinger, R. Seifried, P. Eberhard : A discrete element model predicting the strength of ballast stones, *Computers and Structures*, Vol.108-109, 2012, pp.3-13.
- (7) N. T. Ngo, B. Indraratna, C. Rujikiatkamjorn: DEM simulation of the behaviour of geogrid stabilised ballast fouled with coal, *Computers and Geotechnics*, Vol.55, 2014, pp.224-231.
- (8) 小国健二, 堀宗朗, 阪口秀, 破壊現象の解析に適した有限要素法の提案, 土木学会論文集, No.766/I-68, 2004, pp.203-217.
- (9) M. Arai, T. Adachi, H. Matsumoto: Elastodynamic Thin Plate Bending Analysis by Boundary Element Method with Laplace Transform, *JSME International Journal (Series A)*, Vol.40, No. 1, 1997, pp.65-74.