

# 離散支持されたレールの時間域伝達境界

## TIME-DOMAIN TRANSMITTING BOUNDARY FOR DISCRETELY SUPPORTED RAIL

阿部和久<sup>1)</sup>, 戸田大介<sup>2)</sup>, 紅露一寛<sup>3)</sup>

Kazuhiisa ABE, Daisuke TODA and Kazuhiro KORO

- 1) 新潟大学工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)  
 2) 新潟大学工学部建設学科(研究当時) (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)  
 3) 新潟大学工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

This paper presents a time-domain transmitting boundary for a discretely supported rail. To this end, the time-domain Green's function is derived numerically by inverse Fourier transform of the receptance matrix representing a semi-infinite railway track. The non-reflecting boundary is formulated based on the convolution of the Green's function and a nodal force. Singularity in the inverse Fourier transform, which is originated from the receptance matrix, is removed by means of the subtraction technique. Through comparison with numerical results obtained by conventional methods, accuracy and validity of the developed nonreflecting boundary are examined.

**Key Words:** Infinite Track, Inverse Fourier Transform, Time-Domain Green's Function

### 1. はじめに

列車の乗り心地改善を始め、軌道振動や道床沈下を低減する目的などで、在来線でもロングレールの導入が進められている。ロングレール軌道は、まくらぎにより離散支持された無限周期構造としてモデル化でき、数値解析による動的挙動の評価が有用となるため、これまでに様々な解法が適用されてきた。ただし、その多くでは軌道を有限長で打切ったモデルが採用されている。この場合、実際の軌道と同様にまくらぎ支持部に減衰を導入すれば、レール打切り端からの反射波の影響は抑制可能であるが、それでも軌道長を十分に長く設定する必要があり、自ずと計算負荷が増大する。

一方、周波数域において無減衰系の無限軌道モデルを考えることにより、軌道の基本的動特性が把握可能となる<sup>(1, 2)</sup>。また、時間域の問題においても、走行車輪と離散支持軌道との連成系に発生するパラメータ励振による不安定挙動の検討では、比較的わずかな減衰が動特性に及ぼす影響の評価が有用となり、無減衰またはそれに近い条件下での解析が求められる<sup>(3, 4)</sup>。このように無減衰または低減衰な軌道モデルを解析対象とする場合、レール打切り端からの反射波への対処が不可欠となる。

そのため、離散支持レールの両端に設ける伝達境界の導出<sup>(5, 6)</sup>が試みられてきたが、それらは周波数域での定常問題を対象としており、時間域のものは未だ提案されていない。しかし、時間域での伝達境界が構成できれば、複数車輪の連

成や車輪の浮き上がりによる非線形挙動などの問題においても、車輪・軌道連成系を数理モデルに忠実な理想的状態に設定でき、動的な基本特性の適切な評価が可能となる。

そこで本論文では、離散支持されたレールの時間域伝達境界を導出する。そのために、まず半無限軌道の時間域 Green 関数を、周波数域レセプタンス行列 (インピーダンス行列<sup>(6)</sup>の逆行列) の逆 Fourier 変換により表現する。なお、時間域伝達境界は、時間域 Green 関数とレール端節点力の時間域補間関数との合成積により定式化する。この場合、当該伝達境界は、レセプタンス行列と補間関数の Fourier 変換との積を周波数域で求め、それを逆 Fourier 変換することで導出可能となる。また、軌道における定在波モードの固有振動数においてインピーダンス行列の行列式がゼロとなり得るが、この場合逆 Fourier 変換は特異項を含む積分で与えられる。そこで、当該積分の数値的処理についても述べる。

求めた伝達境界は、有限軌道モデルの両端に設定する。その際に、有限領域のレールははり要素により離散化し、時間積分法として台形法を適用する。無限軌道の定点加振問題、および走行車輪と軌道との連成下におけるパラメータ励振を対象に本手法を適用し、従来法との比較を通して提案手法の妥当性と有効性について検討する。

### 2. 半無限軌道のレセプタンス行列

時間域 Green 関数は、周波数域におけるレセプタンス行列の逆 Fourier 変換により表す。なお、当該行列は文献<sup>(6)</sup>で求めたインピーダンス行列の逆行列として与えられるので、

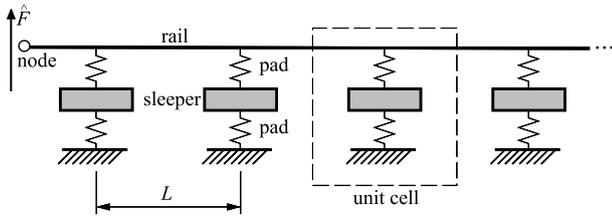


Fig.1 Semi-infinite track subjected to a load at left end

以下ではその概要について述べる。

### 2.1. 伝達行列

Fig.1 に示すような、半無限レール、まくらぎ、パッド類から構成される軌道系を対象に、円振動数  $\omega$  における定常問題を考える。レールはまくらぎにより等間隔  $L$  で離散支持されているものとする。また、まくらぎとパッド類は、それぞれ質点とバネによりモデル化する。なお、ここでは鉛直たわみ振動を対象とする。

半無限軌道左端の節点変位と節点力との関係は一意に定まるが、それが次式により与えられているものとする。

$$[\hat{\mathbf{K}}_{LR}]\{\hat{\mathbf{U}}_L\} = \{\hat{\mathbf{F}}_L\}, \quad \{\hat{\mathbf{U}}_L\} = [\hat{\mathbf{K}}_{LR}^{-1}]\{\hat{\mathbf{F}}_L\} \quad (1)$$

ここで、 $[\hat{\mathbf{K}}_{LR}]$  とその逆行列  $[\hat{\mathbf{K}}_{LR}^{-1}]$  はそれぞれインピーダンスおよびレセプタンス行列であり、 $\{\hat{\mathbf{U}}_L\}, \{\hat{\mathbf{F}}_L\}$  はレール左端の節点変位および節点力ベクトルである。なお、本研究ではレールを Euler ばりでモデル化し、はり要素により離散化する。この場合、レール端点の節点変位はたわみとたわみ角の 2 成分で与えられる。

これらの行列を導出するため、Fig.1 に示した軌道のユニットセルにおける以下の運動方程式を考える。

$$[\hat{\mathbf{K}}]\{\hat{\mathbf{U}}\} = \{\hat{\mathbf{F}}\} \quad (2)$$

ここで、 $[\hat{\mathbf{K}}]$  は、ユニットセルの剛性行列  $[\mathbf{K}]$  と質量行列  $[\mathbf{M}]$  により  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$  で与えられる行列である。

インピーダンス行列を導出するため、次の自由振動に関する固有値問題を設定する。

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{x}_i\} = \omega_i^2 [\mathbf{M}]\{\mathbf{x}_i\}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3)$$

ここで、 $\omega_i$  と  $\{\mathbf{x}_i\}$  は、固有円振動数と固有ベクトルであり、 $N$  はユニットセルの離散自由度である。

式 (2) の解を、固有ベクトルの一次結合により次式のように与える。

$$\{\hat{\mathbf{U}}\} = \sum_i^N \alpha_i \{\mathbf{x}_i\} \quad (4)$$

係数  $\alpha_i$  は固有ベクトルの直交性により、次式で与えられる。

$$\alpha_i = \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} [\mathbf{x}_i^T] \{\hat{\mathbf{F}}\}, \quad m_i = [\mathbf{x}_i^T] [\mathbf{M}]\{\mathbf{x}_i\} \quad (5)$$

ここで、 $( )^T$  は転置を意味している。

ユニットセルに外力が作用していないものとする。式 (4), (5) よりユニットセル両端の節点変位と節点力とに対し

て以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_a \\ \hat{\mathbf{U}}_c \end{Bmatrix} &= \sum_i^N \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \{\mathbf{x}'_i\} [\mathbf{x}'_i{}^T] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_a \\ \hat{\mathbf{F}}_c \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{aa} & \mathbf{H}_{ac} \\ \mathbf{H}_{ca} & \mathbf{H}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_a \\ \hat{\mathbf{F}}_c \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $( )_a, ( )_c$  は、それぞれ左右端節点成分であり、 $\{\mathbf{x}'_i\}$  は両端節点成分から成る部分固有ベクトルである。

式 (6) を、ユニットセル左端と右端節点成分に分離し整理すると、次の左右端節点間の関係を与える伝達行列  $[\mathbf{G}]$  を得る。

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_a \\ \hat{\mathbf{F}}_a \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_c \\ -\hat{\mathbf{F}}_c \end{Bmatrix}, \\ [\mathbf{G}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{cc} \mathbf{H}_{ac}^{-1} & -\mathbf{H}_{cc} \mathbf{H}_{ac}^{-1} \mathbf{H}_{aa} + \mathbf{H}_{ca} \\ -\mathbf{H}_{ac}^{-1} & \mathbf{H}_{ac}^{-1} \mathbf{H}_{aa} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.2. レセプタンス行列の導出

Floquet 原理<sup>(7)</sup> により、周期構造内を伝播する定常波動は、ユニットセル左右端に対して次の関係をみだす。

$$\{\hat{\mathbf{U}}_c\} = e^{-i\kappa L} \{\hat{\mathbf{U}}_a\}, \quad \{\hat{\mathbf{F}}_c\} = -e^{-i\kappa L} \{\hat{\mathbf{F}}_a\} \quad (8)$$

ここで、 $\kappa$  は Floquet 波数である。

式 (8) を式 (7) に適用すると、ユニットセル両端節点値の関係式から、次の固有値問題を導く。

$$[\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_a \\ \hat{\mathbf{F}}_a \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_a \\ \hat{\mathbf{F}}_a \end{Bmatrix}, \quad (\lambda = e^{-i\kappa L}) \quad (9)$$

式 (9) の固有モードの内、半分は右方向へ、半分は左方向へ伝播するものを与える。Fig.1 のように右半無限軌道に対応する伝達境界を考える場合、右方向へ伝播する 2 つのモードの節点成分  $\{\hat{\mathbf{U}}_i\}, \{\hat{\mathbf{F}}_i\}, (i = 1, 2)$  より、 $2 \times 2$  のインピーダンス行列が次式により構成される。

$$[\hat{\mathbf{K}}_{LR}] = [\hat{\mathbf{F}}_1 \hat{\mathbf{F}}_2][\hat{\mathbf{U}}_1 \hat{\mathbf{U}}_2]^{-1} \quad (10)$$

また、レセプタンス行列はこの逆行列として次式により与えられる。

$$[\hat{\mathbf{K}}_{LR}^{-1}] = [\hat{\mathbf{U}}_1 \hat{\mathbf{U}}_2][\hat{\mathbf{F}}_1 \hat{\mathbf{F}}_2]^{-1} \quad (11)$$

## 3. 時間域 Green 関数の導出

### 3.1. 導出過程の概要

時間域 Green 関数は、半無限軌道端部に次の単位インパルス力 (またはモーメント) を作用させた時の応答として与えられる。

$$\{\mathbf{F}_L(t)\} = \delta(t) \{\tilde{\mathbf{F}}_L\} \quad (12)$$

ここで、 $\delta(t)$  はデルタ関数であり、 $\{\tilde{\mathbf{F}}_L\}$  は荷重モードベクトルである。レールを Euler ばりでモデル化する場合、第 1, 第 2 成分はそれぞれ鉛直方向力とモーメントで与えられる。

式 (12) の Fourier 変換  $\{\hat{\mathbf{F}}_L(\omega)\}$  は  $\{\tilde{\mathbf{F}}_L\}$  に一致するので、式 (1) より、単位インパルス加振によるレール左端変位応答は次の逆 Fourier 変換により与えられる。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_L(t)\} &= [\mathbf{C}_L^*(t)]\{\tilde{\mathbf{F}}_L\}, \\ [\mathbf{C}_L^*] &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{K}}_{LR}^{-1}] e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (13)$$

$\{\tilde{\mathbf{F}}_L\} = \{1, 0\}$  とした場合、 $\{\mathbf{U}_L(t)\}$  は、単位パルスせん断力に対する Green 関数を与える。また、 $\{\tilde{\mathbf{F}}_L\} = \{0, 1\}$  とした場合は、単位パルスモーメントに対する Green 関数を与える。 $[\mathbf{C}_L^*(t)]$  はこれらのベクトルから構成されているので、Green 関数の導出はレセプタンス行列の逆 Fourier 変換に帰着する。

### 3.2. レセプタンス行列の特異項

インピーダンス行列の行列式がゼロとなる周波数において、レセプタンス行列の成分は特異性を持つ。よって、式 (13) の逆 Fourier 変換を数値積分で評価する場合、これを適切に処理する必要がある。

そのために、まず次の固有値問題を考える。

$$[\hat{\mathbf{K}}_{LR}]\{\mathbf{z}_i\} = \nu_i\{\mathbf{z}_i\}, \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

なお、 $[\hat{\mathbf{K}}_{LR}]$  は複素対称行列であり、固有ベクトルは直交性を有する。そこで、固有ベクトルを次の条件をみたすように規格化しておく。

$$[\mathbf{z}_i^T]\{\mathbf{z}_j\} = \delta_{ij} \quad (15)$$

ここで、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。

式 (1) の  $\{\hat{\mathbf{U}}_L\}$ ,  $\{\hat{\mathbf{F}}_L\}$  を、式 (14) の固有ベクトルの一次結合により次式のように与えるものとする。

$$\{\hat{\mathbf{U}}_L\} = \sum_i u_i\{\mathbf{z}_i\}, \quad \{\hat{\mathbf{F}}_L\} = \sum_i f_i\{\mathbf{z}_i\} \quad (16)$$

ここで、 $u_i, f_i$  は結合係数である。

式 (16) を (1) に代入すると、式 (15) の直交性より次式を得る。

$$u_i[\mathbf{z}_i^T][\hat{\mathbf{K}}_{LR}]\{\mathbf{z}_i\} = f_i \quad (17)$$

インピーダンス行列の行列式がゼロとなる円振動数を  $\omega_k$  とおくと、その時次式が成り立つ。

$$[\hat{\mathbf{K}}_{LR}(\omega_k)]\{\mathbf{z}_0\} = \{\mathbf{0}\} \quad (18)$$

ここで、 $\{\mathbf{z}_0\}$  は当該のゼロ固有値に対する固有ベクトルである。

式 (16) に対応する  $\{\mathbf{z}_0\}$  の係数を  $u_0$  とおくと、 $\omega = \omega_k$  の近傍において次の近似関係が成り立つ。

$$u_0 \approx \frac{a}{\omega - \omega_k} \quad (19)$$

式 (19) の係数  $a$  を求めるために、式 (19) を式 (17) で  $i=0$  とした関係式に代入すると、次式を得る。

$$a[\mathbf{z}_0^T][\hat{\mathbf{K}}_{LR}]\{\mathbf{z}_0\} = (\omega - \omega_k)f_0 \quad (20)$$

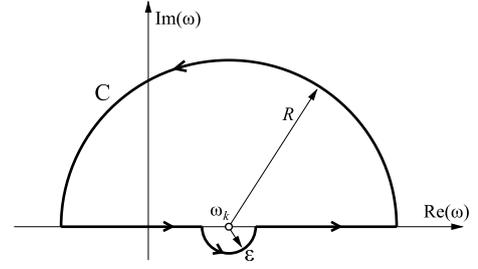


Fig. 2 Path integral on  $C$

式 (20) の両辺を  $\omega$  について微分すると次式を得る。

$$a \left( \mathbf{z}_0^T \hat{\mathbf{K}}_{LR} \mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_0^T \hat{\mathbf{K}}_{LR}' \mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_0^T \hat{\mathbf{K}}_{LR} \mathbf{z}_0' \right) = f_0 - (\omega - \omega_k) f_0' \quad (21)$$

ここで、 $( )'$  は  $\omega$  に関する微分を意味している。

$\omega \rightarrow \omega_k$  の極限において、 $[\hat{\mathbf{K}}_{LR}]\{\mathbf{z}_0\} = 0$  となることを考慮すると、式 (21) より次式を得る。

$$a[\mathbf{z}_0^T][\hat{\mathbf{K}}_{LR}']\{\mathbf{z}_0\} = f_0 \quad (22)$$

式 (15), (16) および式 (22) より、 $a$  は次式により求められる。

$$a = \frac{[\mathbf{z}_0^T]\{\hat{\mathbf{F}}_L\}}{[\mathbf{z}_0^T][\hat{\mathbf{K}}_{LR}']\{\mathbf{z}_0\}} = \frac{1}{\nu_0'} [\mathbf{z}_0^T]\{\hat{\mathbf{F}}_L\} \quad (23)$$

よって、式 (16), (19), (23) より、変位ベクトル  $\{\hat{\mathbf{U}}_L\}$  の特異項  $\{\hat{\mathbf{U}}_S\}$  は次式により与えられる。

$$\{\hat{\mathbf{U}}_S\} = \frac{[\mathbf{A}_k]}{\omega - \omega_k} \{\hat{\mathbf{F}}_L\}, \quad [\mathbf{A}_k] = \frac{1}{\nu_0'} [\mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0^T] \quad (24)$$

式 (24) より、レセプタンス行列の特異成分が  $[\mathbf{A}_k]/(\omega - \omega_k)$  により与えられることがわかる。なお、この特異点  $\omega_k$  は、周期構造における定在波モードの固有振動数に存在する。

### 3.3. 逆 Fourier 変換の計算

3.2 の議論より、式 (13) に示した  $[\mathbf{C}_L^*(t)]$  に関する積分は、次式のようにして特異項を分離することができる。

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_L^*(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \hat{\mathbf{K}}_{LR}^{-1} - \sum_k \frac{\mathbf{A}_k}{\omega - \omega_k} \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_k [\mathbf{A}_k] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_k} d\omega \end{aligned} \quad (25)$$

式 (25) 右辺第 1 項の積分からは特異項が除去されているので、これについては通常の数値積分で評価可能である。一方、第 2 項目の積分については、 $t > 0$  に対して Fig.2 に示す経路  $C$  上の積分をとり、 $R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$  の極限を考えることで、次式のように評価できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_k} d\omega = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_C \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_k} d\omega = 2\pi i e^{i\omega_k t} \quad (26)$$

式 (26) を (25) に代入し、さらに特異点が  $\omega$  の実軸上に正負対称に分布することを考慮すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_L^*(t)] &= \int_0^{\infty} \text{Re} \left( \left[ \hat{\mathbf{K}}_{LR}^{-1} - \sum_k \frac{\mathbf{A}_k}{\omega - \omega_k} \right] e^{i\omega t} \right) d\omega \\ &\quad - 2 \sum_k \sin \omega_k t [\mathbf{A}_k] \end{aligned} \quad (27)$$

#### 4. 時間域伝達境界の導出

##### 4.1. 時間域の離散化

はり要素端部に作用する断面力を、時間ステップ毎に区間一定関数で近似し、次式により離散化するものとする。

$$\{\mathbf{F}_L(t)\} = \sum_j H_j(t) \{\mathbf{F}_L^j\} \quad (28)$$

ここで、 $\{\mathbf{F}_L^j\}$  は、時間増分  $\Delta t$  の下の第  $j$  ステップにおける節点力、 $H_j(t)$  は第  $j$  ステップで 1 をとる次の区間一定関数である。

$$\begin{aligned} H_j(t) &= 1 \quad \text{for } (j-1)\Delta t < t < j\Delta t, \\ &= 0 \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (29)$$

半無限レール端に作用する式 (28) の節点力による、時刻  $t_M = M\Delta t$  におけるレール端変位  $\{\mathbf{U}_L^M\}$  は、次の合成積により与えられる。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_L^M\} &= \sum_j^M \int_0^{t_M} H_j(\tau) [\mathbf{C}_L^*(t_M - \tau)] d\tau \cdot \{\mathbf{F}_L^j\} \\ &= \sum_j^M [\mathbf{C}_{L,M-j+1}^*] \{\mathbf{F}_L^j\} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、 $[\mathbf{C}_{L,j}^*]$  は次式で定義される行列である。

$$[\mathbf{C}_{L,j}^*] := \int_{-\infty}^{\infty} H_1(t_j - \tau) [\mathbf{C}_L^*(\tau)] d\tau \quad (31)$$

$[\mathbf{C}_{L,j}^*]$  は Green 関数  $[\mathbf{C}_L^*(t)]$  と補関数  $H_1(t)$  との合成積で与えられているので、 $H_1$  の Fourier 変換  $\hat{H}_1$  を用いて、次の逆 Fourier 変換により表現することができる。

$$[\mathbf{C}_{L,j}^*] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_1[\hat{\mathbf{K}}_{LR}^{-1}] e^{i\omega t_j} d\omega \quad (32)$$

なお、 $\hat{H}_1$  は次式で与えられる。

$$\hat{H}_1(\omega) = \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega\Delta t} - 1) \quad (33)$$

式 (25) に示した特異項の処理と同様の手法を式 (32) に適用すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_{L,j}^*] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \hat{\mathbf{K}}_{LR}^{-1} - \sum_k \frac{\mathbf{A}_k}{\omega - \omega_k} \right] \hat{H}_1(\omega) e^{i\omega t_j} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_k [\mathbf{A}_k] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - \omega_k} \hat{H}_1(\omega) e^{i\omega t_j} d\omega \end{aligned} \quad (34)$$

$\omega=0$  に関する特異点分布の対称性より、多少の計算の後、 $\omega_k > 0$  に対して次式を得る。

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_{L,j}^*] &= \int_0^{\infty} \text{Im} \left( \left[ \hat{\mathbf{K}}_{LR}^{-1} - \sum_k \frac{2\omega_k \mathbf{A}_k}{\omega^2 - \omega_k^2} \right] \frac{1 - e^{-i\omega\Delta t}}{\pi\omega} e^{i\omega t_j} \right) d\omega \\ &\quad + 2 \sum_k \frac{[\mathbf{A}_k]}{\omega_k} (\cos \omega_k t_j - \cos \omega_k t_{j-1}) \end{aligned} \quad (35)$$

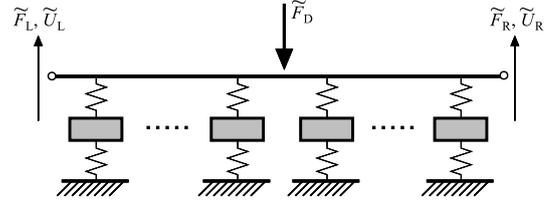


Fig. 3 Track of finite length

##### 4.2. 伝達境界を用いたはり要素解析

Fig.3 に示す有限軌道モデルを離散化して得られる方程式は次式のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{LL} & \tilde{\mathbf{K}}_{LR} & \tilde{\mathbf{K}}_{LD} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{RL} & \tilde{\mathbf{K}}_{RR} & \tilde{\mathbf{K}}_{RD} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{DL} & \tilde{\mathbf{K}}_{DR} & \tilde{\mathbf{K}}_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_L^M \\ \tilde{\mathbf{U}}_R^M \\ \tilde{\mathbf{U}}_D^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_L^M + \tilde{\mathbf{V}}_L^{M-1} \\ \tilde{\mathbf{F}}_R^M + \tilde{\mathbf{V}}_R^{M-1} \\ \tilde{\mathbf{F}}_D^M + \tilde{\mathbf{V}}_D^{M-1} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

ここで、 $[\tilde{\mathbf{K}}]$  は用いる時間積分法に依存して与えられる求解行列、 $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$ 、 $\{\tilde{\mathbf{F}}\}$  は Fig.3 を離散化した際の節点変位および節点力ベクトル、 $(\ )_L, (\ )_R, (\ )_D$  はそれぞれ軌道左端・右端・それ以外の節点に関する成分である。また、 $\{\tilde{\mathbf{V}}^{M-1}\}$  は、時間積分法に関して  $M-1$  ステップの解から評価されるベクトル項である。

式 (30) より、 $\{\mathbf{F}_L^M\}$  は次式で与えることができる。

$$\{\mathbf{F}_L^M\} = [\mathbf{C}_{L,1}^{*-1}] \{\mathbf{U}_L^M\} - \sum_j^{M-1} [\mathbf{C}_{L,1}^{*-1} \cdot \mathbf{C}_{L,M-j+1}^*] \{\mathbf{F}_L^j\} \quad (37)$$

左半無限軌道端節点力  $\{\mathbf{F}_R^M\}$  に対しても同様の関係式を得る。

両端節点において、次の変位の適合条件と、力のつり合い条件を課す。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_R^M\} &= \{\tilde{\mathbf{U}}_L^M\}, & \{\mathbf{U}_L^M\} &= \{\tilde{\mathbf{U}}_R^M\}, \\ \{\mathbf{F}_R^M\} &= -\{\tilde{\mathbf{F}}_L^M\}, & \{\mathbf{F}_L^M\} &= -\{\tilde{\mathbf{F}}_R^M\} \end{aligned} \quad (38)$$

式 (37), (38) を式 (36) に代入すると、最終的に次の無限軌道に対する求解方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{LL} + \mathbf{C}_{R,1}^{*-1} & \tilde{\mathbf{K}}_{LR} & \tilde{\mathbf{K}}_{LD} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{RL} & \tilde{\mathbf{K}}_{RR} + \mathbf{C}_{L,1}^{*-1} & \tilde{\mathbf{K}}_{RD} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{DL} & \tilde{\mathbf{K}}_{DR} & \tilde{\mathbf{K}}_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_L^M \\ \tilde{\mathbf{U}}_R^M \\ \tilde{\mathbf{U}}_D^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_L^{M-1} + \sum_{j=1}^{M-1} [\mathbf{C}_{R,1}^{*-1} \cdot \mathbf{C}_{R,M-j+1}^*] \{\mathbf{F}_R^j\} \\ \tilde{\mathbf{V}}_R^{M-1} + \sum_{j=1}^{M-1} [\mathbf{C}_{L,1}^{*-1} \cdot \mathbf{C}_{L,M-j+1}^*] \{\mathbf{F}_L^j\} \\ \tilde{\mathbf{F}}_D^M + \tilde{\mathbf{V}}_D^{M-1} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

#### 5. 解析例

##### 5.1. 解析条件

Fig.1 に示したような、レール、まくらぎ、パッド類から構成された軌道モデルを対象とする。各部の設定条件は Table 1 に示すとおりである。本手法の妥当性を確認する目的で、パッド類には減衰を設定していない。レールは Euler はり要

Table 1 Parameters in track model

Rail	Bending stiffness (MNm <sup>2</sup> )	4.04
	Mass per unit length (kg/m)	50.47
Sleeper (per rail)	Mass (kg)	80.0
	Sleeper spacing (m)	0.6
Rail pad	Spring constant (MN/m)	60.0
Sleeper pad	Spring constant (MN/m)	60.0

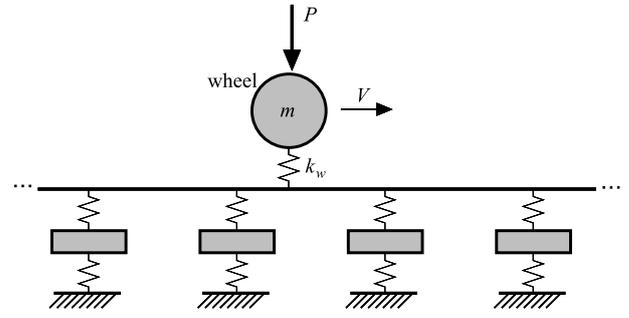


Fig. 5 Wheel/track interaction problem

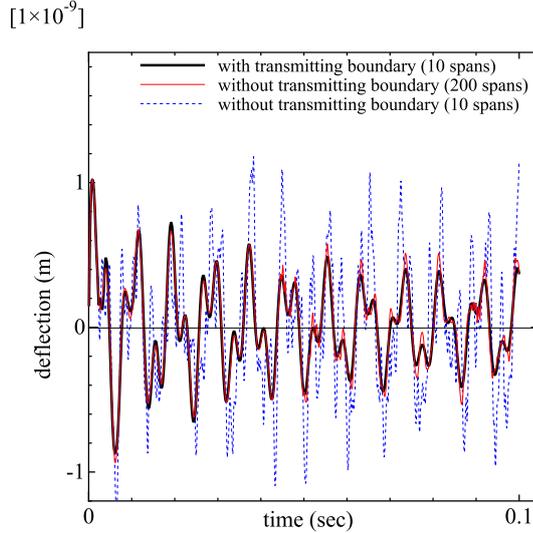


Fig. 4 Deflection at loading position

素で離散化し、まくらぎ 1 区間を 10 要素で等分割した。時間積分法には台形法を用いた。また、レールを Euler ばりモデル化する場合、せん断たわみを考慮していないため、再現可能な周波数の上限は約 500Hz となる<sup>(8)</sup>。そのため、式(35)における逆 Fourier 変換の積分範囲は 0~500Hz とし、その間を 1000 分割して、各区間に 2 点 Gauss 積分を適用した。なお、周波数軸上の特異点  $\omega_k$  は、事前に探索して求めておいた。本問題において、特異点は 112.3, 270.5Hz 付近に位置していた。

## 5.2. インパルス加振に対する応答解析

軌道中央のスパンに、Fig.3 に示すように単位荷重を 1 ステップ間印加する問題に対して、本手法を適用した。時間積分における増分  $\Delta t$  は  $1 \times 10^{-4}$ (sec) とした。Fig.3 の有限軌道域をユニットセル 10 区間で与え、その両端に本研究で構成した伝達境界を設定した。なお、比較のため、伝達境界を設定せずに、軌道長を 10 区間および 200 区間とした 2 ケースについても解析を行った。加振点におけるレールたわみの時刻歴応答の解析結果を Fig.4 に示す。

軌道長を 10 区間と短くとりレールの両側を自由端のままとした場合の応答が、加振直後より他の 2 ケースとは大きく異なっている様子が確認できる。これは、明らかにレール端部からの反射波の影響によるものである。

一方、伝達境界を設定した本手法では、同じく 10 区間と短い軌道モデルであるにも関わらず、その応答は 200 区間の長尺モデルと比較的に良く一致しており、提案法の妥当性が確認できる。なお、これら両者間でも 0.05(sec) 前後以降においてわずかな差異が認められる。これは、200 区間の軌道モデルによっても、打ち切り端からの反射波の影響が完全に除去できず、それが到達した以降の応答に乱れを生じたことによるものと考えられる。

以上のことから、無減衰な軌道モデルを対象とする場合、軌道長を相当長く設定しても、比較的短時間で反射波が戻ってくるため、良好な精度で応答解析を行うことが困難であることがわかる。一方、このような問題に対して、本手法が極めて有効であることが確認できた。

## 5.3. 車輪走行によるパラメータ励振の解析

Fig.5 に示すような、一定速度  $V$  で走行する車輪と軌道との連成応答解析を行った。なお、軌道はまくらぎにより離散支持されているため、一定速度で走行する車輪の支持剛性(車輪直下におけるレールのたわみ剛性)は周期的に変動する。このような条件下では、応答が次第に増幅するパラメータ励振<sup>(3)</sup>と呼ばれる不安定振動が発生し得る。車輪は質量  $m=500$ kg の質点で表し、車輪・レール間接触はバネ定数  $k_w=2$ GN/m の線形バネで与えた。静的荷重はパラメータ励振自体に影響しないが、その引金となり得る。そのため、走行車輪に静的荷重  $P=1 \times 10^5$ N を加えた。軌道構造は前述の解析例と同じとした。軌道ユニットセル 60 区間を離散化し、両端に伝達境界を設定したものと、しないものとで解析を行った。また、事前に実施した数値解析結果より、停止車輪・軌道連成系の共振周波数が  $f=55.6$ Hz であることを確認した。パラメータ励振は走行速度が  $V=2Lf$  前後において発生する<sup>(3)</sup>ので、本問題では、車輪走行速度をそれに概ね対応する  $V=66.7$ m/s に設定した。

車輪の鉛直変位時刻歴を Fig.6 に示す。なお図中には、伝達境界有無の両ケースでの応答振幅の包絡線を破線で示した。応答周期長はまくらぎ 2 本の通過距離 1.2m に対応している。また、車輪走行過程で応答振幅が次第に増大している。これらのことから、不安定応答であるパラメータ励振が発生していることが確認できる。伝達境界の有無が応答に及ぼす影響は比較的小さいが、まくらぎ 2 本を車輪が通過する

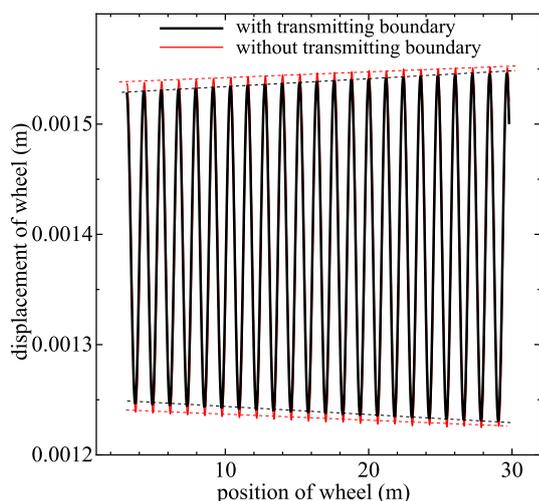


Fig. 6 Vertical displacement of running wheel

際の振動増幅率に多少の違いが認められる。伝達境界を設定した場合の増幅率が 1.0051 であるのに対し、設定しない場合は 1.004 であった。ちなみに、解析解<sup>(3)</sup>より求めた増幅率は 1.0057 であり、前者の方がこれに近い値を与えている。この差異は比較的わずかなものではあるが、応答安定性の確保に必要となる軌道系減衰を評価する場合には重要となってくる<sup>(4)</sup>。

## 6. おわりに

まくらぎにより離散支持された軌道モデルを対象に、半無限軌道と等価な時間域伝達境界を構成した。そのために、まず、半無限軌道を対象とした周波数域レセプタンス行列の逆 Fourier 変換により時間域 Green 関数を定式化した。その下で、時間域伝達境界を、当該 Green 関数とレール端作用力の時間域補間関数との合成積により表現した。具体的にはレセプタンス行列と補間関数を Fourier 変換したものと積を周波数域で求め、それを逆 Fourier 変換することで導出した。また、レセプタンス行列に関する周波数軸上の特異点の除去法についても示した。最後に、数値解析例を通し、本研究で構成した伝達境界が十分な精度を有し、無限軌道の解析に有効であることを確認した。

なお、伝達境界の計算の際には、半無限軌道を表現するレセプタンス行列を求める必要があるが、これはまくらぎ 1 区間で与えられる軌道 1 ユニットの離散化のみで実行可能である。そのため、長尺な軌道モデルを用いた従来法に比べ、これに要する計算負荷は極めてわずかなものとなる。

## 参考文献

- (1) Mead, D.J. : Free wave propagation in periodically supported infinite beams, *J. of Sound and Vibr.*, 11(2)(1970), pp.181-197.
- (2) Thompson, D.J. : Wheel-rail noise generation, Part III: Rail vibration, *J. of Sound and Vibr.*, 161(3)(1993), pp.421-446.
- (3) Abe, K., Chida, Y., Quinay, P.E.B. and Koro, K. : Dynamic instability of a wheel moving on a discretely supported infinite rail, *J. of Sound and Vibr.*, 333(2014), pp.3413-3427.
- (4) Abe, K., Hosaka, K., Koro, K. and Quinay, P.E.B. : Influence of damping and rail stress on parametric instability of a wheel, *Proc. of STECH2015, Chiba (Japan)*, (2015), USB.
- (5) Abe, K., Fujishita, S. and Koro, K. : Development of transmitting boundary for periodically supported rails, *J. of Mech. Sys. for Transp. and Log.*, 3(1)(2010), pp.44-52.
- (6) Abe, K., Kikuchi, A. and Koro, K. : Wave propagation in an infinite track having an irregular region, *Notes on Num. Fluid Mech. and Multidiscip. Design*, 118(2012), pp.71-79.
- (7) Delph, T.J., Herrmann, G. and Kaul, R.K. : Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body: Antiplane strain, *J. of Appl. Mech.*, 45(1978), pp.343-349.
- (8) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛 : まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, *応用力学論文集*, 10(2007), pp.1029-1036.