

周波数領域境界要素法と ACA による 凍結した多孔質体内部の介在物による波動散乱解析

ANALYSES OF WAVE SCATTERING BY AN INCLUSION IN FROZEN POROUS MEDIA USING A FREQUENCY-DOMAIN BOUNDARY ELEMENT METHOD WITH ACA

古川 陽¹⁾, 斎藤 隆泰²⁾, 廣瀬 壮一³⁾

Akira FURUKAWA, Takahiro SAITOH and Sohichi HIROSE

- 1) 東京工業大学環境・社会理工学院 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: furukawa.a.aa@m.titech.ac.jp)
2) 群馬大学大学院理工学部 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail: t-saitoh@gunma-u.ac.jp)
3) 東京工業大学環境・社会理工学院 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

This paper presents a boundary element method for wave scattering by an inclusion in frozen porous media. Frozen porous media consists of solid skeleton, pore fluid, and ice matrix, and is adequate to describe wave propagation in seabed layer which involves methane hydrate. The proposed method is a frequency-domain BEM accelerated by using \mathcal{H} -matrix and ACA (adaptive cross approximation). The validity of the proposed method has been confirmed, and several numerical examples show that S2-wave is useful in the search for an inclusion which includes highly concentrated methane hydrate.

Key Words: Boundary Element Method, Frozen Porous Media, Wave Scattering, \mathcal{H} -Matrix, Adaptive Cross Approximation

1. はじめに

近年, 新たなエネルギー資源として, ガスハイドレートの一種であるメタンハイドレートが注目を集めている. メタンハイドレートは, 固体として海底地層に存在し, 特にその濃度の高い領域であるハイドレート濃縮帯の探査には, 弾性波動が有効であることが知られている.

メタンハイドレートを有する海底地層を対象とする弾性波動解析においては, 海底地層を構成する岩盤, 間隙水およびハイドレートの三相体を取り扱うことが望ましい. この様な三相体モデルのひとつに, 凍結した多孔質体 (frozen porous media⁽¹⁾) がある. このモデルは, Biot による飽和多孔質弾性体の力学モデル⁽²⁾ の拡張として知られており, ハイドレートの探査に関連する研究分野において, 積極的に取り上げられている. しかしながら, それらの多くは, 単純な波動伝播現象を取り扱うものであり⁽³⁾, 数値解析手法により波動場の計算を行っている研究の報告例はわずかである.

以上を踏まえ, 本論文では, 凍結した多孔質体内部の介在物による波動散乱解析のための境界要素法の開発を行う. なお, 本論文では, 比較的取扱いが容易な面外波動問題を対象とし, 周波数領域の境界要素法を採用する. また, 計算

時間の短縮および使用メモリの削減のため, \mathcal{H} 行列と ACA (adaptive cross approximation) を適用する. 開発した境界要素法を用いて, 入射波の散乱解析を行い, 介在物としてハイドレート濃度の高いハイドレート濃縮帯を想定し, 濃度の違いによる散乱特性の変化について考察する.

次節以降では, はじめに, 凍結した多孔質体の力学モデルと面外波動の伝播特性について簡潔にまとめる. 次に, 境界要素法の定式化と離散化, \mathcal{H} 行列と ACA の適用について説明する. その後, 数値解析例として, 提案手法の検証, \mathcal{H} 行列と ACA による行列圧縮効果を示し, 最後に, 散乱解析の結果を示す. 以下では, 特に断りのない限り, 1 つの項の中に繰り返し現れる下付き添え字に対して総和規約を適用する. また, ギリシャ文字による下付き添え字は 1, 2 をとるものとする.

2. 凍結した多孔質体と面外波動の伝播特性

2.1. 力学モデルの概要

凍結した多孔質体 (frozen porous media⁽¹⁾) は, Biot による二相体モデルの拡張として知られている. このモデルは, Fig.1 に示す様に, 多孔質構造を有する固体骨格部と氷骨格部, それ以外の部分を満たす間隙流体によって構成される. 本論文で対象とするメタンハイドレートを含む海底地層の場

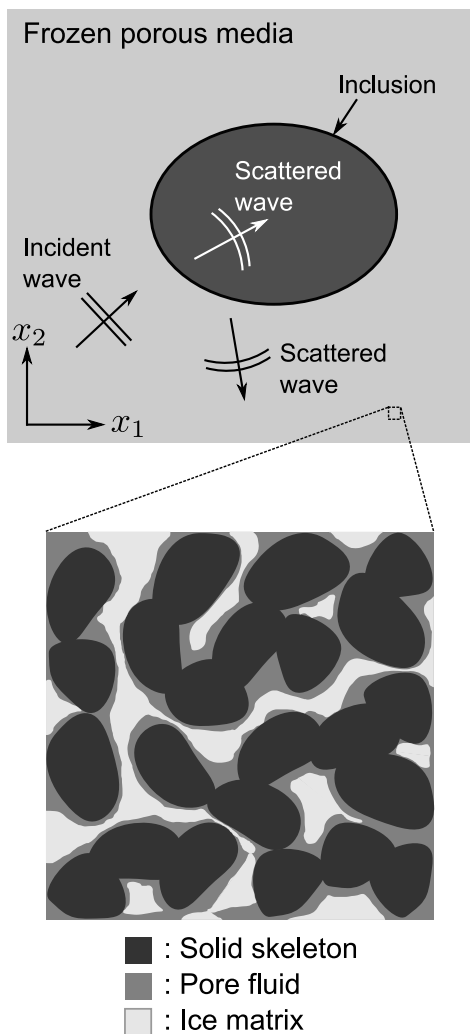


Fig. 1 Frozen porous media.

合、氷骨格部がメタンハイドレートに対応する。このモデルでは、Biotによる飽和多孔質弾性体と同様に、各相に生じる変位とそれらの相互作用を考慮することができる。なお、本論文では、固体骨格部および氷骨格部の力学的性質と間隙流体の浸透性に関して、等方性を仮定する。

本論文に示す定式化では、固体骨格部、間隙流体、氷骨格部の体積比をそれぞれ ϕ_s, ϕ_w, ϕ_i で表現する。このとき、これらの体積比に関して、以下の関係式が成り立つ。

$$\phi_s + \phi_w + \phi_i = 1 \quad (1)$$

本論文では、固体骨格部の体積比を $\phi_s = 0.8$ に固定し、それ以外の部分に含まれるメタンハイドレートの体積割合と波動の伝播・散乱特性の関係について考察する。そのため、固体骨格部以外の部分における氷骨格部の体積割合を氷飽和度 I' と呼び、次式で定義する。

$$I' = \frac{\phi_i}{1 - \phi_s} = \frac{\phi_i}{\phi_w + \phi_i} \quad (2)$$

ただし、 $0 < I' < 1$ とし、氷飽和度 I' の値が大きいく程、対象とする海底地層にメタンハイドレートが多く存在することを意味する。

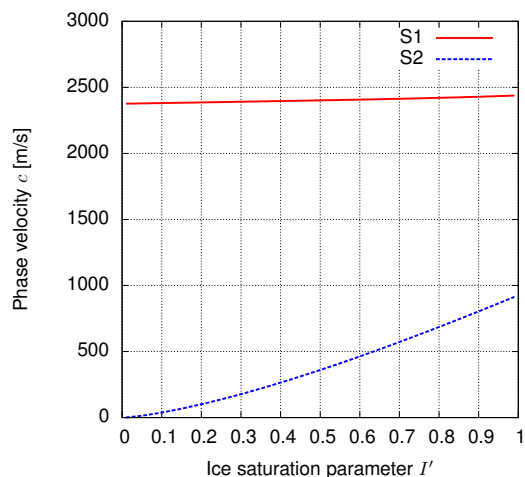


Fig. 2 The relationship between ice saturation parameter and phase velocity ($f = 100$ [Hz]).

2.2. 運動方程式

凍結した多孔質体の面外波動問題では、固体骨格部と氷骨格部の面外方向変位のみが連成し、間隙流体の圧力変動は生じない。このとき、周波数領域における運動方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}^{(1,1)} & \tilde{H}^{(1,3)} \\ \tilde{H}^{(3,1)} & \tilde{H}^{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}^{(1)} \\ \tilde{u}^{(3)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \tilde{b}^{(1)} \\ \tilde{b}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここに、 $\tilde{}$ は周波数領域における物理量を表し、 $\tilde{u}^{(1)}$ および $\tilde{u}^{(3)}$ は固体骨格部および氷骨格部に生じる面外方向変位、 $\tilde{b}^{(1)}$ および $\tilde{b}^{(3)}$ は固体骨格部および氷骨格部に作用する物体力の面外方向成分を表す。また、

$$\tilde{H}^{(p,q)} = \tilde{M}^{(p,q)} \partial_\alpha \partial_\alpha - \tilde{\Phi}^{(p,q)}, \quad p, q = 1, 3 \quad (4)$$

であり、 ∂_α は x_α に関する偏微分を表す。なお、間隙流体の影響は、式 (4) に示す係数 $\tilde{M}^{(p,q)}$ および $\tilde{\Phi}^{(p,q)}$ に含まれる。ただし、係数 $\tilde{M}^{(p,q)}$ は、間隙流体の粘性に加えて、固体骨格部および氷骨格部のせん断弾性係数と氷飽和度によって決定される。一方で、係数 $\tilde{\Phi}^{(p,q)}$ は、三相体の構成要素の密度、対象とする周波数、氷飽和度によって決定される。

2.3. 面外波動の伝播特性

凍結した多孔質体内部を伝播する面外波動は、S1波とS2波の2つの伝播モードが存在する。これらの波動の伝播特性は、以下の手順によって求めることができる。まず、式 (3) の運動方程式に平面波の表示式を代入し、物体力成分をゼロと仮定する。次に、得られた方程式の非自明解を考えることで、面外波動の伝播特性が得られる。ここでは、文献 (3) に示す砂岩を対象に、氷飽和度 I' の変化に伴う位相速度および Q 値の変化を調べる。ただし、 Q 値は波動伝播に伴うエネルギーの散逸効果を表し、その値が小さい程、散逸の影響が大きいことを意味する。以下に、周波数を $f = 100$ [Hz] とした場合の結果を示す。

Fig. 2 に、氷飽和度 I' を変化させた場合の位相速度の変化を示す。この結果から、氷飽和度 I' の値が大きくなる程、S1波およびS2波の位相速度が増大することが確認できる。ま

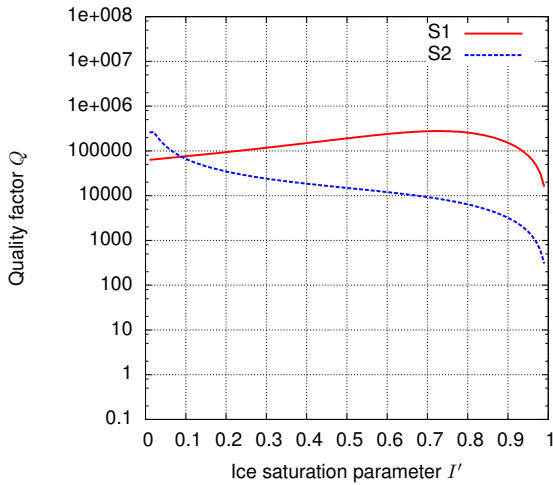


Fig. 3 The relationship between ice saturation parameter and quality factor ($f = 100$ [Hz]).

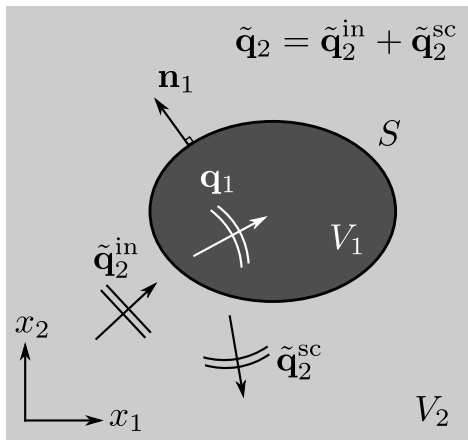


Fig. 4 Wave scattering by an inclusion in frozen porous media.

た、氷飽和度 I' の変化に対して、S1 波の位相速度の変化は小さいが、S2 波の位相速度の変化は大きいことが確認できる。

Fig.3 には、氷飽和度 I' の変化に伴う S1 波および S2 波の Q 値の変化を示す。同図に示す結果から、S1 波の Q 値は、氷飽和度 I' の増加に伴い一旦増加し、その後、減少することがわかる。一方、S2 波の Q 値は、氷飽和度 I' の増大に伴い減少することが確認できる。また、いずれの Q 値も、値そのものは大きいため、波動伝播に大きな影響は及ぼさないことが予想される。

3. 周波数領域境界要素法

3.1. 対象とする問題

Fig.4 に示す様な、凍結した多孔質体内部の介在物による入射波の散乱問題を考える。同図において、有限領域 V_1 および無限領域 V_2 は、材料物性値の異なる凍結した多孔質体で構成され、その境界 S は十分に滑らかなものとする。また、入射波は平面波とする。本論文では、角周波数 $\omega (= 2\pi f)$ に対して、以下に示す一般化変位 $\tilde{q}_{d;\alpha}$ および一般化表面力

$\tilde{s}_{d;\alpha}$ を定義する。

$$\{\tilde{q}_{d;\alpha}(\mathbf{x})\} = \begin{cases} \tilde{u}_d^{(1)}(\mathbf{x}) \\ \tilde{u}_d^{(3)}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (5)$$

$$\{\tilde{s}_{d;\alpha}(\mathbf{x})\} = \begin{cases} \tilde{t}_d^{(1)}(\mathbf{x}) \\ \tilde{t}_d^{(3)}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (6)$$

これらは位置 \mathbf{x} における値であり、下付き添え字 $d (= 1, 2)$ は領域 V_d に関する物理量であることを意味する。また、 $\tilde{u}_d^{(1)}$ および $\tilde{u}_d^{(3)}$ は、領域 V_d における固体骨格部および氷骨格部の面外方向変位を表し、 $\tilde{t}_d^{(1)}$ および $\tilde{t}_d^{(3)}$ は、領域 V_d における固体骨格部と氷骨格部の表面力の面外方向成分を表す。さらに、境界 S 上の点 \mathbf{y} において、外向き単位法線ベクトルは、次式を満足する。

$$n_{1;\alpha}(\mathbf{y}) = -n_{2;\alpha}(\mathbf{y}) \quad (7)$$

また、対象とする問題の境界条件は、次式で与えられるものとする。

$$\tilde{q}_{1;\beta}(\mathbf{y}) = \tilde{q}_{2;\beta}(\mathbf{y}) \quad (8)$$

$$\tilde{s}_{1;\beta}(\mathbf{y}) = -\tilde{s}_{2;\beta}(\mathbf{y}) \quad (9)$$

3.2. 周波数領域境界積分方程式とその離散化

Fig.4 に示す領域 V_1 に対して、周波数領域境界積分方程式は、次式で与えられる。

$$C_1(\mathbf{x})\tilde{q}_{1;\alpha}(\mathbf{x}) = \int_S \tilde{U}_{1;\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tilde{s}_{1;\beta}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) - \int_S \tilde{W}_{1;\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tilde{q}_{1;\beta}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) \quad (10)$$

同様に、領域 V_2 に対しては、以下に示す境界積分方程式が与えられる。

$$C_2(\mathbf{x})\tilde{q}_{2;\alpha}(\mathbf{x}) = \tilde{q}_{2;\alpha}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \int_S \tilde{U}_{2;\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tilde{s}_{2;\beta}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) - \int_S \tilde{W}_{2;\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tilde{q}_{2;\beta}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) \quad (11)$$

上述の境界積分方程式において、 $C_d(\mathbf{x})$ は自由項⁽⁴⁾を表し、次式で与えられる。

$$C_d(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & : \mathbf{x} \in V_d \\ 1/2 & : \mathbf{x} \in S \\ 0 & : \mathbf{x} \notin V_d, \mathbf{x} \notin S \end{cases} \quad (12)$$

また、 $\tilde{U}_{d;\alpha\beta}$ および $\tilde{W}_{d;\alpha\beta}$ は、凍結した多孔質体の面外波動問題に対する周波数領域基本解および二重層核を表す。

式 (10), (11) に示す境界積分方程式に対して、 $\mathbf{x} \in S$ とし、 N_e 個の一定要素 S^N を用いた選点法によって離散化し、式 (8), (9) に示す境界条件を用いて整理すると、最終的に以下に示す代数方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 & -\tilde{\mathbf{A}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 & \tilde{\mathbf{A}}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_1 \\ \tilde{\mathbf{s}}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{q}}_2^{\text{in}} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここに、 $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表し、 $\tilde{\mathbf{q}}_1$ および $\tilde{\mathbf{s}}_1$ は領域 V_1 の境界 S 上の一般化変位および一般化表面力を格納したベクトルである。また、 $\tilde{\mathbf{q}}_2^{\text{in}}$ は、領域 V_2 の境界 S 上の入射波による一般化変位を表すベクトルである。さらに、係数行列の成分は、以下の様にと与えられる。

$$(\tilde{\mathbf{A}}_d)_{MN;\alpha\beta} = \tilde{A}_{d;\alpha\beta}^N(\mathbf{x}^M) = \int_{S^N} \tilde{U}_{d;\alpha\beta}(\mathbf{x}^M, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{B}}_d)_{MN;\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \delta_{MN} \delta_{\alpha\beta} + \tilde{B}_{d;\alpha\beta}^N(\mathbf{x}^M) \\ &= \frac{1}{2} \delta_{MN} \delta_{\alpha\beta} + \int_{S^N} \tilde{W}_{d;\alpha\beta}(\mathbf{x}^M, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、 $M, N = 1, 2, \dots, N_e$ である。上述の代数方程式を解くことで、境界上の一般化変位と一般化表面力を求めることができる。

3.3. 基本解と二重層核

凍結した多孔質体の面外波動問題に対する周波数領域基本解は、角周波数 ω に対して、以下の式で与えられる。

$$\tilde{U}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi P} \{ \alpha_{\alpha\beta} K_0(S_1 r) - \beta_{\alpha\beta} K_0(S_2 r) \} \quad (16)$$

ここに、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ であり、 $K_n(\cdot)$ は n 次の第2種変形 Bessel 関数を表す。また、 S_1 および S_2 は、S1 波と S2 波の複素波数 k_{S1}, k_{S2} を用いて、次式で与えられる。

$$S_1 = -ik_{S1}, \quad S_2 = -ik_{S2} \quad (17)$$

ただし、 i は虚数単位を表す。さらに、 P は、

$$P = \tilde{M}^{(1,1)} \tilde{M}^{(3,3)} - \tilde{M}^{(1,3)} \tilde{M}^{(3,1)} \quad (18)$$

であり、 $\alpha_{\alpha\beta}$ および $\beta_{\alpha\beta}$ は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{S_2^2 - S_1^2} \begin{bmatrix} -\tilde{M}^{(3,3)} S_1^2 + \tilde{\Phi}^{(3,3)} & \tilde{M}^{(1,3)} S_1^2 - \tilde{\Phi}^{(1,3)} \\ \tilde{M}^{(3,1)} S_1^2 - \tilde{\Phi}^{(3,1)} & -\tilde{M}^{(1,1)} S_1^2 + \tilde{\Phi}^{(1,1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{S_2^2 - S_1^2} \begin{bmatrix} -\tilde{M}^{(3,3)} S_2^2 + \tilde{\Phi}^{(3,3)} & \tilde{M}^{(1,3)} S_2^2 - \tilde{\Phi}^{(1,3)} \\ \tilde{M}^{(3,1)} S_2^2 - \tilde{\Phi}^{(3,1)} & -\tilde{M}^{(1,1)} S_2^2 + \tilde{\Phi}^{(1,1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

なお、上述の基本解に対応する二重層核は、次式で与えられる。

$$\tilde{W}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{B}_{\beta\gamma}^y \tilde{U}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (21)$$

ここに、 $\tilde{B}_{\beta\gamma}^y$ は表面力作用素であり、以下の式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_{11}^y & \tilde{B}_{12}^y \\ \tilde{B}_{21}^y & \tilde{B}_{22}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{M}^{(1,1)} n_\gamma \partial_\gamma & -\tilde{M}^{(1,3)} n_\gamma \partial_\gamma \\ -\tilde{M}^{(3,1)} n_\gamma \partial_\gamma & -\tilde{M}^{(3,3)} n_\gamma \partial_\gamma \end{bmatrix} \quad (22)$$

である。

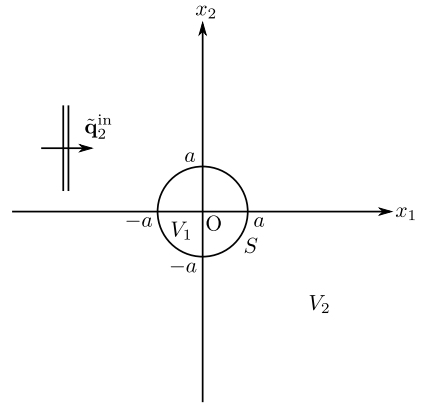


Fig. 5 Analytical model.

3.4. \mathcal{H} 行列および ACA の適用

本論文では、式 (13) に示す代数方程式に含まれる係数行列を、 \mathcal{H} 行列と ACA を用いて近似的に表現⁽⁵⁾ し、解析に用いる。これにより、計算時間の短縮と使用メモリの削減が期待できる。

ある行列 \mathbf{M} に対して、 \mathcal{H} 行列および ACA を適用した近似行列を $\mathbf{M}^{\mathcal{H}}$ と表現する。このとき、式 (13) に示す代数方程式の係数行列は、以下の様に近似することができる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 & -\tilde{\mathbf{A}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 & \tilde{\mathbf{A}}_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1^{\mathcal{H}} & -\tilde{\mathbf{A}}_1^{\mathcal{H}} \\ \tilde{\mathbf{B}}_2^{\mathcal{H}} & \tilde{\mathbf{A}}_2^{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

上式に示す様に、本論文では、4つの \mathcal{H} 行列によって係数行列を表現する。このとき、4つの \mathcal{H} 行列のクラスターツリーおよびブロックツリーの構造は等しいが、低ランク近似される小行列のランクはそれぞれ異なる。なお、本論文では境界値計算に、適用が容易な GMRES 法を用いることとする。

4. 数値解析例

4.1. 境界要素法の検証

提案手法の検証として、仮想境界による入射波の散乱解析を行う。Fig.5 に示す様な、無限領域 V_2 内部に半径 $a (= 12[\text{m}])$ の円状の散乱体 V_1 が存在するモデルを考える。このとき、入射波は、 x_1 軸の正方向に進行する最大振幅 u_0 の平面波とする。仮想境界の問題では、領域 V_1 および V_2 の材料定数を等しく設定する。これにより、散乱波は発生せず、領域内部の変位および表面力は入射波による変位および表面力に等しくなるため、これらの値の比較に基づく検証が可能となる。本論文では、入射波を S2 波とし、周波数を $f = 100$ [Hz] とした場合について考える。なお、領域 V_1 および V_2 は砂岩⁽³⁾ によって構成され、氷飽和度は $I' = 0.2$ とした、また、GMRES 法の収束条件は $\epsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-8}$ とし、境界要素数を $N_e = 250, 500, 1000$ と変化させた。なお、本節では、境界要素法の検証を行うため、 \mathcal{H} 行列と ACA の適用は行わない。

Fig.6 に、提案する境界要素法によって得られた変位および表面力と、入射波による変位および表面力の比較結果を示す。ただし、これらは境界 S 上における値である。同図 (a) は固体骨格部の変位の絶対値、(b) は氷骨格部の変位の絶対

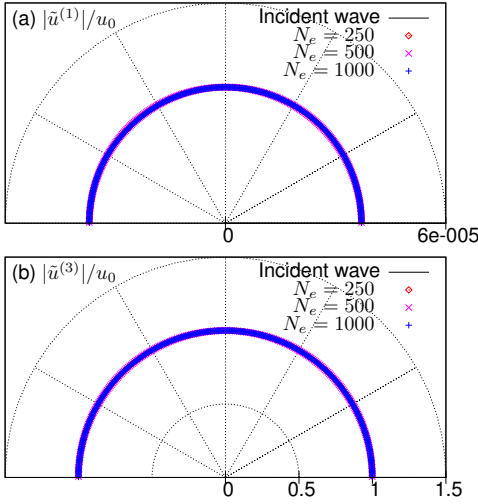


Fig. 6 The comparison of displacement components on the boundary S : (a) solid skeleton $|\tilde{u}^{(1)}|/u_0$, (b) ice matrix $|\tilde{u}^{(3)}|/u_0$.

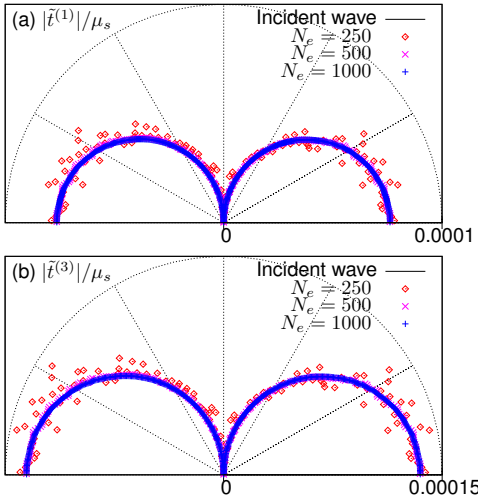


Fig. 7 The comparison of traction components on the boundary S : (a) solid skeleton $|\tilde{t}^{(1)}|/\mu_s$, (b) ice matrix $|\tilde{t}^{(3)}|/\mu_s$.

値に対応し、入射波の最大振幅 u_0 によって正規化されている。また、原点からの距離は変位の値に、角度はその値を有する要素の圆心位置の方向に対応している。なお、これらの図では、問題の対称性を考慮し、 $x_2 \geq 0$ の変位のみを示している。これらの結果から、いずれの要素数においても、全変位と入射波の変位は概ね一致していることが確認できる。

Fig.7 には、Fig.6 と同様の方法で、境界 S 上の全表面力の絶対値と、入射波による表面力の絶対値を示している。ただし、これらの値は、固体骨格部を構成する砂岩のせん断弾性係数 μ_s によって正規化を行っている。同図において、要素数 $N_e = 250, 500$ の結果では比較的大きな誤差の発生が確認できるが、要素数 $N_e = 1000$ の結果では入射波の表面力と概ね一致していることが確認できる。

4.2. \mathcal{H} 行列と ACA による係数行列の圧縮効果

次に、 \mathcal{H} 行列と ACA による係数行列の圧縮効果について検証を行う。前節に示した仮想境界による入射波の散乱解析

Table 1 The effects of the implementation of \mathcal{H} -matrix and ACA.

η	ϵ_{ACA}	E	R_N	R_T	N_{GMRES}	r_{GMRES}
-	-	7.52×10^{-3}	1.000	1.000	394	8.29×10^{-9}
1	10^{-8}	7.95×10^{-3}	0.251	0.457	468	8.90×10^{-9}
1	10^{-9}	6.62×10^{-3}	0.270	0.615	417	7.84×10^{-9}
1	10^{-10}	6.23×10^{-3}	0.287	0.617	459	4.71×10^{-9}
2	10^{-8}	3.42×10^{-2}	0.238	0.464	514	8.70×10^{-9}
2	10^{-9}	6.51×10^{-3}	0.256	0.544	417	8.11×10^{-9}
2	10^{-10}	6.48×10^{-3}	0.271	0.557	417	5.54×10^{-9}

において、要素数を $N_e = 1000$ とし、 \mathcal{H} 行列のブロック分割における許容パラメータ η および ACA の精度を決めるパラメータ ϵ_{ACA} を変化させ、その結果を考察する。本論文では、クラスタに含まれる境界要素の最小数を $n_{\min} = 32$ とした。なお、これらのパラメータの詳細に関しては、文献⁽⁶⁾にまとめられている。

本論文では結果の比較のため、以下に示す評価指標を導入する。はじめに、解析によって生じる誤差 E は、提案手法によって得られる境界値と解析解である入射波の値を用いて、次式で評価する。

$$E = E_1^q + E_2^q + E_1^s + E_2^s \quad (24)$$

ここに、

$$E_\alpha^q = \sqrt{\sum_{M=1}^{N_e} |\tilde{q}_\alpha(\mathbf{x}^M) - \tilde{q}_\alpha^{\text{in}}(\mathbf{x}^M)|^2} / \sqrt{\sum_{M=1}^{N_e} |\tilde{q}_\alpha^{\text{in}}(\mathbf{x}^M)|^2} \quad (25)$$

である。なお、 E_α^s は、上式の \tilde{q}_α および $\tilde{q}_\alpha^{\text{in}}$ を、 \tilde{s}_α および $\tilde{s}_\alpha^{\text{in}}$ に置き換えることで得られる。次に、係数行列の成分の保存に関して、以下に示す保存率 R_N を定義する。

$$R_N = \frac{N^{\mathcal{H}}}{N_0} \quad (26)$$

ここに、 $N^{\mathcal{H}}$ および N_0 は、 \mathcal{H} 行列と ACA を用いた場合と用いなかった場合に保存される係数行列の成分数を表す。最後に、計算における時間増加率 R_T を次式で定義する。

$$R_T = \frac{T^{\mathcal{H}}}{T_0} \quad (27)$$

ここに、 $T^{\mathcal{H}}$ および T_0 は、それぞれ \mathcal{H} 行列と ACA を用いた場合と用いなかった場合の計算時間を表す。

Table 1 に、パラメータ η および ϵ_{ACA} を変化させた場合の誤差 E 、保存率 R_N 、時間増加率 R_T 、GMRES 法における反復回数 N_{GMRES} 、その反復回数に対応する残差 r_{GMRES} を示す。ただし、最上段の値は、 \mathcal{H} 行列と ACA を用いない場合の結果を示している。この結果から、 \mathcal{H} 行列および ACA を用いることで、保存率 R_N 、時間増加率 R_T が減少し、効率的に計算が行われることが確認できる。一方で、 \mathcal{H} 行列および ACA を用いた一部の結果において、これらを用いない場合よりも誤差が小さくなっていることが確認できる。これは、GMRES 法における収束条件を満たした際に、 \mathcal{H} 行列および ACA を用いた場合の残差の値 r_{GMRES} が、用いなかった場合の値よりも小さかったことが原因であると考えられる。

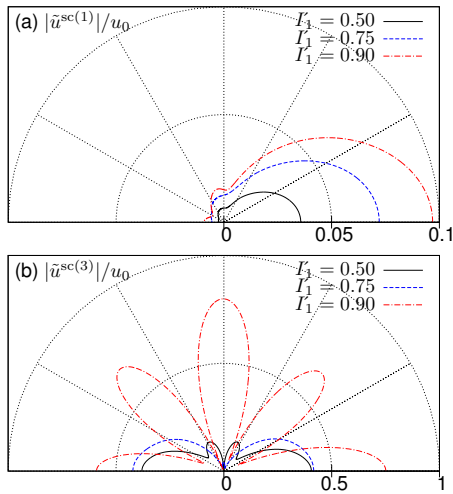


Fig. 8 The amplitude of the scattered wave (Incident wave: S1-wave).

また、 $\eta = 2, \epsilon_{ACA} = 10^{-8}$ の結果において、誤差 E が他の結果よりも大きな値となっていることが確認できる。この誤差は、GMRES 法の収束条件 ϵ_{GMRES} をさらに小さくした場合でもほとんど変化がみられなかったため、近似のパラメータ設定に起因する誤差であると考えられる。

4.3. 入射波の散乱解析

最後に、領域 V_1 と V_2 で氷飽和度 I' の値が異なる場合を考え、入射波の散乱解析を行う。解析モデルは、Fig.5 に示すモデルと同様のものとし、2つの領域を構成する材料は、前節までの解析と同様に砂岩とした。また、氷飽和度は、領域 V_1 では $I'_1 = 0.90, 0.75, 0.50$ と変化させ、領域 V_2 では $I'_2 = 0.2$ に固定した。周波数は $f = 100$ [Hz] とし、入射波はこれまでの解析と同様に、 x_1 軸の正方向に進行する平面波とした。ただし、本節では、入射波として S1 波および S2 波の両方の場合について解析を行った。なお、要素数は $N_e = 1000$ とし、 $\eta = 1$ および $\epsilon_{ACA} = 10^{-8}$ とした。

Fig.8 に、S1 波を入射させた場合の散乱波の変位の絶対値を示す。結果の表示方法は、Fig.6 と同様である。これらの値は、境界 S から $0.1a$ だけ離れた領域 V_2 内部の点、すなわち原点からの距離が $1.1a$ の点における値を示している。同図に示す結果から、氷飽和度の増加に伴い、散乱波の振幅が大きくなることが確認できる。また、固体骨格部の変位として生じる散乱波の振幅は非常に小さく、その一方で、氷骨格部の変位として生じる散乱波は、比較的大きな値を示すことが確認できる。

Fig.9 に、S2 波を入射させた場合における散乱波の変位の絶対値を示す。この結果においても、固体骨格部の変位と比較して氷骨格部の変位の値が大きく、散乱による影響が顕著に現れる結果となった。また、氷骨格部の変位の値そのものに関しては、氷飽和度の変化にあまり影響を受けないことが確認された。

5. おわりに

本論文では、凍結した多孔質体の面外波動解析のための境

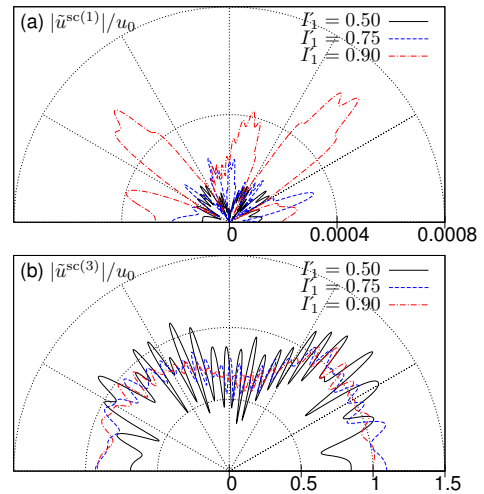


Fig. 9 The amplitude of the scattered wave (Incident wave: S2-wave).

界要素法を開発した。提案手法は、周波数領域の解法であり、計算効率の向上のため、 \mathcal{H} 行列と ACA を適用した。提案手法を用いた数値解析では、はじめに、仮想境界による入射波の散乱解析に基づく検証を行った。次に、 \mathcal{H} 行列と ACA による係数行列の圧縮効果に関する検証を行い、最後に散乱解析を行った。散乱解析の結果から、氷飽和度の変化に伴い、散乱特性が変化する様子を確認した。今後は、まず、 \mathcal{H} 行列に基づく LU 分解の適用とその効果の検証を行う。その後、提案手法を用いた逆解析手法の開発を行い、メタンハイドレート層の形状および氷飽和度の推定を行う予定である。

謝辞：本研究は JSPS 科研費 JP16K18137 の助成を受けたものです。

参考文献

- (1) Leclaire, Ph., Cohen-Ténoudji, F., and Aguirre-Puente, J.: Extension of Biot's theory of wave propagation to frozen porous media, *J. Acoust. Soc. Am.*, **96**(1994), pp. 3753-3768.
- (2) Biot, M. A.: Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**(1956), pp. 168-178.
- (3) Carcione, J. M. and Seriani, G.: Wave simulation in frozen porous media, *J. Comput. Phys.*, **170**(2001), pp. 676-695.
- (4) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000).
- (5) Börn, S., Grasedyck, L., and Hackbusch, W.: Introduction to hierarchical matrices with applications, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **27**(2003), pp. 405-422.
- (6) 伊海田明宏, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: ACA 境界要素法を用いた時間調和 SH 波の多重散乱解析, 計算数理工学論文集, **12**(2012), pp. 85-90.