計算数理工学論文集 Vol. 16 (2016 年 12 月)，論文 No. 09-161202 JASCOME

ファイバー束による位相異常を伴う系の局所ゲージ有限要素法

LOCAL GAUGE FINITE ELEMENT METHOD FOR SYSTEMS WITH PHASE ANOMALY BY A FIBER BUNDLE

植田　毅 [1)]

Tsuyoshi Ueta

1) 東京慈恵会医科大学物理学研究室　(〒 182-8570　東京都調布市国領町 8-3-1,　E-mail: tsuyoshi_ueta@jikei.ac.jp)

In order to realize a highly accurate numerical method for analyzing an electron wave in a system with phase anomaly due to a magnetic flux filament, namely fiber bundle, the applicability of the local gauge finite element method was examined, and it found out that it is applicable to the problem as it is. As an example of numerical implementation, the transport properties were investigated in a cross-shaped waveguide with which a magnetic flux filament pierces through the center. It was confirmed that the transmissivity shows periodic oscillation owing to a magnetic flux, and that the error of unitarity is less than 6

Key Words: Finite Element Method, Electron Waves, Local Gauge, Magnetic Flux, Screw Dislocation

1. はじめに

1959 年に Aharonov と Bohm がフィラメント状の磁束を通過する電子波の散乱問題を報告して以来，この問題は様々な分野において広く注目されてきた。[(1)] この系では電子波は磁場に全く触れないが，フィラメント状の磁束を発生する非局所的なベクトルポテンシャルにはさらされている。Aharonov と Bohm の解析結果はこのような場合においても電子波は磁束の大きさに依存する干渉を起こすことを示した。古典電磁気学では数学的定式化の便宜として導入されたベクトルポテンシャルが量子力学においては物理現象を引き起こす物理的に本質的な量であるとして学界にインパクトを与えた。この干渉効果は AB 効果と呼ばれ，理論のみならず，実験研究も精力的になされた。[(2)] 1982 年に日立製作所の外村が，リング状の永久磁石を超伝導体で覆うという画期的なアイデアにより実現し，電子顕微鏡の電子線ホログラフィーを用いてリングの内側と外側と通る電子波の干渉により，AB 効果の実在の実験的証明に決着をつけた。[(3)]

さらに，この問題では電子の波動関数が位相の任意性により多価性を持つため，非単連結空間における関数論，微分方程式論に発展した。[(2)]

他方，立方格子を組む半導体結晶に Fig. 1 に示すような，軸の周りを一周すると軸に平行な方向に 1 もしくは数格子分のずれを生じる螺旋転位がある場合，転位軸の周りを一周した電子は転位軸に平行な向きの運動量を得る。しかし，電子のエネルギーは一定であるから，転位軸に平行な面内の運動量が減少し，面内の運動に影響を与える。

このような転位を持つ結晶内をホッピング伝導する電子を強束縛近似でモデル化した場合，その支配方程式は，格子間隔に対して波長が十分長い場合に，転位の軸の位置にフィラメント状の磁束が存在する AB 系のシュレディンガー方程式に帰着することが，1978 年に川村により示された。[(4)] これ

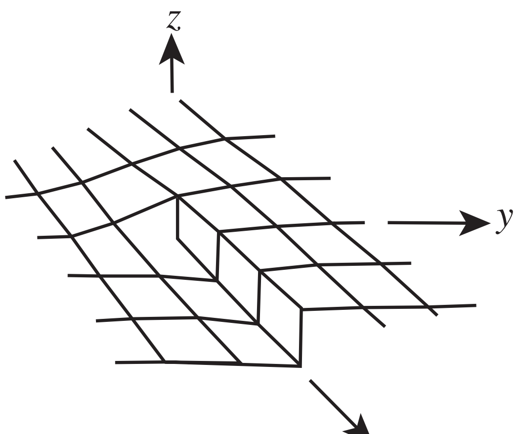

Fig. 1　Illustration of a screw dislocation.

により，AB 効果は転位が存在する場合の量子伝導という観点からも注目され，また，より一般的にフィラメント状ファイバーバンドルによる位相異常を含む方程式の新たな解法の開発にもつながった。[(5, 6, 7)]

2016 年 9 月 17 日受付，2016 年 10 月 24 日受理

無限２次元空間でのAB系，螺旋転位系の波動関数は川村らにより解析的に求められたが，フィラメント状磁束を含む無限に高い障壁で囲まれたシュレディンガー方程式の数値解法の開発は次節以降に述べるように困難を伴い，未だ万能な解法は存在しない。次節では，これまでの数解法の試みとその困難を示し，３節において，筆者がこれまでに開発した局所ゲージ有限要素法を修正した解法を示す。

2. AB系のこれまでの数値解法

2.1. 差分法

AB系ではベクトルポテンシャルが磁束の軸で発散し，その発散が磁束の効果を表すため，単純な離散化では高精度な数値解析は困難であり，著者はその解析例を知らない。

2.2. 厳密なグリーン関数を用いた境界要素法

大阪市立大の増田らは2005年春の日本物理学会において，量子ラチェット効果を調べるために，２つの導波路を持つ円形量子ドットの中心に正三角形の障壁を置き，それと導波路との成す角度によるコンダクタンスの変化を境界要素法を用いて解析し，報告した。[8] その研究では，磁場のかかってない場合，三角形の障壁の中心にデルタ関数状の磁束（AB磁束）を印加した場合，一様磁場を印加した場合の計算を行っている。磁場がかかってない場合，一様磁場が印加された場合の境界要素法は既に実用化されている [9] が，AB磁束が印加された系の境界要素法は新たな試みである。AB磁束を含む系のグリーン関数は並進対称性がなく，磁束の周りを周回するような電子の運動は多重連結空間での運動で，波動関数の多価性など多くの議論があった。[2] 増田らはこの系のグリーン関数を固有関数展開，すなわち，実数次のベッセル関数，ハンケル関数及び位相因子の無限和による表現を用いて計算していた。その計算精度には問題があり，実際，増田らの計算において，ユニタリティ（確率の保存性）の精度は10%以上の誤差を含むものであった。[10]

2.3. 仮想切断線に位相ギャップを取り込んだ境界要素法

川村らは螺旋転位とのアナロジーからフィラメント状磁束がある無限２次元空間において無限遠からの入射する平面波の散乱を境界積分法を用いて取り扱っている。[11] ベクトルポテンシャルが０の場合のシュレディンガー方程式を積分表現し，磁束の下流側に仮想的な切断線を入れ，磁束を回避する積分経路を考える。切断線を螺旋転位における転位線と見立て，その両側で波動関数に磁束に依存した位相ギャップを境界条件として取り入れる。その結果，散乱波は切断線の片側の積分のみで表される。無限系では非常に単純な方程式となるため解析解を求めることができる。

2005年に松嶋がこのアイデアを本論文で考えている有限な系に応用し，境界要素法を開発した。[12] 川村の扱った無限系では考慮する必要がなかったが，有限系では，入射口と射出口には半無限の導波路を想定するため，その開口部では位相のギャップを考慮した境界条件を課す必要がある。また，この場合，仮想的な切断線部分では波動関数およびその法線微分両方が未知変数となり，微分に関する特異性の高い積分方程式を用いる必要があり，十分な計算精度を実現できていない。

2.4. 有限要素法

有限要素法をこの問題に適用した例も知られていない。著者は一様磁場がかかっているときの局所ゲージを用いた有限要素法を開発しており，それは，各行列要素にベクトルポテンシャルを行列の足に現れる２点間を結ぶ直線経路で線積分したものの指数関数を位相因子（パイエルス位相）[15] としてかけるというものである。この手法は，一見，任意のベクトルポテンシャルに適用可能のように思われるが，その導出過程を考えるとそのまま適用することはできないことが分かる。

本論文では，フィラメント状磁束を発生させるベクトルポテンシャルが存在する場合に局所ゲージ変換を用いて有限要素法を拡張する。また，数値計算例を示し，ユニタリティを用いて計算精度の確認を行う。

3. 局所ゲージ変換を用いたパイエルス位相因子

z 軸正向きにフィラメント状の磁束 Φ が存在する場合の x-y 面内での電子波の伝導を考える。この磁束を発生するベクトルポテンシャルを

$$\boldsymbol{A} = \Phi\left(-\frac{y}{2\pi r^2}, \frac{x}{2\pi r^2}, 0\right) \tag{1}$$

のようにとる。ここで，$r \equiv \sqrt{x^2+y^2}$ である。このとき，$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ を満たし，磁場は

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \Phi\delta(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{z}}$$

とデルタ関数的な磁場となる。ただし，$\hat{\boldsymbol{z}}$ は z 軸正向きの単位ベクトルである。

このとき，質量 m，電荷 q，エネルギー E の荷電粒子の運動を記述するシュレディンガー方程式は

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - q\boldsymbol{A}\right)^2 \psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

で与えられる。ここで，$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである。

一様磁場が印加されている場合のシュレディンガー方程式の有限要素法の定式化は既になされており，それは近似的に磁場が印加されていない場合の行列に所謂パイエルス位相因子をかけるだけで定式化できることが分かる。[13, 14, 15] すなわち，一様磁場を発生させる任意のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が存在する場合には運動エネルギーの行列要素 K_{jk} は

$$\mathsf{K}_{jk} = \exp\left[i\frac{q}{\hbar}\int_{\boldsymbol{r}_k}^{\boldsymbol{r}_j}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\right]\mathsf{K}^0_{jk} \tag{3}$$

$$\mathsf{K}^0_{jk} = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{\mathrm{v}_{jk}}\left(\boldsymbol{\nabla}N_j(\boldsymbol{\xi})\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}N_k(\boldsymbol{\xi})\right)d\boldsymbol{\xi} \tag{4}$$

同様に，エネルギーとポテンシャルの差の行列要素は

$$\mathsf{M}_{jk} = \exp\left[i\frac{q}{\hbar}\int_{\boldsymbol{r}_k}^{\boldsymbol{r}_j}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\right]\mathsf{M}^0_{jk} \tag{5}$$

$$\mathsf{M}^0_{jk} \equiv \int_{\mathrm{v}_{jk}}\Big\{EN_j(\boldsymbol{r})N_k(\boldsymbol{r}) - N_j(\boldsymbol{r})\left(\sum_l V(\boldsymbol{r}_l)N_l(\boldsymbol{r})\right)N_k(\boldsymbol{r})\Big\}d\boldsymbol{r} \tag{6}$$

ここで，v_{jk} は節点 j と節点 k を共に含む要素内での積分であることを示す。$N_j(\boldsymbol{r})$ は，j 番目の節点の座標を $\boldsymbol{r}_j$ として，

$$N_j(\boldsymbol{r}_k) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \tag{7}$$

を満たし，節点 j を囲む節点との間を線形につなぐ $\boldsymbol{r}$ の連続実関数として定義される j 番目の節点における形状関数（補間関数）である。また，積分記号の矢印は点 $\boldsymbol{r}_k$ から点 $\boldsymbol{r}_j$ へ直線で結ぶ経路に沿って積分することを意味する。これら式の導出において，有限要素 v_{jk} を貫く磁束が磁束量子 h/q に比べ十分小さいとして積分内の位相因子を 1 と近似している。

式 (3), (5) はゲージに依存しないため，任意のベクトルポテンシャルについて適用可能かのように思われるが，これらの表現の導出には，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}$ として定義される磁気的並進演算子

$$T(\boldsymbol{R}) \equiv \exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{p}+q\boldsymbol{A})\right), \tag{8}$$

が

$$[(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2, T(\boldsymbol{R})] = 0 \tag{9}$$

および

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{R})V(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}) &= e^{-i\frac{q}{2\hbar}\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{r})}V(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})\phi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}) \\ &= V(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})T(\boldsymbol{R})\phi(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{10}$$

なる関係を満たす [16] ことを用いている。ここで，[,] は $[A,B] \equiv AB - BA$ で定義される交換子である。したがって，安易に式 (3), (5) を拡大解釈，利用することはできない。

ここで，波動関数のゲージ変換に立ち返り，これらの関係について検証する。一般に，シュレディンガー方程式 (2) において，波動関数を

$$\tilde{\psi}(\boldsymbol{r}) = \exp\left(-i\frac{q}{\hbar}\int^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right)\psi(\boldsymbol{r}) \tag{11}$$

のようにゲージ変換すると，形式的に $\tilde{\psi}(\boldsymbol{r})$ は

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla\right)^2\tilde{\psi}(\boldsymbol{r}) = E\tilde{\psi}(\boldsymbol{r}) \tag{12}$$

を満たすように見える。しかし，式 (12) が現在の問題の解とはならない。それは，式 (11) においては，位相因子は積分経路が指定されておらず，これは磁場が印加されていないとき以外積分経路に依って異なる値となり，$\tilde{\psi}(\boldsymbol{r})$ が多価関数となるからである。

本問題においては原点に磁束が存在する以外はいたるところ磁場は 0 であるため，一般性を失わずに，この積分路を原点の周りを周回する経路とそれ以外の経路に分けることができる。このとき，l 回原点の周りを周回する経路を C_l（ただし，経路は反時計周りとして $l<0$ の場合は時計周りを表すものとする）として，原点を l 周する経路の数を n_l，その時の波動関数を $\tilde{\psi}_l(\boldsymbol{r})$ と書くと，形式的に

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\mathop{{\int}\!\!\!\!\nearrow}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right)\sum_{l=-\infty}^{\infty}n_l\exp\left(i\frac{e}{\hbar}l\Phi\right)\tilde{\psi}_l(\boldsymbol{r}) \tag{13}$$

と表現できる。[17, 18] ただし，右辺第 1 項の位相因子内の積分の矢印は積分を原点を周回しない経路での積分を表す。l の和の項は積分の端点に依存しないから，まとめて $\hat{\psi}(\boldsymbol{r})$ とすると

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\mathop{{\int}\!\!\!\!\nearrow}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}) \tag{14}$$

と書ける。

この表現を形状関数 $N_j(\boldsymbol{r})$ を用いて

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\mathop{{\int}\!\!\!\!\nearrow}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right)\sum_j\hat{\psi}_jN_j(\boldsymbol{r}) \tag{15}$$

と離散化する。ここで，

$$\begin{aligned} &\exp\left(i\frac{q}{\hbar}\mathop{{\int}\!\!\!\!\nearrow}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right)\hat{\psi}_j \\ &= \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\mathop{{\int}\!\!\!\!\nearrow}_{\boldsymbol{r}_j}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right)\exp\left(i\frac{q}{\hbar}\mathop{{\int}\!\!\!\!\nearrow}^{\boldsymbol{r}_j}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right)\hat{\psi}_j \\ &\equiv \exp\left(i\frac{q}{\hbar}\mathop{{\int}\!\!\!\!\nearrow}_{\boldsymbol{r}_j}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right)\psi_j \end{aligned}$$

とすると

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_j\psi_j\exp\left(i\frac{q}{\hbar}\mathop{{\int}\!\!\!\!\nearrow}_{\boldsymbol{r}_j}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right)N_j(\boldsymbol{r}) \tag{16}$$

と表せる。ここで，位相因子内の積分は点 $\boldsymbol{r}_j$ から $\boldsymbol{r}$ まで直線経路で積分するものとする。

この波動関数にベクトルポテンシャルを含む群速度演算子を演算すると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)\psi(\boldsymbol{r}) \\ =\ &\frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)\sum_j\psi_j\exp\left(i\frac{q}{\hbar}\mathop{{\int}\!\!\!\!\nearrow}_{\boldsymbol{r}_j}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right)N_j(\boldsymbol{r}) \\ =\ &\sum_j\psi_j\exp\left(i\frac{q}{\hbar}\mathop{{\int}\!\!\!\!\nearrow}_{\boldsymbol{r}_j}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\right)\frac{\boldsymbol{p}}{m}N_j(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{17}$$

を得る。したがって，一様磁場の場合と同様に，本問題においても式 (3), (5) が成り立つことが証明される。

ただし，節点もしくは有限要素内に磁束を含む場合には位相因子の評価には注意が必要になる。位相因子の位相を与えるベクトルポテンシャルの線積分を実行する場合，磁束の位置ではベクトルポテンシャルが特異性を持つため，線積分経路上にベクトルポテンシャルがあるとき，それを回避する必要がある。簡便な対処法は，有限要素に離散化する場合，磁束が通っている点を除いて離散化し，その領域を無限に小さくすることである。

このように，定義された行列 K, M を用いると，変分により連立方程式

$$(\mathsf{K}-\mathsf{M})\,\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{Q} \tag{18}$$

を得る。ここで，$\boldsymbol{\psi}$ を各節点の波動関数 ψ_i を第 i 成分とする列ベクトルとして定義した。ベクトル $\boldsymbol{Q}$ は以下のように定義される。

$$Q_j = \sum_k q(\boldsymbol{r}_k)\int_{\mathrm{S_N}}N_jN_kdS \tag{19}$$

また，$\int_{S_N}$ は境界上で波動関数の法線方向微分の値が与えられた部分の面積積分であり，$q(\boldsymbol{r})$ は境界上で与えられた境界面外向き法線方向微分の値である。

4. 数値計算例

式 (3), (5) を用いた計算例として，Fig.2 に示す x 方向に幅 d，y 方向に高さ $2d$ の長方形領域の左右にそれぞれ幅 d のエミッタ $(x < -d)$ とコレクタ $(x > d)$ を取り付けた十字構造を考える。要素数 9600，未知変数 4563 に分割する。磁束は原点

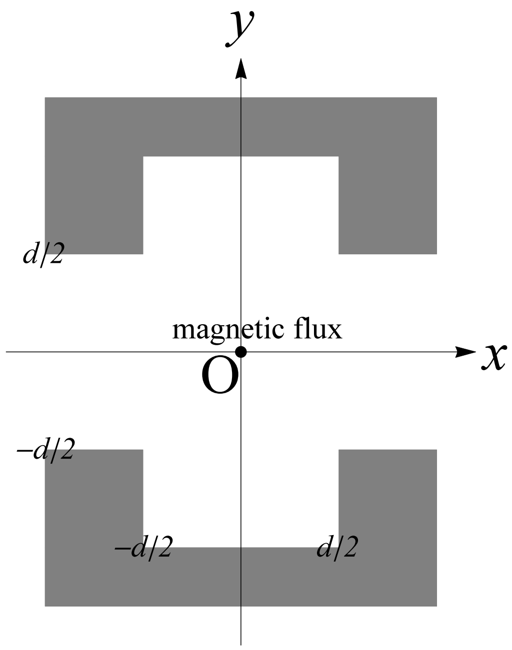

Fig. 2 The geometry of a cross-shaped conductor.

を貫いている。磁束を磁束量子でスケールし，$\Phi/(h/q) \equiv 2\pi\alpha$ のように磁束の無次元パラメータ α を導入する。

エミッタの波動関数は

$$\begin{aligned}\psi(x,y) &= e^{i\Lambda(x,y)}\left\{e^{ik_n x}\sin\left(\frac{n\pi}{d}\left(y+\frac{d}{2}\right)\right)\right.\\ &+ \left.\sum_l r_l e^{-ik_l x}\sin\left(\frac{l\pi}{d}\left(y+\frac{d}{2}\right)\right)\right\}, \quad (20)\end{aligned}$$

コレクタの波動関数は

$$\psi(x,y) = e^{i\Lambda(x,y)}\left\{\sum_l t_l e^{ik_l x}\sin\left(\frac{l\pi}{d}\left(y+\frac{d}{2}\right)\right)\right\} \quad (21)$$

と展開する。ここで，k_n は $k_n \equiv \sqrt{K^2-(n\pi/d)^2}$ と定義される x 軸方向の波数である。また，$e^{i\Lambda(x,y)}$ はゲージ変換による因子である。位相が Fig.1 のようになるように

$$\Lambda(x,y) \equiv \begin{cases} \alpha\tan^{-1}\frac{x}{y} & y<0 \\ \alpha\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}+\pi\right) & y>0 \end{cases} \quad (22)$$

ととっている。開口部以外の閉じ込め壁においては波動関数 $\psi(\boldsymbol{r}) = 0$ とする。

このとき，透過率 T，反射率 R はそれぞれ

$$T = \sum_{l=1}^{n_p}\frac{k_l}{k_n}|t_l|^2 \quad (23)$$

$$R = \sum_{l=1}^{n_p}\frac{k_l}{k_n}|r_l|^2 \quad (24)$$

と与えられる。ここで，n_p は導波路内での伝導モードの数である。

電子の波数は $Kd = 15$，入射波のエミッタ内での横モードは基本モードであるとする。磁束を $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変化させたときの確率密度 $|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ を Fig.3 に示す。

(a)

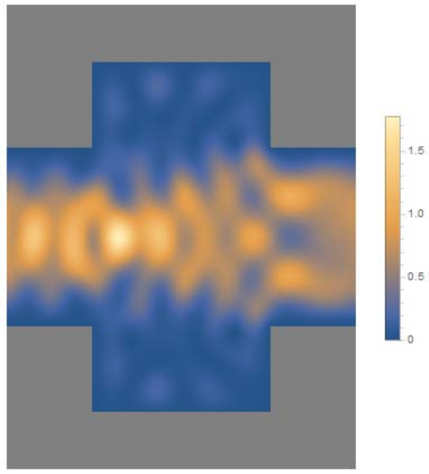

Fig. 3 Variation of the electron probability density due to the magnetic flux. (a) $\alpha = 0.0$

磁束により散乱され電子の流れが二手に分断されている様子が見てとれる。磁束の値に対して周期的に変化する様子が分かる。この周期性を確認するために，Fig.4 に透過率の磁束依存性を示す。この場合，全体に透過率が高いが，その透過率は AB 振動を起こしていることが確認できる。また，本手法の計算精度確認するために，ユニタリティ（確率保存則）の磁束依存性を示す。Fig.5 は透過率と反射率の和の 1 からのずれの磁束依存性である。透過率同様周期変化しているが，透過率が 0 磁場の場合の値から最も差が大きくなる $\alpha = 0.5$ の場合に最も差の絶対値が大きくなっているわけではない。また，誤差の絶対値の最大値でも 0.6%未満であり，十分な計算精度が実現されていると言える。

5. 結言

本研究ではフィラメント状磁束（ファイバーバンドル）による位相異常がある系での電子波の高精度数値解法を実現すべく，局所ゲージ有限要素法の適用可能性を検討し，そのままの形で適用可能であることを見出した。数値解析例として十字型にふくらみを持った導波路の中心に磁束を通した場合の伝導特性を調べた。透過率は磁束に対して周期（AB）振動し，ユニタリティの誤差は最大でも 0.6%未満であることを確認した。

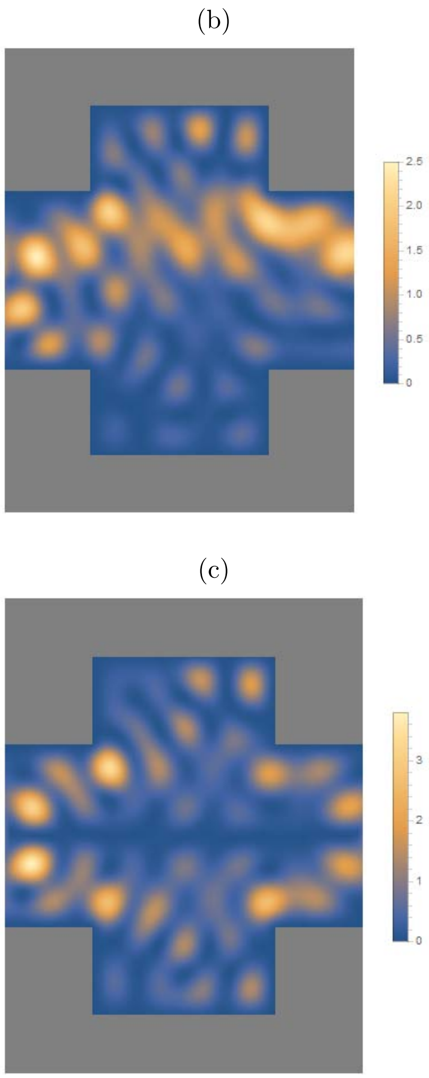

Fig. 3　Variation of the electron probability density due to the magnetic flux. (b) $\alpha = 0.25$, (c) $\alpha = 0.5$

しかし，この問題を数値解析するときには以下の 3 点に注意が必要である。式 (1) で与えられるベクトルポテンシャルを用いる場合，ゲージ変換の位相は解析的に積分でき，パイエルス位相は

$$\frac{q\Phi}{\hbar}\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\alpha}{2\pi}\left(\tan^{-1}(y/x) - \tan^{-1}(y_0/x_0)\right)$$

と与えられる。$\tan^{-1}(y/x)$ は座標 (x, y) の偏角を 2π で割ったもので，原点では不定になってしまうため，フィラメント近傍の有限要素ではフィラメントを有限要素内にずらすなどの対策が必要となる。同様に，位相の飛びが生じる切断線が節点上に来ないように，すなわち，切断線に沿った有限要素が位相の飛びを含むようにする。また，数値計算に用いる処理系の $\tan^{-1}(y/x)$ の変域にも注意が必要である。位相部分を解析的表現を用いて組み込み関数で評価した場合と位相の線積分を数値計算した場合では結果が異なることがあるので注意が必要である。

第 2 種の超伝導体は 2 つの臨界磁場 H_{c1} と H_{c2} の間の強度の磁場中では，磁束を内包して超電導状態が保たれる。こ

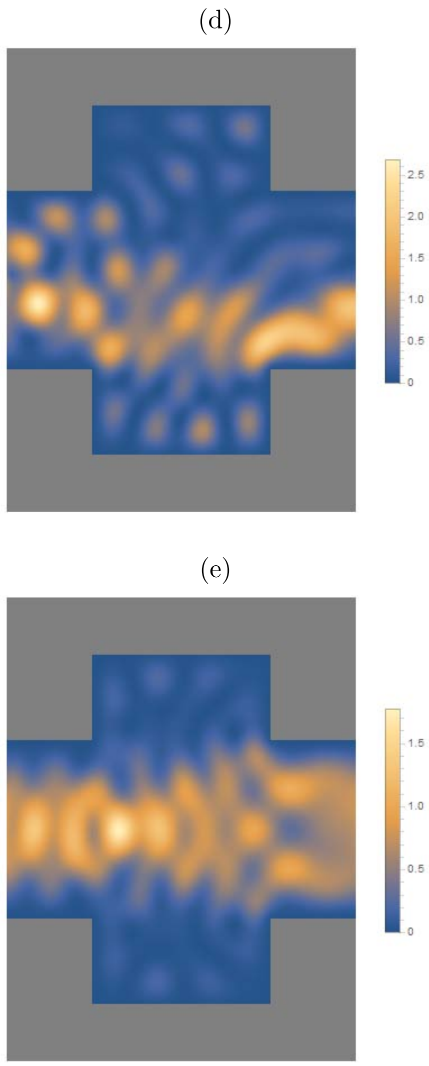

Fig. 3　Variation of the electron probability density due to the magnetic flux. (d) $\alpha = 0.75$, (e) $\alpha = 1.0$

の状態では複数の磁束が存在する中をクーパー対が流れている。今後，本手法が複数の磁束がある場合に拡張され，第 2 種の超伝導体中の量子伝導解析に応用されることが期待される。また，複数の転位を包含した半導体中での電子伝導への発展も期待される。

参考文献

(1) Y. Aharonov and D. Bohm : Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory, Phys. Rev., **115** (1959), pp. 485–491.

(2) 大貫義郎： アハロノフボーム効果, 物理学最前線 9, 大槻義彦編, 共立出版, (1985), pp. 3–64.

(3) Akira Tonomura, Tsuyoshi Matsuda, Ryo Suzuki, Akira Fukuhara, Nobuyuki Osakabe, Hiroshi Umezaki, Junji Endo, Kohsei Shinagawa, Yutaka Sugita, and Hideo Fujiwara : Observation of Aharonov-Bohm Effect by Electron Holography, Phys. Rev. Lett., **48**, (1982), pp. 1443–1446.

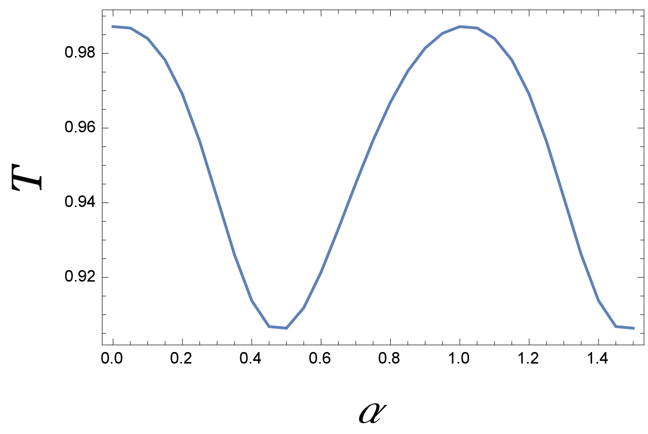

Fig. 4 Magnetic flux dependence of the transmittance.

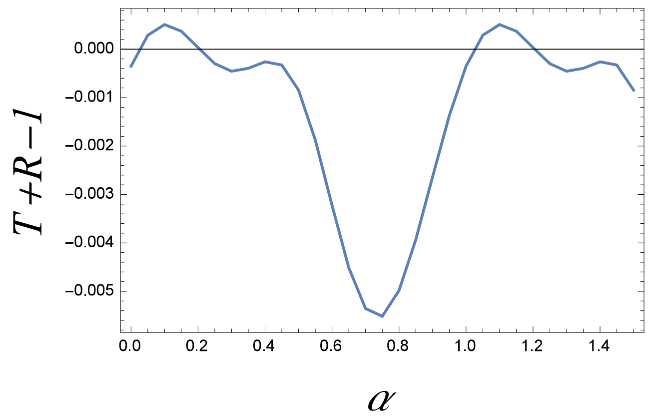

Fig. 5 Magnetic flux dependence of error $T + R - 1$.

(4) Kiyoshi Kawamura : A New Theory of Electrons Due to Spiral Dislocations, Zeitschrift f ü r Physik B, **29** (1978), pp. 101–106.

(5) Yoichi Irie and Kiyoshi Kawamura : Solution of an Extended Aharonov-Bohm Problem in a Theory of Dislocation Scattering, Progress of Theoretical Physics, **70** (1983), pp. 674–686.

(6) 北原和夫： 転位空間における電子の運動 - 経路積分の方法 - , 数理科学, **231** (1982), pp. 22–27.

(7) 川村 清： 空間のトポロジカルな異常性と波動, 数理科学, **231** (1982), pp. 28–36.

(8) 増田俊平, 中村勝弘： 解放系量子ドットの量子輸送:ドットの幾何学的対称性と AB 振動, 日本物理学会講演概要集, **60**, 第 1 号, 第 4 分冊 (2005), p. 645, 25aZC-8.

(9) Tsuyoshi Ueta : Boundary Element Method for Electron Waves in Uniform Magnetic Fields, Engineering Analysis with Boundary Elements, **17** (1996), pp. 69–74.

(10) 植田毅： アハロノフーボーム系の境界要素法 -グリーン関数の計算-, 計算数理工学論文集, **5** (2005), 05-062408.

(11) Kiyoshi Kawamura, Yasunari Zempo and Yoichi Irie : The Solution of the Aharonov-Bohm Equation, Progress of Theoretical Physics, **67** (1982), pp. 1263–1277.

(12) 松嶋和宏： Aharonov-Bohm 磁束・螺旋転位のある場合の境界要素法, 千葉大学大学院自然科学研究科 修士論文, 2005 年.

(13) 植田 毅, 宮川 悠： 局所ゲージ変換を用いた磁場中電子の新たな有限要素法, 計算数理工学論文集, **10** (2010), 03-101210.

(14) Tsuyoshi Ueta and Yuu Miyagawa : Local-gauge finite-element method for electron waves in magnetic fields, Phys, Rev. E, **86** (2012), 026707.

(15) R. E. Peierls : Zur Theorie des Diamagnetismus von Leitungselektronen, Z. Phys., **80** (1933), pp. 763–791.

(16) E. Brown: Bloch Electrons in a Uniform Magnetic Field, Phys. Rev., **133** (1964), pp. A1038–A1044.

(17) C. H. Oh, C. P. Soo and C. H. Lai: The propagator in the generalized Aharonov-Bohm effect, J. Math. Phys., **29** (1988), pp. 1154–1157.

(18) L. S. Schulman : Techniques and Applications of Path Integration, (Wiley, New York, 1981).