

粘弾性介在物を用いた弾性波エネルギー吸収体のトポロジー最適化

A TOPOLOGY OPTIMISATION OF ELASTIC WAVE ABSORBER
WITH VISCOELASTIC INCLUSIONS松島 慶¹⁾, 飯盛 浩司²⁾, 高橋 徹³⁾, 松本 敏郎⁴⁾

Kei MATSUSHIMA, Hiroshi ISAKARI, Toru TAKAHASHI and Toshiro MATSUMOTO

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: k.matusima@nuem.nagoya-u.a.ac.jp)
 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.a.ac.jp)
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.a.ac.jp)
 4) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.a.ac.jp)

This paper presents a numerical method for topology optimisation to design elastic wave absorber by arranging viscoelastic inclusions in an unbounded elastic matrix. We derive the topological derivative for this problem and confirm its validity through a numerical example. The boundary element method coupled with the \mathcal{H} -matrix method is employed to compute the sensitivity, which enables us to solve the elastic wave propagation problem accurately with low computational cost. We also perform a numerical experiment of the topology optimisation and demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key Words: Topology Optimisation, Topological Derivative, Viscoelasticity, Elastic Wave, Boundary Element Method, \mathcal{H} -matrix Method

1. 緒言

制振・遮音は工学における重大な関心の1つであり, 振動による構造物の破壊を防止することは構造設計において非常に重要とされる.

このような設計上の要求を満足する構造を決定する手法の1つとしてトポロジー最適化が注目を集めており, 近年では初期から行われてきた静弾性場における平均コンプライアンス最小化のみならず, 動弾性場におけるトポロジー最適化に関する研究が盛んに行われている^(1, 2, 3). また最近では, 音響メタマテリアル, フォノンニック結晶等の音波あるいは弾性波に対して特異な性質を有する周期構造の存在が明らかになり, それらの周期構造をトポロジー最適化を用いて設計する試みが行われている^(4, 5).

しかし, これらの先行研究の多くは空洞あるいは完全弾性介在物の分布の最適化を対象としており, 粘弾性に関しては周期構造の巨視的な粘性特性に関するトポロジー最適化^(6, 7)が行われている一方で, 粘弾性材が吸収・散逸するエネルギー量を直接的に目的関数とするトポロジー最適化は行われていない. このような目的関数は非周期構造の設計にも容易に適用可能であり, 定められた観測点や観測領域における変位最小化⁽³⁾と比較して観測位置に依存しない効果的な制振構造を得ることが期待できる.

そのため, 本研究では無限領域中を伝播する弾性波のエネルギーの吸収量を最大にする粘弾性介在物の分布を求めるトポロジー最適化を考える. まず, このトポロジー最適化問題に対するトポロジー導関数を導出する必要がある. 従来のトポロジー導関数の導出と異なり, 目的関数が設計対象である領域上の積分として定義されるために, 新たに生成される領域上の積分に対応する項を考慮する必要がある点に注意を要する. そして, 導出されたトポロジー導関数を高速かつ高精度に計算するために, \mathcal{H} マトリクス法⁽⁸⁾を適用した境界要素法を用いる. 一般的に用いられる有限要素法と異なり, 境界要素法は開領域を厳密に扱うことが可能であり, またメッシュ生成のコストが小さく, 領域を境界要素メッシュで明確に区別するためにこのような目的関数を取り扱うことが容易であるという利点がある.

本論文の構成を以下に示す. 2節では本研究で用いる粘弾性材のモデル化手法について述べる. 3節ではトポロジー導関数の導出を行い, 4節で境界要素法の定式化および \mathcal{H} マトリクス法の概要について述べる. 5節では導出したトポロジー導関数の検証を行い, その後にトポロジー最適化の数値例を示す. 最後に6節で本論文の結論を述べる.

2. 粘弾性体のモデル化

本研究では, 平面ひずみ状態を仮定した線形な均質・等方

弾性体の2次元面内の定常振動を考える。また、この定常振動の角周波数を ω とするとき各物理量の時間依存を $e^{-i\omega t}$ とする。ここで、粘性を有しない完全弾性体内のひずみ ε と応力 σ は次の構成式で関係づけられる。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

ここに、 \mathbf{C} は弾性テンソルであり、Lamé 定数 λ , μ および Kronecker のデルタ δ_{ij} を用いて次式で与えられる。

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2)$$

本研究では、ひずみ ε が応力 σ に対して一定の位相遅れを伴う材料として粘弾性体をモデル化し、粘弾性体の構成式を次式で表す。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = e^{-i\delta} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

ここに、 $0 \leq \delta \leq \pi$ は位相遅れ角である。すなわち、各弾性率を $\lambda \rightarrow \lambda e^{-i\delta}$, $\mu \rightarrow \mu e^{-i\delta}$ のように複素数で置き換えることにより、粘弾性体は完全弾性体と同様に通常の構成式 (1) を用いることが可能となる⁽⁹⁾。この複素数で表された弾性率は動的弾性率と呼ばれ、またその実部、虚部はそれぞれ貯蔵弾性率、損失弾性率と呼ばれる。

3. エネルギー吸収最大化を目的とする粘弾性体のトポロジー最適化

3.1. 目的関数

密度を ρ^α , Lamé 定数を λ^α , $\mu^\alpha \in \mathbb{R}$ とする無限に広がる完全弾性体母材 Ω^α の内部に粘弾性体 $\Omega^\beta = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega^\alpha}$ (密度 ρ^β , Lamé 定数 λ^β , $\mu^\beta \in \mathbb{C}$) が分布する領域を考える。ここに、 $\overline{\Omega^\alpha}$ は Ω^α の閉包であり、以降は領域を表す記号に対して同様の記法を用いる。ここで、粘弾性材 Ω^β が単位面外厚さ・時間あたりに吸収するエネルギーの時間平均

$$J = \int_{\Omega^\beta} w(\sigma(\mathbf{x})) d\Omega \quad (4)$$

を最大にするような Ω^β の分布を求めるトポロジー最適化問題を考える。ここに、 w は単位面外厚さ・面積・時間あたりに吸収するエネルギーの時間平均であり、 Ω^ν ($\nu = \alpha, \beta$) におけるコンプライアンステンソル \mathbf{D}^ν を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} w(\sigma(\mathbf{x})) &= -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\text{Re} [\sigma_{ji} e^{-i\omega t}] \right) \frac{\partial}{\partial t} \text{Re} [u_i e^{-i\omega t}] dt \\ &= \frac{\omega}{2} \text{Im} [\bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) D_{ijkl}^\beta \sigma_{kl}(\mathbf{x})] \quad \mathbf{x} \in \Omega^\beta \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 \mathbf{u} は変位、 $T = 2\pi/\omega$ は定常振動の時間周期であり、複素変数に対する上線は複素共役を表す。

3.2. トポロジー導関数

本節では、式 (4) で定義される目的関数 J に対するトポロジー導関数を導出する。

遠方から弾性波 \mathbf{u}^{in} が入射するとき、母材 Ω^α および粘弾性材 Ω^β において変位 \mathbf{u} および応力 σ は次の2次元動弾性

トランスミッション問題 (順問題) に支配される。

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho^\alpha \omega^2 u_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega^\alpha \quad (6)$$

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho^\beta \omega^2 u_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega^\beta \quad (7)$$

$$u_i^\alpha(\mathbf{x}) = u_i^\beta(\mathbf{x}) (= u_i(\mathbf{x})) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (8)$$

$$\sigma_{ji}^\alpha(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) = \sigma_{ji}^\beta(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) (= t_i(\mathbf{x})) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (9)$$

$$\text{Radiation condition for } u_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}) \text{ as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (10)$$

ここに、 $\mathbf{u}^{\text{sc}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{in}}$ は散乱場、 $\Gamma = \partial\Omega^\alpha = \partial\Omega^\beta$ は境界、 \mathbf{u}^ν , σ^ν ($\nu = \alpha, \beta$) はそれぞれ Ω^ν から Γ への \mathbf{u} , σ の極限、 \mathbf{n} は Ω^α の外向き単位法線ベクトルである。

3.2.1. 母材 Ω^α に粘弾性材が生じる場合

今、各物性値を粘弾性材 Ω^β のそれと同じくする半径 ε の円筒形粘弾性材領域 Ω_ε が $\mathbf{x}^0 \in \Omega^\alpha$ に出現する場合を考える。この領域の変化に伴う目的関数 J の変化を $\delta J^{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{x}^0, \varepsilon)$ で表すとき、対応するトポロジー導関数 $\mathcal{T}^{\alpha \rightarrow \beta}$ は次式で定義される。

$$\delta J^{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{x}, \varepsilon) = v(\varepsilon) \mathcal{T}^{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{x}) + o(v(\varepsilon)) \quad (11)$$

ここに、 v は $\varepsilon \rightarrow 0$ で 0 に収束し、かつ $\varepsilon = 0$ の近傍で単調増加する適当な関数である。同様に、各領域における \mathbf{u} および σ の変化を次式のように表す。

$$u_i(\mathbf{x}) \rightarrow u_i(\mathbf{x}) + \delta u_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon \quad (12)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) \rightarrow \sigma_{ij}(\mathbf{x}) + \delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon \quad (13)$$

$$u_i(\mathbf{x}) \rightarrow \hat{u}_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega_\varepsilon} \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) \rightarrow \hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega_\varepsilon} \quad (15)$$

ここで、問題の線形性より次式が成り立つ。

$$\delta \sigma_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho^\alpha \omega^2 \delta u_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega^\alpha \setminus \overline{\Omega_\varepsilon} \quad (16)$$

$$\delta \sigma_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho^\beta \omega^2 \delta u_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega^\beta \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho^\beta \omega^2 \hat{u}_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \quad (18)$$

$$u_i(\mathbf{x}) + \delta u_i(\mathbf{x}) = \hat{u}_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon \quad (19)$$

$$(\sigma_{ji}(\mathbf{x}) + \delta \sigma_{ji}(\mathbf{x})) n_j(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}_{ji}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon \quad (20)$$

$$\text{Radiation condition for } \delta u_i(\mathbf{x}) \text{ as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (21)$$

ここに、 Γ_ε は Ω_ε と Ω^α の境界であり、 Γ_ε 上の単位法線ベクトル \mathbf{n} は Ω^α に対して外向き (Ω_ε に対して内向き) に定義した。さて、 $\delta J^{\alpha \rightarrow \beta}$ は式 (12)–(15) で定義した変数を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta J^{\alpha \rightarrow \beta} &= \text{Re} \left[\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial g}{\partial t_i} \delta t_i \right) d\Gamma \right] + \int_{\Omega_\varepsilon} w(\hat{\sigma}) d\Omega \end{aligned} \quad (22)$$

ここに、 g は次式で与えられる。

$$g(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{t}(\mathbf{x})) = \frac{\omega}{2} \text{Im} [\bar{u}_i(\mathbf{x}) t_i(\mathbf{x})] \quad (23)$$

ここで、次の随伴問題に支配される随伴変数 $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ を導入する。

$$\tilde{\sigma}_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho^\alpha \omega^2 \tilde{u}_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega^\alpha \quad (24)$$

$$\tilde{\sigma}_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho^\beta \omega^2 \tilde{u}_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega^\beta \quad (25)$$

$$\tilde{u}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \tilde{u}_i^\beta(\mathbf{x}) - \frac{\partial g}{\partial t_i}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (26)$$

$$\tilde{\sigma}_{ji}^\alpha(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) = \tilde{\sigma}_{ji}^\beta(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) + \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (27)$$

$$\text{Radiation condition for } \tilde{u}_i(\mathbf{x}) \text{ as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (28)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{u}}^\nu, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\nu$ ($\nu = \alpha, \beta$) はそれぞれ Ω^ν から Γ への $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ の極限である。さらに、 $\Omega^\alpha \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ において $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ と $(\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\sigma})$ の間に成り立つ Betti の相反定理

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} (\tilde{t}_i \delta u_i - \tilde{u}_i \delta t_i) d\Gamma + \int_{\Gamma} (\tilde{t}_i \delta u_i - \tilde{u}_i \delta t_i) d\Gamma = 0 \quad (29)$$

を用いると、式 (22) は次式となる。

$$\begin{aligned} & \delta J^{\alpha \rightarrow \beta} \\ &= \text{Re} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} (\tilde{u}_i \delta t_i - \tilde{t}_i \delta u_i) d\Gamma \right] + \int_{\Omega_\varepsilon} w(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \end{aligned} \quad (30)$$

今、 $\varepsilon \rightarrow 0$ における漸近挙動に興味があるため、 Ω_ε 上の $\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\sigma}$ を次の境界値問題の解で近似する。

$$\hat{\sigma}_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho^\alpha \omega^2 \hat{u}_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon} \quad (31)$$

$$\hat{\sigma}_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho^\beta \omega^2 \hat{u}_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon \quad (32)$$

$$u_i(\mathbf{x}) + \delta u_i(\mathbf{x}) = \hat{u}_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon \quad (33)$$

$$(\sigma_{ji}(\mathbf{x}) + \delta \sigma_{ji}(\mathbf{x})) n_j(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}_{ji}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon \quad (34)$$

$$\text{Radiation condition for } \delta u_i(\mathbf{x}) \text{ as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (35)$$

境界値問題 (31)–(35) の解を用いると、式 (30) の右辺第 1 項は次式で評価される。

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} (\tilde{u}_i \delta t_i - \tilde{t}_i \delta u_i) d\Gamma \right] \\ &= \pi \varepsilon^2 \text{Re} \left[\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}^0) (D_{ijkl}^\beta - D_{ijkl}^\alpha) A_{klmn}^{\alpha\beta} \sigma_{mn}(\mathbf{x}^0) \right. \\ & \quad \left. + (\rho^\beta - \rho^\alpha) \omega^2 \tilde{u}_i(\mathbf{x}^0) u_i(\mathbf{x}^0) \right] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (36)$$

ここに、 $\mathbf{A}^{\alpha\beta}$ は 4 階の恒等テンソル \mathbf{I} 、 Ω^ν における弾性テンソル \mathbf{C}^ν および 2 次元円筒形介在物に関する Eshelby テンソル

$$\begin{aligned} S_{ijkl}^\nu &= \frac{1}{4(\lambda^\nu + 2\mu^\nu)} \left\{ (\lambda^\nu - \mu^\nu) \delta_{ij} \delta_{kl} \right. \\ & \quad \left. + (\lambda^\nu + 3\mu^\nu) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

を用いて次式で定義される 4 階のテンソルである。

$$A_{ijkl}^{\alpha\beta} = C_{ijmn}^\beta X_{mnpq}^{-1} D_{pqkl}^\alpha \quad (38)$$

$$X_{ijkl} = I_{ijkl} + S_{ijmn}^\alpha (C_{mnpq}^\beta - C_{mnpq}^\alpha) D_{pqkl}^\alpha \quad (39)$$

同様に、式 (30) の右辺第 2 項は次式で評価される。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon} w(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \\ &= \frac{\omega}{2} \pi \varepsilon^2 \text{Im} \left[\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}^0) \overline{A_{ijkl}^{\alpha\beta}} D_{klmn}^\beta A_{mnpq}^{\alpha\beta} \sigma_{pq}(\mathbf{x}^0) \right] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (40)$$

v に $v(\varepsilon) = \pi \varepsilon^2$ を選ぶと、式 (30), (36), (40) よりトポロジー導関数 $\mathcal{T}^{\alpha \rightarrow \beta}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}^{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{x}) \\ &= \text{Re} \left[\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) (D_{ijkl}^\beta - D_{ijkl}^\alpha) A_{klmn}^{\alpha\beta} \sigma_{mn}(\mathbf{x}) \right. \\ & \quad \left. + (\rho^\beta - \rho^\alpha) \omega^2 \tilde{u}_i(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) \right] \\ & \quad + \frac{\omega}{2} \text{Im} \left[\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) \overline{A_{ijkl}^{\alpha\beta}} D_{klmn}^\beta A_{mnpq}^{\alpha\beta} \sigma_{pq}(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

3.2.2. 粘弾性材 Ω^β に母材と同じ物性値を持つ完全弾性体が生じる場合

粘弾性材 Ω^β 中に母材 Ω^α と同じ物性値を持つ微小な完全弾性体が生じる場合のトポロジー導関数 $\mathcal{T}^{\beta \rightarrow \alpha}$ は、前小節と同様の手順によって次式で与えられることが分かる。

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}^{\beta \rightarrow \alpha}(\mathbf{x}) \\ &= \text{Re} \left[\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) (D_{ijkl}^\alpha - D_{ijkl}^\beta) A_{klmn}^{\beta\alpha} \sigma_{mn}(\mathbf{x}) \right. \\ & \quad \left. + (\rho^\alpha - \rho^\beta) \omega^2 \tilde{u}_i(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (42)$$

ここで、新しく生成される微小な母材はエネルギーを吸収しないために、式 (41) 右辺第 2 項に対応する項が式 (42) に現れないことに注意する。

3.3. レベルセット法に基づくトポロジー最適化

本研究では、レベルセット法に基づく形状表現を用い、母材 Ω^α および粘弾性材 Ω^β をレベルセット関数 $\phi \in [-1, 1]$ を用いて次式のように表現する。

$$\Omega^\alpha = \{\mathbf{x} \mid 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1\} \quad (43)$$

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\} \quad (44)$$

$$\Omega^\beta = \{\mathbf{x} \mid -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0\} \quad (45)$$

ここで、 ϕ を次の時間発展方程式に従って更新することにより、最適形状を探索する^(10, 11)。

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = K \mathcal{T}(\mathbf{x}, t) + \tau \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in D \quad (46)$$

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0 \quad \mathbf{x} \in D \quad (47)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = c \quad \mathbf{x} \in \partial D \quad (48)$$

ここに、 D は固定設計領域、 $K > 0$ は定数、 $\tau > 0$ は形状の複雑度を規定する定数、 ϕ_0 は初期形状に対応する初期の ϕ の分布、 \mathcal{T} は次式で定義される関数である。

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathcal{T}^{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega^\alpha \\ -\mathcal{T}^{\beta \rightarrow \alpha}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega^\beta \end{cases} \quad (49)$$

また、Dirichlet 境界条件 (48) は適当な定数 $c \in (0, 1]$ を与えることにより Ω^β を D の内部に制限する。

4. 境界要素法と \mathcal{H} マトリクス法に基づく感度解析

前節で導出した式 (41) と (42) を用いてトポロジー導関数を評価する場合、順問題 (6)–(10) と随伴問題 (24)–(28) を解く必要がある。本研究では、 \mathcal{H} マトリクス法で高速化された境界要素法を用いて、この 2 つの境界値問題を数値的に解く。

見かけの固有値問題⁽⁹⁾を回避するために Burton-Miller 法⁽¹²⁾を用いると、順問題(6)–(10)と等価な次の境界積分方程式を得る。

$$\frac{1}{2}u_i + \frac{a}{2}t_i + (D_{ij}^\alpha + aN_{ij}^\alpha)u_j - (S_{ij}^\alpha + aD_{ij}^{*\alpha})t_j = u_i^{\text{in}} + aC_{ijkl}^\alpha u_{k,l}^{\text{in}} n_j \quad (50)$$

$$\frac{1}{2}u_i - D_{ij}^\beta u_j + S_{ij}^\beta t_j = 0 \quad (51)$$

ここに、 S^ν , D^ν , $D^{*\nu}$ および N^ν は、第1種 n 次の Hankel 関数 $H_n^{(1)}$ および縦波の波数

$$k_L^\nu = \omega \sqrt{\frac{\rho^\nu}{\lambda^\nu + 2\mu^\nu}} \quad (52)$$

と横波の波数

$$k_T^\nu = \omega \sqrt{\frac{\rho^\nu}{\mu^\nu}} \quad (53)$$

によって与えられる2次元動弾性問題の基本解

$$G_{ij}^\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4\mu^\nu} \left\{ H_0^{(1)}(k_T^\nu |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \delta_{ij} + \left(\frac{1}{k_T^\nu} \right)^2 \frac{\partial}{\partial y_i \partial y_j} \left(H_0^{(1)}(k_T^\nu |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - H_0^{(1)}(k_L^\nu |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right) \right\} \quad (54)$$

を用いて次式で定義される積分作用素である。

$$(S_{ij}^\nu \phi)(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G_{ij}^\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad (55)$$

$$(D_{ij}^\nu \phi)(\mathbf{x}) = -\text{v.p.} \int_\Gamma C_{kljm}^\nu G_{ki,l}^\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_m(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad (56)$$

$$(D_{ij}^{*\nu} \phi)(\mathbf{x}) = \text{v.p.} \int_\Gamma C_{klim}^\nu G_{kj,l}^\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_m(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad (57)$$

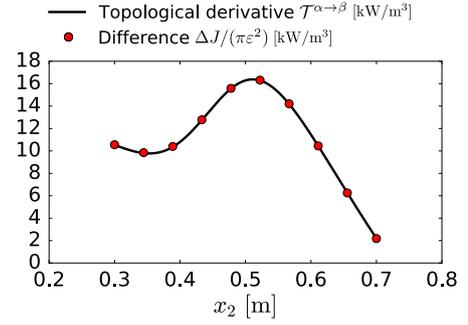
$$(N_{ij}^\nu \phi)(\mathbf{x}) = -\text{p.f.} \int_\Gamma C_{impq}^\nu C_{kljn}^\nu G_{kp,lq}^\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_m(\mathbf{x}) n_n(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad (58)$$

ここに、‘v.p.’, ‘p.f.’はそれぞれ Cauchy の主値積分、発散積分の有限部分を表す。また、 $a \in \mathbb{C}$ は結合定数であり、本研究では $a = -i/(\mu^\alpha k_T^\alpha)$ を用いる。ここで、極限吸収原理⁽⁹⁾より式(52), (53)で与えられる波数 k_L^ν , k_T^ν は虚部が非負となるように選ぶのが正しいことに注意する。

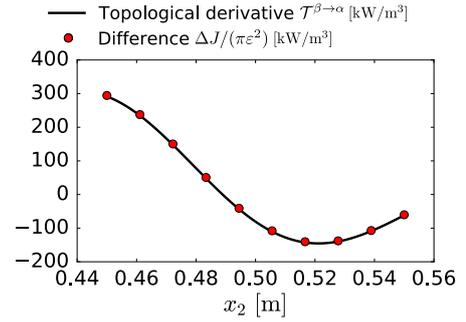
積分方程式(50), (51)を選点法および区分一定要素により離散化し、係数行列の階層的分割とACAによる行列の低ランク近似に基づく \mathcal{H} マトリクス法を用いて線形連立方程式の求解を高速化する。しかし、基本解 G_{ij} の計算に際して Hankel 関数 $H_n^{(1)}$ の計算量が大きいために、2次元動弾性問題における境界要素法は線形連立方程式の求解のみならず係数行列の構成に要する計算量も問題となる。そこで、本研究では \mathcal{H} マトリクス法における係数行列の構成において成分計算を効率的に行う手法⁽¹³⁾を用いて計算時間を短縮する。

5. 数値例

本節では、導出したトポロジー導関数の数値的検証および提案手法を用いたトポロジー最適化の数値例を示す。本節における数値例では、母材 Ω^α は鉄 (質量密度 $\rho = 7.80 \times 10^3$ [kg],



(a) on Γ_1



(b) on Γ_2

Fig.1 Comparison between the topological derivatives and the difference $\Delta J/(\pi\varepsilon^2)$.

ヤング率 $E = 205$ [GPa], Poisson 比 $\nu = 0.30$), 粘弾性材はエポキシ樹脂 ($\rho = 1.85 \times 10^3$ [kg], $E = 3.0$ [GPa], $\nu = 0.34$, 損失正接 $\tan \delta = \tan(10\pi/180)$) とした。

5.1. トポロジー導関数の数値的検証

導出したトポロジー導関数(41), (42)の正当性を検証するために、中心(0.5 [m], 0.5 [m]), 半径0.105 [m]の円筒形粘弾性材が配置された領域に対して、線分 $\Gamma_1 = \{\mathbf{x} \mid x_1 = 0.3$ [m], 0.3 [m] $\leq x_2 \leq 0.7$ [m] $\} \subset \Omega^\alpha$ および線分 $\Gamma_2 = \{\mathbf{x} \mid x_1 = 0.45$ [m], 0.45 [m] $\leq x_2 \leq 0.55$ [m] $\} \subset \Omega^\beta$ 上で新たに微小な半径 ε の円筒形粘弾性材あるいは母材を生成し、その前後における目的関数の差 ΔJ を $v(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$ で除した値と比較する。入射波を x_2 軸正方向に進む周波数5 [kHz], 振幅1 [μm]の平面P波としたときの計算結果をFig.1に示す。トポロジー導関数(41), (42)は差分とほぼ一致しており、導出した結果が妥当であることが確認された。

5.2. トポロジー最適化

次に、トポロジー最適化の数値実験を行う。Fig.2のように初期形状を設定し、固定設計領域 D を一辺の長さが1 [m]の正方形領域、入射波を x_1 軸正方向に進む周波数5 [kHz], 振幅1 [μm]の平面P波とした。

Fig.3に最適化ステップに対する目的関数値の履歴、Fig.4に初期形状および得られた最適形状を示す。最適形状における目的関数値は初期形状のそれに対して約100倍であり、トポロジー最適化によりエネルギー吸収量の大幅な増大に成功

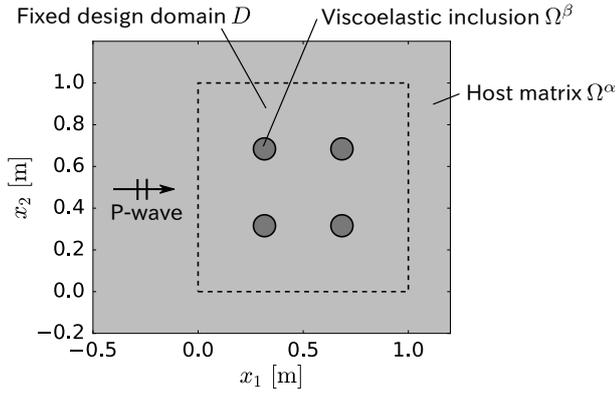


Fig. 2 Initial configuration of the topology optimisation.

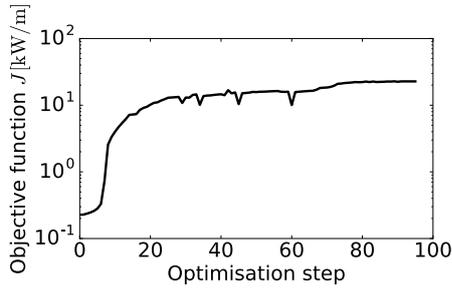


Fig. 3 History of the objective function J .

している。また、Fig.5は初期形状および最適形状においてエネルギー流束密度の時間平均

$$q_i(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2} \text{Im} [\sigma_{ji}(\mathbf{x}) \bar{u}_j(\mathbf{x})] \quad (59)$$

をプロットした図である。初期形状においては粘弾性材がエネルギー流れに与える影響が小さいのに対し、最適形状は特に Fig.4(b) で示した4つの介在物 Ω_2^β および Ω_4^β にエネルギーが集中する構造となっていることが分かる。実際、各介在物 Ω_i^β ($i = 1, 2, 3, 4$) が吸収する単位面外厚さ・時間当たりのエネルギーを計算したところ、 $\Omega_1^\beta : 0.524$ [kW/m], $\Omega_2^\beta : 6.24$ [kW/m], $\Omega_3^\beta : 0.262$ [kW/m], $\Omega_4^\beta : 15.8$ [kW/m] となり、この考察を裏付ける結果が得られた。また、 Ω_4^β の周辺において1周期間における変位の分布を調べたところ、Fig.6のように粘弾性材内部で反射・干渉によって変位が増大していることが確認された。従って、最適形状は Ω_2^β , Ω_4^β がエネルギーを主に吸収し、さらに Ω_1^β , Ω_3^β が回折により導波することによって高効率なエネルギー吸収を達成していることが推測される。

Fig.4(b) が最適形状であることを確かめるために、Fig.7のように Fig.4(b) と粘弾性材の面積がほぼ等しくなるように円形の粘弾性材を配置し目的関数値を計算した結果、トポロジー最適化によって得られた形状が最も目的関数値が大きいたことが確かめられた。

6. 結言

本研究では、弾性波エネルギーの吸収量最大化を目的と

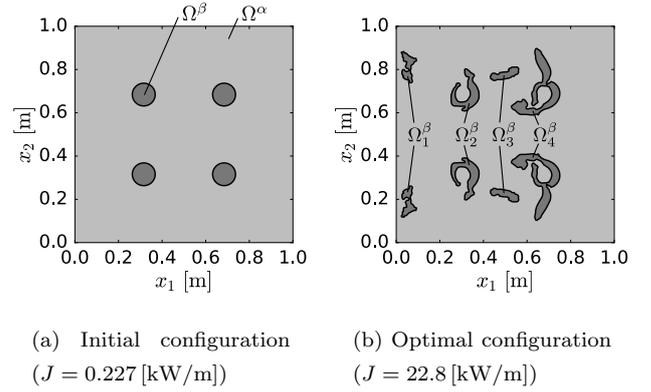


Fig. 4 Optimisation result.

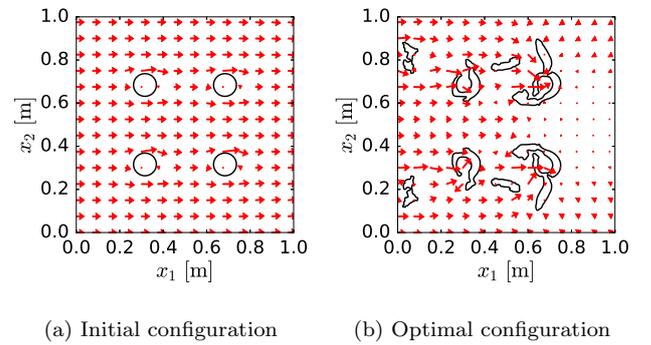


Fig. 5 Distribution of the time-averaged energy flux density \mathbf{q} .

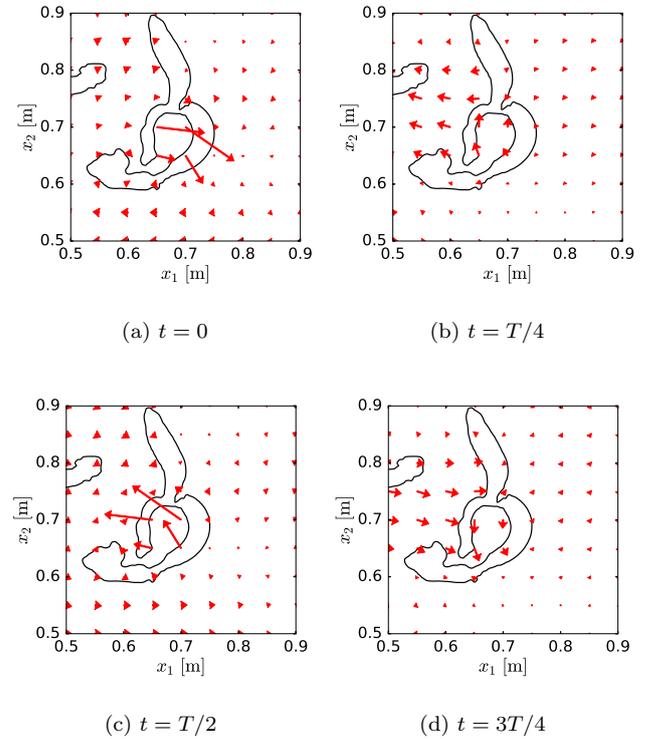


Fig. 6 Distribution of the displacements for a time period T .

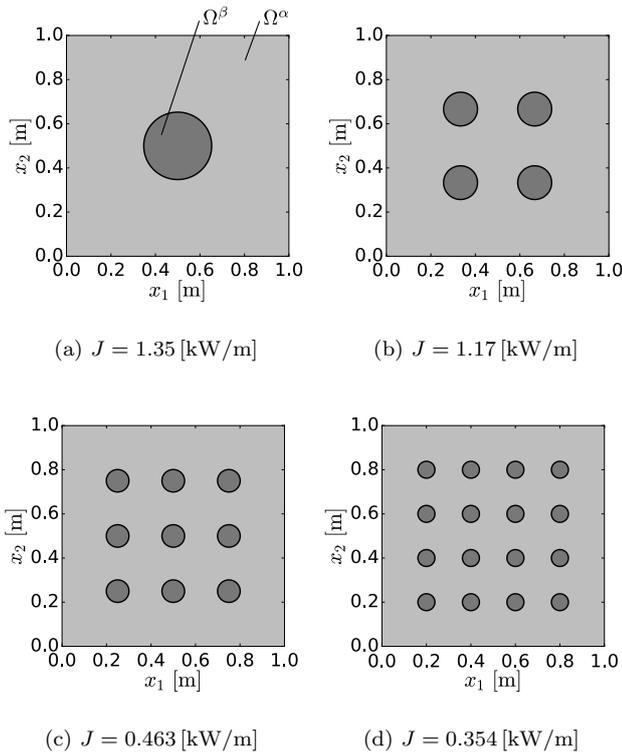


Fig. 7 Values of the objective function J for various configurations.

したトポロジー最適化問題に対するトポロジー導関数を導出し、得られたトポロジー導関数を用いてトポロジー最適化を行った。その結果、弾性波の反射・干渉を利用してエネルギーを集中させることによりエネルギー吸収率を高める機構を有する、試行錯誤による設計が困難な形状を得ることができた。今後の課題としては、最適形状の形状変動に対するロバスト性と、初期形状や介在物の粘性の大きさが最適形状に及ぼす影響についての検討が挙げられる。

謝辞

本研究の一部は、JSPS 科研費 (16H04255, 17K14146) の助成を受けて行ったものです。

参考文献

- (1) Díaz, A.R. and Kikuchi, N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, No. 7, pp. 1487–1502, 1992.
- (2) Jensen, J.S. Topology optimization problems for reflection and dissipation of elastic waves. *Journal of sound and vibration*, Vol. 301, No. 1, pp. 319–340, 2007.
- (3) 志知晋一郎, 山田崇恭, 松本敏郎. レベルセット法に基づく境界要素法を用いた定常動弾性問題のトポロジー最適化. 計算数理工学論文集, Vol. 12, pp. 1–6, 2012.

- (4) Sigmund, O. and Jensen, J.S. Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 361, No. 1806, pp. 1001–1019, 2003.
- (5) Noguchi, Y., Yamada, T., Otomori, M., Izui, K., and Nishiwaki, S. An acoustic metasurface design for wave motion conversion of longitudinal waves to transverse waves using topology optimization. *Applied Physics Letters*, Vol. 107, No. 22, p. 221909, 2015.
- (6) Andreassen, E. and Jensen, J.S. Topology optimization of periodic microstructures for enhanced dynamic properties of viscoelastic composite materials. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 49, No. 5, pp. 695–705, 2014.
- (7) Huang, X., Zhou, S., Sun, G., Li, G., and Xie, Y.M. Topology optimization for microstructures of viscoelastic composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 283, No. Supplement C, pp. 503–516, 2015.
- (8) Bebendorf, M. *Hierarchical matrices*. Springer Berlin: Heidelberg, 2008.
- (9) 小林昭一, 福井卓雄, 北原道弘, 西村直志, 廣瀬壮一. 波動解析と境界要素法. 京都大学学術出版会, 2000.
- (10) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., and Takezawa, A. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45, pp. 2876–2891, 2010.
- (11) Isakari, H., Kuriyama, K., Harada, S., Yamada, T., Takahashi, T., and Matsumoto, T. A topology optimisation for three-dimensional acoustics with the level set method and the fast multipole boundary element method. *Mechanical Engineering Journal*, Vol. 1, No. 4, pp. CM0039–CM0039, 2014.
- (12) Burton, A.J. and Miller, G.F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 323, pp. 201–210. The Royal Society, 1971.
- (13) Matsushima, K., Isakari, H., Takahashi, T., and Matsumoto, T. An application of topology optimisation to defect identification in two-dimensional elastodynamics with the BEM and \mathcal{H} -matrix method. (to appear in) *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*.