

き裂面の接触音響非線形性を伴う散乱問題に対する 調和バランス-境界要素法

HARMONIC BALANCE-BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR SCATTERING PROBLEM WITH CONTACT ACOUSTIC NONLINEARITY ON CRACK FACE

丸山 泰蔵¹⁾, 東平 光生²⁾

Taizo MARUYAMA and Terumi TOUHEI

1) 東京理科大学理工学部土木工学科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, E-mail: taizo_maruyama@rs.tus.ac.jp)

2) 東京理科大学理工学部土木工学科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, E-mail: touhei@rs.noda.tus.ac.jp)

This paper deals with steady-state analysis of elastic wave scattering by a crack with contact acoustic nonlinearity (CAN). The system is composed of a two-dimensional unbounded elastic solid which includes a crack with contact boundary conditions. A time-harmonic incident plane wave is irradiated onto the crack face, and then clapping motion and dynamic friction are induced on the crack face as nonlinear phenomena. The nonlinear wave scattering is described in a retarded potential integral equation by considering the CAN. Steady-state form of the integral equation is introduced as an asymptotic expression for the vibration of crack faces after sufficiently elapsed time. Harmonic balance method and boundary element method are coupled in order to solve the steady-state integral equation. The present numerical results are in good agreement with the conventional time-domain ones after sufficiently elapsed time.

Key Words: Boundary Element Method, Harmonic Balance Method, Contact Acoustic Nonlinearity, Elastic Wave

1. はじめに

発電プラント等の構造物の安全な運用, 適切な補修時期の選定のためには, 疲労き裂や応力腐食割れといった不連続界面を検出, 計測することが重要である. しかしながら, これらの不連続界面は残留応力の影響によって閉口状態となっている場合がある. その場合, 母材ときずの音響インピーダンス差による散乱現象に基づいた従来の線形超音波法では, 入射波が透過し十分な散乱波が取得できないため, 不連続界面の検出が困難である. この問題の解決策の一つとして, 接触音響非線形性に基づいた非線形超音波法が提案されている⁽¹⁾. 非線形超音波法は, 大振幅の入射波によって不連続界面の接触を伴う振動を誘発し, その結果により発生する非線形超音波を解析してき裂の位置やサイズを推定する手法である. 非線形超音波は高調波, 分調波から成るため, 入射波との周波数成分の相違によって欠陥からの散乱波の識別が期待できる.

接触音響非線形性による高調波発生現象に関する実験, 理論の研究は数多く行われ, その発生メカニズムは概ね解明さ

れてきた. また, アレイ探触子を用いた検査手法の開発も進められている^(2,3). しかしながら, 入射波の波長とき裂のサイズとの関係に起因する共振現象と接触音響非線形性の相互作用は十分に調べられていないのが現状である. 入射波として連続波を用いることを想定すれば, この相互作用が高調波の発生挙動に与える影響は大きいと考えられる. また, 非線形ダイナミクスの分野において分調波の発生は非線形共振現象と深く関わっているとの知見がある⁽⁴⁾. しかしながら, 放射条件下の波動散乱問題における分調波発生現象のメカニズムは未だ明らかにされていない. そのため, 接触音響非線形性を考慮した有限な大きさのき裂による散乱問題のさらなる理論的な研究が必要であると考えられる.

これまでに数値解析を用いた理論的な研究は, 不連続界面による反射透過問題に対しては 1 次元解析⁽⁵⁾, 2 次元解析^(6,7) 等が報告されている. また, 有限長のき裂に対しては, 境界要素法による 2 次元解析^(8,9), 3 次元解析⁽¹⁰⁾, 差分法による 2 次元解析⁽¹¹⁾ 等が報告されている. しかしながら, 上記の数値解析は全て時間領域で行われており, 周波数領域解析は著者らが提案した摩擦を考慮したき裂による面外波動散乱問題に対する解析手法⁽¹²⁾ のみであると思われる.

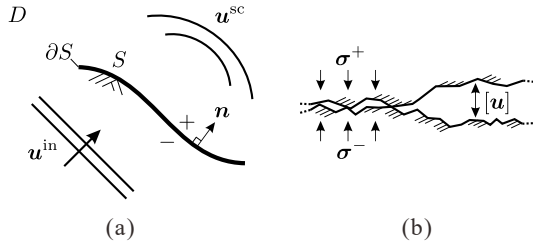


Fig.1 (a) Wave scattering by a crack in an unbounded elastic solid and (b) microscopic view of crack faces.

一般に、定常振動問題を記述する非線形方程式の解空間は分岐を有する場合があります、その分岐構造と非線形共振は大きく関わっている⁽⁴⁾。そのため、定常散乱問題を記述する非線形方程式を定式化し、分岐解析を行う必要がある。

本論文では分岐解析を見据え、界面の繰り返し打撃、動摩擦を考慮したき裂をモデル化し、面内波動散乱問題の定常状態を記述する非線形方程式の定式化を行う。一般に、非線形散乱問題において定常解の存在性や安定性は保証されない。しかしながら、周期的な加振を与える強制振動系において発散やカオス振動が発生する場合はあるものの、多くの場合は周期解が得られると考えられる。そのため、散乱問題に対する境界積分方程式に対して調和バランス法^(4,13)を適用し、入射波の到達から十分な時間経過後の意味で定常状態に対する境界積分方程式を誘導する。その後、空間離散化によって得られる連立非線形方程式を Homotopy 法⁽¹⁴⁾を用いて解くことによって、解析を実行する。同手法の報告は講演論文⁽¹⁵⁾で行っているが、本論文では定式化の詳細を示すと共に、異なる計算パラメータに対する数値解析を実行し、定式化、及び計算手法の妥当性を示す。

2. 解くべき問題

以下では特に断らない限り、直交座標系を用い、総和規約に従うものとする。

Fig. 1 (a) に示すように、き裂 $S \subset \mathbb{R}^2$ によって入射波 \mathbf{u}^{in} が散乱する問題を考える。 S は縁 ∂S を有する自己交差しない滑らかな開曲線である。領域 $D := \mathbb{R}^2 \setminus \bar{S}$ は等方、均質な線形弾性体であると仮定する。ここで、 \bar{S} は S の閉包である。法線方向ベクトル \mathbf{n} は S の $+$ 方向を向いているものとする。また、本論文では上付き添字 \pm によって、 D 中の場の変数をどちらの方向から S に極限移行したのかを表す。

き裂面は微視的構造として Fig. 1 (b) に示すような凹凸を有する。しかしながら、入射波の波長がき裂面の凹凸の高さや幅と比較して十分大きいと仮定し、き裂面は滑らかなものであると考える。また、き裂面における単位面積あたりの平均変位 \mathbf{u}^\pm 、平均応力 $\boldsymbol{\sigma}^\pm$ を扱う。き裂面において表面力 $\mathbf{t}^\pm := \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\pm$ は次の連続性を満足する。

$$\mathbf{t}^+ = \mathbf{t}^- \quad \text{on } S \quad (1)$$

そのため、以下では上付き添え字 \pm を省略し、単に \mathbf{t} と記述する。また、き裂開口変位 $[\mathbf{u}] := \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ に対して次のき

裂縁 ∂S における正則条件を仮定する。

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial S$$

本研究では、き裂面の開閉、及び動摩擦をモデル化した $[\mathbf{u}]$, \mathbf{t} に対する境界条件を用いる。そのため、き裂面が開口している場合、境界条件は次の表面力フリーとなる。

$$\mathbf{t} = \mathbf{0} \quad \text{on } S \quad (2)$$

一方、き裂面が閉口している場合は、法線方向に変位の連続性、接線方向に動摩擦を考慮し、次式で境界条件を与える。

$$[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3a)$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{s} = -\mu_d (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{sgn}([\dot{\mathbf{u}}] \cdot \mathbf{s}) \quad \text{on } S \quad (3b)$$

ここで、 \mathbf{s} は接線方向ベクトル、 $(\dot{})$ は時間微分、 μ_d は動摩擦係数である。

本解析では、き裂に対する入射波の照射時に静的な変位場、応力場が存在している状況を考える。そのため、 D における重ね合わせの原理を考慮すると、全変位場 \mathbf{u} 、全応力場 $\boldsymbol{\sigma}$ は次のように表される。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{st}} + \mathbf{u}^{\text{in}} + \mathbf{u}^{\text{sc}}, \quad (4a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{st}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{in}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{sc}} \quad \text{in } D \quad (4b)$$

ここで、上付き添字の st, in, sc はそれぞれ静的変形、入射波、散乱波に対する場の変数であることを示している。 D は等方性弾性体であるため、応力は次のように表される。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_l} u_k,$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad \text{in } D$$

ここで、 \mathbf{C} は弾性定数テンソル、 λ , μ は Lamé 定数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。本論文では表面力作用素を次のように定義する。

$$\mathcal{T}_{ik}^x := n_j C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

ここで、上付き添字の x は対応する点を表している。

散乱波は入射波がき裂に到達すると発生し、その後、無限遠に伝搬していく。そのため、時刻 $t \leq 0$ において $\mathbf{u}^{\text{in}} = \mathbf{0}$ on S を仮定すると、 \mathbf{u}^{sc} は次の支配方程式、初期条件を満足する。

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in D \times [0, \infty) \quad (5)$$

$$\mathbf{u}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{x}, t) \in D \times (-\infty, 0] \quad (6)$$

ここで、 ρ は密度である。また、 \mathbf{u}^{sc} は以下の放射条件を満足する。

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sqrt{|\mathbf{x}|} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{\text{sc};\varphi}}{\partial |\mathbf{x}|}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c_\varphi} \dot{\mathbf{u}}^{\text{sc};\varphi}(\mathbf{x}, t) \right) = \mathbf{0}, \quad (7a)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|}} \mathbf{u}^{\text{sc};\varphi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad t \in [0, \infty) \quad (7b)$$

ここで、 $\varphi = L$ or T であり、 $\mathbf{u}^{\text{sc};L}$ 、 $\mathbf{u}^{\text{sc};T}$ はそれぞれ散乱波の P 波成分、S 波成分を表している。また、 c_L 、 c_T はそれぞれ P 波、S 波の速度である。入射波は正弦波形の連続波を想定し、次式で表される平面波とした。

$$\mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0 \mathbf{d}_\varphi \sin \left[\omega^{\text{in}} \left(t - \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi})}{c_\varphi} \right) \right] \times H \left(t - \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi})}{c_\varphi} \right) \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty, \infty) \quad (8)$$

ここで、 u_0 、 ω^{in} 、 \mathbf{p} 、 \mathbf{d}_φ はそれぞれ入射波の振幅、中心角周波数、伝搬方向ベクトル、振動方向ベクトルである。また、 $H(\cdot)$ は Heaviside 関数であり、 $\boldsymbol{\chi}$ は $t = 0$ における入射波面の位置を表している。

3. 非線形定常振動のための境界積分方程式

3.1. 従来の時間領域境界積分方程式

境界条件 (1)、初期条件 (6)、放射条件 (7) を考慮すると、支配方程式 (5) から D における \mathbf{u}^{sc} の積分表現が得られる。その後、重ね合わせの原理 (4a) を用いると次の全波動場に対する積分表現が導出できる⁽¹⁶⁾。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^{\text{st}}(\mathbf{x}) + \int_0^t \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \cdot \{ [\mathbf{u}](\mathbf{y}, \tau) - [\mathbf{u}^{\text{st}}](\mathbf{y}) \} dS_y d\tau \quad (\mathbf{x}, t) \in D \times [0, \infty) \quad (9)$$

ここで、 \mathbf{T} は二重層核であり、変位の基本解 \mathbf{U} を用いて

$$T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathcal{T}_{jk}^y U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

と表される⁽¹⁷⁾。式 (9) の両辺に \mathbf{x} に関する表面力作用素を作用させる。その後、重み関数 $\psi(\mathbf{x})$ を乗じ、補助境界 \tilde{S} で積分する。ここで、 \tilde{S} は S と交わらない近傍の開曲線であり、 \tilde{S} 上の法線方向ベクトルは S 上と同じ方向に定義している。 $\tilde{S} \rightarrow S$ なる極限を考えると、次の境界積分方程式が得られる。

$$\int_S \psi(\mathbf{x}) \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dS_x = \int_S \psi(\mathbf{x}) \{ \mathbf{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{t}^{\text{st}}(\mathbf{x}) \} dS_x + \int_0^t \int_S \psi(\mathbf{x}) \text{p.f.} \int_S \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \cdot \{ [\mathbf{u}](\mathbf{y}, \tau) - [\mathbf{u}^{\text{st}}](\mathbf{y}) \} dS_y dS_x d\tau \quad (10)$$

ここで、p.f. は発散積分の有限部分を表している。また、 \mathbf{W} は超特異積分核であり、次のように表される⁽¹⁷⁾。

$$W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = T_{ik}^x T_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

3.2. 調和バランス法の適用

$\mathbf{x} \in S$ に対して $t > \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}) / c_\varphi$ を仮定すると、式 (10) 中の入射波の項は次のように変形できる。

$$\int_S \psi(\mathbf{x}) \mathbf{t}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) dS_x = \mathbf{t}^{\text{in}} \cos(\omega^{\text{in}} t) + \mathbf{s}^{\text{in}} \sin(\omega^{\text{in}} t) \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (\mathbf{t}^{\text{in}})_j \\ (\mathbf{s}^{\text{in}})_j \end{array} \right\} = -u_0 k_\varphi^{\text{in}} C_{j k p q}(\mathbf{d}_\varphi)_p p_q \int_S \psi(\mathbf{x}) n_k(\mathbf{x}) \times \left\{ \begin{array}{c} \cos[k_\varphi^{\text{in}} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi})] \\ \sin[k_\varphi^{\text{in}} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi})] \end{array} \right\} dS_x \quad (12)$$

ここで、 $k_\varphi^{\text{in}} = \omega^{\text{in}} / c_\varphi$ である。式 (11) は加振周波数 ω^{in} を陽に含んでいるため、本解析対象は非自励系である。非自励系に対する調和バランス法の定式化に従い、 S 上の $[\mathbf{u}]$ 、 \mathbf{t} を次のように ω^{in} に関する Fourier 級数で近似する。

$$[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) \simeq \frac{\mathbf{a}^{(0)}(\mathbf{x})}{2} + \sum_{n=1}^{N_h} \left[\mathbf{a}^{(n)}(\mathbf{x}) \cos(n\omega^{\text{in}} t) + \mathbf{b}^{(n)}(\mathbf{x}) \sin(n\omega^{\text{in}} t) \right] \quad (13a)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{\mathbf{c}^{(0)}(\mathbf{x})}{2} + \sum_{n=1}^{N_h} \left[\mathbf{c}^{(n)}(\mathbf{x}) \cos(n\omega^{\text{in}} t) + \mathbf{d}^{(n)}(\mathbf{x}) \sin(n\omega^{\text{in}} t) \right] \quad (13b)$$

ここで、 $[\mathbf{u}]$ 、 \mathbf{t} 両方の Fourier 級数は N_h で打ち切っている。 S 上の境界条件式 (2)、(3) を考慮すれば $\mathbf{c}^{(n)}$ 、 $\mathbf{d}^{(n)}$ は $\mathbf{a}^{(n)}$ 、 $\mathbf{b}^{(n)}$ の非線形関数であり、次のように表される。

$$\mathbf{c}^{(n)} = \tilde{\mathbf{c}}^{(n)}(\mathbf{a}^{(0)}, \dots, \mathbf{a}^{(N_h)}, \mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}^{(N_h)}), \quad (14a)$$

$$\mathbf{d}^{(n)} = \tilde{\mathbf{d}}^{(n)}(\mathbf{a}^{(0)}, \dots, \mathbf{a}^{(N_h)}, \mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}^{(N_h)}) \quad \text{on } S \quad (14b)$$

式 (11)、(13) を式 (10) に代入し、次の漸近表現を用いて畳み込み積分を評価する。

$$\int_0^t \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\tau \sim \mathbf{W}^{\text{st}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (t \gg r/c_T) \quad (15a)$$

$$\int_0^t \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \sim \tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (\omega t \gg k_T r) \quad (15b)$$

ここで、 i 、 ω はそれぞれ虚数単位、角周波数であり、 $k_T = \omega / c_T$ である。また、 \mathbf{W}^{st} 、 $\tilde{\mathbf{W}}$ はそれぞれ静弾性問題、周波数領域動弾性問題における超特異積分核である⁽¹⁷⁾。詳細は省略するが、式 (15a) は直接計算、式 (15b) は積分を $\int_0^t = \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^0 - \int_t^{\infty}$ とし、超特異積分核に含まれる Heaviside 関数の性質、Fourier 変換を考慮することによって導出できる。畳み込み積分の近似後、式 (10) 中の全ての項は Fourier 級数の形式で表現される。三角関数を乗じて時間積分すれば、三角関数の直交性から以下の連立非線形方程式が得られる。

$$\int_S \psi(\mathbf{x}) \text{p.f.} \int_S \mathbf{W}^{\text{st}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \left\{ \frac{\mathbf{a}^{(0)}(\mathbf{y})}{2} - [\mathbf{u}^{\text{st}}](\mathbf{y}) \right\} dS_y dS_x - \int_S \psi(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\mathbf{c}^{(0)}(\mathbf{x})}{2} - \mathbf{t}^{\text{st}}(\mathbf{x}) \right\} dS_x = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$\int_S \psi(\mathbf{x}) \text{p.f.} \int_S \left\{ \Re \left[\tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, n\omega^{\text{in}}) \right] \cdot \mathbf{a}^{(n)}(\mathbf{y}) - \Im \left[\tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, n\omega^{\text{in}}) \right] \cdot \mathbf{b}^{(n)}(\mathbf{y}) \right\} dS_y dS_x - \int_S \psi(\mathbf{x}) \mathbf{c}^{(n)}(\mathbf{x}) dS_x + \delta_{1n} \mathbf{t}^{\text{in}} = \mathbf{0} \quad (17)$$

$$\int_S \psi(\mathbf{x}) \text{p.f.} \int_S \left\{ \Im \left[\tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, n\omega^{\text{in}}) \right] \cdot \mathbf{a}^{(n)}(\mathbf{y}) + \Re \left[\tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, n\omega^{\text{in}}) \right] \cdot \mathbf{b}^{(n)}(\mathbf{y}) \right\} dS_y dS_x - \int_S \psi(\mathbf{x}) \mathbf{d}^{(n)}(\mathbf{x}) dS_x + \delta_{1n} \mathbf{s}^{\text{in}} = \mathbf{0} \quad (18)$$

($n = 1, 2, \dots, N_h$)

ここで、 $\Re[\cdot]$ 、 $\Im[\cdot]$ はそれぞれ複素数の実部、虚部を示している。式 (14) に示すように $\mathbf{c}^{(n)}$ 、 $\mathbf{d}^{(n)}$ は $\mathbf{a}^{(n)}$ 、 $\mathbf{b}^{(n)}$ の非線形関数である。そのため、次節で示すように反復解法を用いて式 (16)–(18) を数値的に解く場合、未知変数は $\mathbf{a}^{(n)}$ 、 $\mathbf{b}^{(n)}$ となる。また、境界条件式 (2)、(3) が線形関数で与えられた場合、式 (17)、(18) は従来の周波数領域境界積分方程式となる。

4. 連立非線形方程式の求解方法

き裂 S を直線要素で分割し、式 (16)–(18) に対して文献⁽¹⁸⁾と同様の形状関数を用いて空間離散化を行う。通常境界要素法と同様であるため、本論文では空間離散化の詳細を省略する。総節点数を M_d とすると、以下の $2M_d(2N_h + 1)$ 個の未知量に対する $2M_d(2N_h + 1)$ 個の非線形方程式が得られる。

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\phi} = \left\{ \mathbf{a}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{a}_{M_d}^{(N_h)}, \mathbf{b}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_{M_d}^{(N_h)} \right\}^T \quad (19)$$

ここで、 $\mathbf{a}_m^{(n)}$ 、 $\mathbf{b}_m^{(n)}$ は空間離散化された開口変位の Fourier 係数を表している。また、上付き添字の T は転置を示している。連立非線形方程式 (19) を通常の Newton 法で解く場合、初期値によっては収束解が得られない。そのため、良い初期値が得られない場合でも有効な Homotopy 法⁽¹⁴⁾を用いる。

関数 \mathbf{h} を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\boldsymbol{\phi}, p) &:= p\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}) + (1-p)\mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}) \\ (\boldsymbol{\phi}, p) &\in \mathbb{R}^{2M_d(2N_h+1)} \times [0, 1] \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{g} は初期値 $\boldsymbol{\phi}_0$ に対して $\mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}_0) = \mathbf{0}$ を満足する補助関数である。そのため、 \mathbf{h} は次の境界条件を満足する。

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\phi}, 0) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}), \quad \mathbf{h}(\boldsymbol{\phi}, 1) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi})$$

$\mathbf{h}(\boldsymbol{\phi}, p) = \mathbf{0}$ の解の軌跡を $p = 0$ から 1 まで追跡することによって、式 (19) の解を得ることができる。本研究では、 \mathbf{g} は次のように定義する。

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}_0)$$

ここで、 $\boldsymbol{\phi}_0$ は表面力フリーのき裂による散乱問題の解とした。Homotopy 法の詳細は文献⁽¹⁴⁾等を参照されたい。

$\mathbf{h}(\boldsymbol{\phi}, p) = \mathbf{0}$ の解の追跡過程において、陰関数定理により $\nabla \mathbf{f}$ の連続性が重要となる。 $\nabla \mathbf{f}$ の連続性を保証するためには、 S 上での境界条件式が少なくとも C^0 関数で定義されていなければならない。そのため、以下のように境界条件 (2)、(3) を変形する。

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{s} = -\mu_d (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \tanh \left[\gamma_1 \frac{[\dot{\mathbf{u}}] \cdot \mathbf{s}}{u_0 \omega^{\text{in}}} \right], \quad (20a)$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \gamma_2 (\lambda + 2\mu) k_L^{\text{in}} [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} H(-[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}) \quad \text{on } S \quad (20b)$$

ここで、 γ_1 、 γ_2 は正則化パラメータであり、有限かつ十分大きな正数で与える。式 (20) を用い、通常の Fourier 係数の計算方法に従うと、 $\mathbf{c}^{(n)}$ 、 $\mathbf{d}^{(n)}$ は法線方向、接線方向に分解し

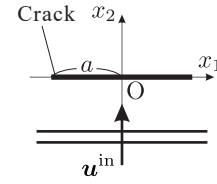


Fig. 2 Incident plane wave scattering by a straight-line crack with length $2a$.

た形式で次のように求められる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}^{(n)} \cdot \mathbf{s} \\ \mathbf{d}^{(n)} \cdot \mathbf{s} \end{Bmatrix} &= \frac{\mu_d \gamma_2 (\lambda + 2\mu) k_L^{\text{in}}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\theta) H(-\Lambda(\theta)) \\ &\times \tanh \left[\frac{\gamma_1}{u_0} \sum_{m=1}^{N_h} m \left\{ \mathbf{a}^{(m)} \sin(m\theta) - \mathbf{b}^{(m)} \cos(m\theta) \right\} \cdot \mathbf{s} \right] \\ &\times \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} d\theta, \quad (21a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}^{(n)} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{d}^{(n)} \cdot \mathbf{n} \end{Bmatrix} &= \frac{\gamma_2 (\lambda + 2\mu) k_L^{\text{in}}}{\pi} \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\theta) H(-\Lambda(\theta)) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} d\theta \quad \text{on } S \quad (21b) \end{aligned}$$

ここで、

$$\Lambda(\theta) = \left[\frac{\mathbf{a}^{(0)}}{2} + \sum_{m=1}^{N_h} \left\{ \mathbf{a}^{(m)} \cos(m\theta) + \mathbf{b}^{(m)} \sin(m\theta) \right\} \right] \cdot \mathbf{n}$$

であり、式 (21) に含まれる積分は数値積分によって評価する。

5. 数値解析結果

本提案手法の妥当性を検証するために、従来の時間領域境界要素法で得られた数値解析結果と本手法による定常解の比較を行う。Fig. 2 に示すように、長さ $2a$ の直線き裂に対して平面 P 波、平面 S 波のそれぞれを垂直入射した場合に対する数値解析を実行した。入射波の角周波数 ω^{in} に対する S 波の波数は $k_S^{\text{in}} a = 5.0$ 、 $t = 0$ における入射波面の位置 $\boldsymbol{\chi}$ は $\boldsymbol{\chi} = (0, 0)$ とした。また、材料定数はポアソン比 $\nu = 0.25$ 、動摩擦係数 $\mu_d = 0.4$ とし、正則化パラメータは $\gamma_1 = \gamma_2 = 50$ とした。境界要素数は全ての数値解析において 100 個 ($M_d = 99$) とした。

5.1. P 波の垂直入射

Fig. 3 に P 波の垂直入射に対するき裂中心における法線方向開口変位の時刻歴波形を示す。この解析では、式 (16) の静的な項 $[\mathbf{u}^{\text{st}}]$ 、 \mathbf{t}^{st} は

$$[\mathbf{u}^{\text{st}}] = \mathbf{t}^{\text{st}} = \mathbf{0} \quad \text{on } S$$

と設定した。調和バランス法における Fourier 級数の打ち切り項数 N_h を変化させて解析を行い、Fig. 3 (a) には $N_h = 1, 2, 3$ の場合、Fig. 3 (b) には $N_h = 4, 5$ の場合の結果を示している。また、図中の Transient は時間領域境界要素法⁽¹⁸⁾によって得られた解であり、比較のため同図に示している。

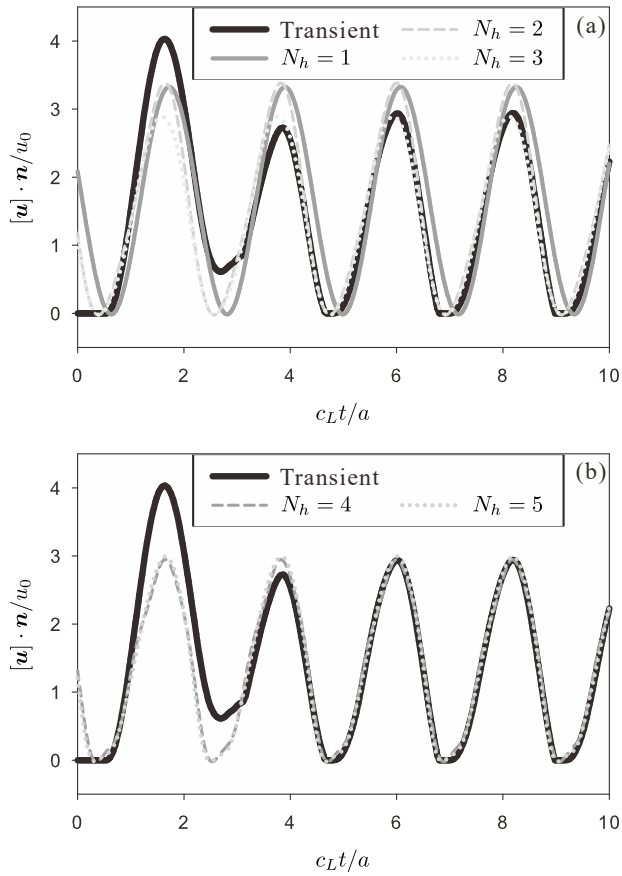


Fig.3 Time variation of normal crack opening displacement at the center point of a crack subject to normal incidence of plane P wave when (a) $N_h = 1, 2,$ and 3 and (b) $N_h = 4$ and 5 .

Fig. 3 (a) より、Transient はおよそ $c_L t/a = 6.0$ 辺りから定常振動している様子がわかる。 $N_h = 1$ の場合は周波数成分が ω^{in} のみであるため正弦波形となっており、精度が低い。 $N_h = 2$ の場合は、位相は Transient の定常振動している部分と概ね一致しているが、振幅は大きくずれている。一方、 $N_h = 3$ の場合は、Transient の定常振動している部分と比較的よく一致している。 Fig. 3 (b) より、 $N_h = 4, 5$ の場合は、き裂面が閉口している部分 ($[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = 0$ となる部分) に若干の誤差が見られるものの、Transient の定常振動している部分とよく一致している様子がわかる。

5.2. S 波の垂直入射

Fig. 4 に S 波の垂直入射に対するき裂中心における接線方向開口変位の時刻歴波形を示す。この解析では、摩擦力を発生させるために

$$[\mathbf{u}^{\text{st}}] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{t}^{\text{st}} \cdot \mathbf{s} = 0, \quad \mathbf{t}^{\text{st}} \cdot \mathbf{n} = -\mu k_T^{\text{in}} u_0 \quad \text{on } S$$

と設定し、き裂面全体に一樣な圧縮応力を作用させた。入射波の振動方向ベクトルは $\mathbf{d}_T = \mathbf{s}$ とし、Fig. 3 (a) には $N_h = 1, 2, 3$ の場合、Fig. 3 (b) には $N_h = 4, 5$ の場合の $[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{s}/u_0$ を示している。

Fig. 4 (a) より、およそ $c_T t/a = 3.0$ 辺りから Transient は定常振動している様子がわかる。 $N_h = 1$ の場合は正弦波形となっており、精度が低いことがわかる。また、この解析条

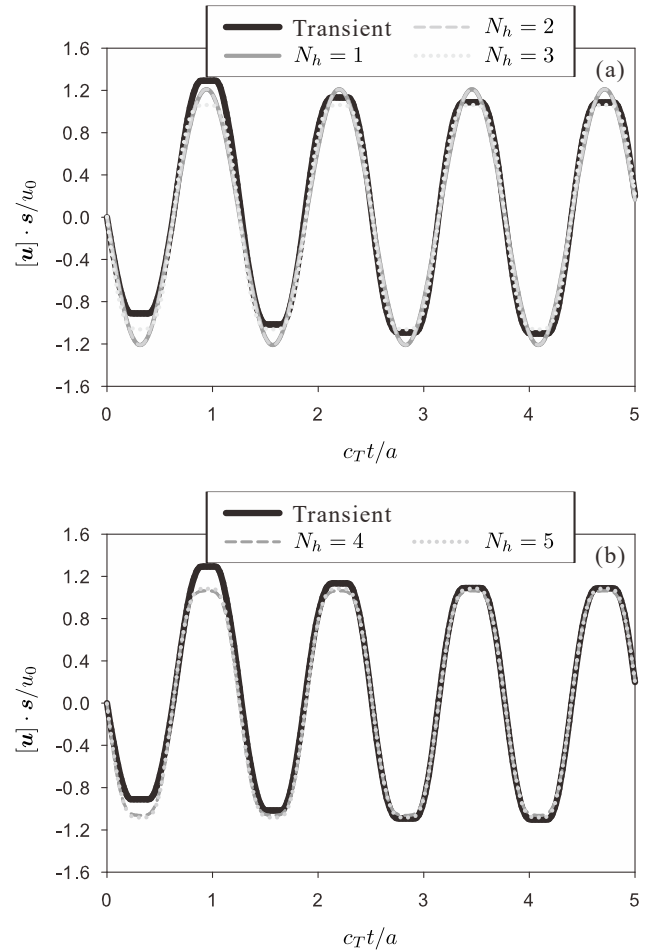


Fig.4 Time variation of tangential crack opening displacement at the center point of a crack subject to normal incidence of plane S wave when (a) $N_h = 1, 2,$ and 3 and (b) $N_h = 4$ and 5 .

件ではき裂面の開閉は発生せず、摩擦現象のみが非線形性の要因となる。式 (20a) は $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$ が定数の場合、点対称関数となり奇数次の高調波のみが発生する。そのため、 $N_h = 2$ の場合は $N_h = 1$ と同様の波形となっており、精度が低い。一方、 $N_h = 3$ の場合は矩形波のような波形をよく再現できており、最大振幅に若干の誤差があるものの比較的精度が高い。 Fig. 4 (b) より、 $N_h = 4$ の場合は $N_h = 3$ の場合と同様の結果であり、 $N_h = 5$ の場合は Transient により近付いている様子が確認できる。

以上より、き裂面の単純な開閉、動摩擦を伴う散乱問題に対して数値解析を実行することによって、本提案手法の妥当性を示した。解析結果から、十分な次数の高調波成分を考慮すれば、精度の良い定常解を得られることが確認できた。

5.3. 計算コストについて

解析結果を得るために要した計算時間を Table 1 に示す。数値計算は全て Intel Xeon E5-2630 2.20GHz によって並列化は施さず 1 thread で実行した。Table 1 中の Transient は時間ステップ数 $N_t = 256$ とした場合の結果である。Table 1 より、本手法の計算時間は $N_h = 4, 5$ 辺りから Transient と同程度となり、P 波入射の場合は S 波入射の場合に比べて計算時間が長

Table 1 Computational time (sec).

N_h	Proposed method					Transient
	1	2	3	4	5	
P wave	4.8	29.4	68.2	181.5	507.4	397.7
S wave	2.8	7.0	28.0	52.4	145.3	277.0

いことがわかる。Transient では代数方程式を反復解法によって解いているため、未知量 N に対して計算量は $O(N^2)$ である。一方、提案手法では連立非線形方程式求解の過程において QR 分解を用いているため $O(N^3)$ の計算量を要している。しかしながら、文献⁽¹⁴⁾でも示されているとおり反復解法の適用による高速化は可能であり、反復一回あたりの計算量を $O(N^2)$ に減少させることは可能である。また、P 波入射と S 波入射の場合の違いは非線形性に起因する反復計算の回数に依存しており、その性質は手法間で異なるため、計算時間の単純な比較は困難である。

必要メモリ量は、何の効率化も施さない場合、両手法とも主要な行列のサイズに依存する。そのため、Transient は $O(M_d^2 N_t)$ 、提案手法は $O(M_d^2 N_h^2)$ のオーダーのメモリ量を要する。

6. おわりに

本論文では、接触を伴うき裂による 2 次元散乱問題に対して定常解析のための調和バランス-境界要素法の定式化、及びいくつかの数値解析例を示した。数値解析結果から、本提案手法はき裂面の繰り返し打撃、及び摩擦を伴うき裂面の定常振動をよく再現できていることが確認できた。そのため、十分に時間が経過した後の定常解を仮定し非線形方程式を解くことによって、非線形散乱問題の定常解を求めることが可能であると考えられる。また、十分な次数の高調波成分を未知量として考慮すれば、精度の良い定常解が得られることを示した。

今後は本提案手法を用いて定常解の分岐構造を調べると共に、分調波の発生原因を調べる予定である。そのため、入射波の周波数や振幅を変化させた場合の解構造を調べる手法、及び非線形振動の漸近安定性の評価手法の開発が今後の課題である。

謝辞： 本研究は第一著者に対する JSPS 研究活動スタート支援 16H07235 の助成を受けたものです。この場をお借りして感謝申し上げます。

参考文献

- (1) I. Yu. Solodov, D. Doring, and G. Busse: New opportunities for NDT using non-linear interaction of elastic waves with defects, *J. Mech. Eng.*, **57** (2011), pp.169–182.
- (2) Y. Ohara, S. Horinouchi, M. Hashimoto, Y. Shintaku, K. and Yamanaka: Nonlinear ultrasonic imaging method for closed

cracks using subtraction of responses at different external loads, *Ultrasonics*, **51** (2011), pp.661–666.

- (3) J. N. Patter, A. J. Croxford, and P. D. Wilcox: Nonlinear ultrasonic phased array imaging, *Phys. Rev. Lett.*, **113** (2014), No.144301.
- (4) 日本機械学会編: 非線形系のダイナミクス-非線形現象の解析入門-, (2007), コロナ社.
- (5) J. M. Richardson: Harmonic generation at an unbounded interface-I. planar interface between semi-infinite elastic media, *Int. Engng. Sci.*, **17** (1979), pp.73–85.
- (6) J. D. Achenbach and A. N. Norris: Loss of specular reflection due to nonlinear crack-face interaction, *Journal of Non-destructive Evaluation*, **3** (1982), pp.229–239.
- (7) C. Pecorari: Nonlinear interaction of plane ultrasonic waves with an interface between rough surfaces in contact, *J. Acoust. Soc. Am.*, **113** (2003), pp.3065–3072.
- (8) D. A. Mendelsohn and J. M. Doong: Transient dynamic elastic frictional contact: a general 2D boundary element formulation with examples of SH motion, *Wave Motion*, **11** (1989), pp.1–21.
- (9) S. Hirose: 2-D scattering by a crack with contact-boundary conditions, *Wave Motion*, **19** (1994), pp.37–49.
- (10) S. Hirose and J. D. Achenbach: Higher harmonics in the far-field due to dynamic crack-face contacting, *J. Acoust. Soc. Am.*, **93** (1993), pp.142–147.
- (11) K. Kimoto and Y. Ichikawa: A finite difference method for elastic wave scattering by a planar crack with contacting faces, *Wave Motion*, **52** (2015), pp.120–137.
- (12) T. Maruyama and T. Touhei: Steady-state analysis of nonlinear ultrasonic waves caused by crack face friction, *Proc. Mtgs. Acoust.*, **29** (2016), 045005.
- (13) A. H. Nayfeh and D. T. Mook: Nonlinear oscillations, (1995), Wiley-VCH.
- (14) E. L. Allgower and K. Georg: Introduction to numerical continuation methods, (1990), Springer-Verlag.
- (15) 丸山泰蔵, 東平光生: 調和バランス-境界要素法を用いた接触を考慮したき裂による 2 次元波動散乱解析, 計算工学講演会論文集, **22**, (2017).
- (16) K. Aki and P. G. Richards: Quantitative seismology, 2nd, (2002), University Science Books.
- (17) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, (2000) 京都大学学術出版会.
- (18) T. Maruyama, T. Saitoh, and S. Hirose: Numerical study on sub-harmonic generation due to interior and surface breaking cracks with contact boundary conditions using time-domain boundary element method, *Int. J. Solids Struct.*, **126–127** (2017), pp.74–89.