計算数理工学論文集 Vol. 16 (2016 年 12 月)，論文 No. 23-161202 JASCOME

多重極法に基づく高速直接境界要素法を用いた 2次元音場のトポロジー最適化について

A TOPOLOGY OPTIMISATION IN 2D ACOUSTICS WITH A DIRECT BOUNDARY ELEMENT METHOD BASED ON THE FAST MULTIPOLE METHOD

杉原　宗一郎 [1)]，飯盛　浩司 [2)]，高橋　徹 [3)]，松本　敏郎 [4)]

Soichiro SUGIHARA, Hiroshi ISAKARI, Toru TAKAHASHI and Toshiro MATSUMOTO

1) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464-8603　名古屋市千種区不老町，　E-mail: s_sugihara@nuem.nagoya-u.ac.jp)
2) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464-8603　名古屋市千種区不老町，　E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.ac.jp)
3) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464-8603　名古屋市千種区不老町，　E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)
4) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464-8603　名古屋市千種区不老町，　E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

Topology optimisation is now widely extended to various engineering fields. We have been investigating a topology optimisation for wave problems with the level set method and the boundary element method (BEM). In the topology optimisation, it is not efficient to use a naive BEM since its computational complexity is at best $\mathcal{O}(N^2)$ where N is the degrees of freedom. As one of the most accepted acceleration techniques, the fast multipole boundary element method (FMBEM) in which the matrix-vector products in iterative solvers are carried out by the fast multipole method (FMM) is often used. It is, however, preferable to use a fast direct solver for topology optimisation since the sensitivity analysis is often reduced to solve two algebraic equations with the same coefficient matrix. In this study, we utilise a direct-solver-based FMBEM, in which the coefficient matrix A is further compressed with an algebraic manner.

Key Words: Fast direct solver, Fast multipole method, Topology optimisation, Level set method, Boundary element method, Impedance boundary condition, Topological derivative, Design method for scattering problems

1. 緒言

著者らの研究グループでは, 無限領域で定義される波動問題に支配される場におけるレベルセット法と (高速) 境界要素法を用いたトポロジー最適化手法の開発を行ってきた [1, 2, 3, 4, 5]. 境界要素法では対象物の境界のみをメッシュ分割すれば良く, さらに, 境界要素法で得られる数値解は無限遠での放射条件を自動的に満たす. しかし, 境界要素法では, 対象とする偏微分方程式の境界値問題と等価な境界積分方程式の離散版である代数方程式 $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列 A は密行列となる. そのため, 代数方程式の求解に直接解法, 反復解法を用いた場合の素朴な境界要素法の計算コストは, N を要素数とするとそれぞれ $\mathcal{O}\left(N^3\right)$, $\mathcal{O}\left(N^2\right)$ となり, 要素数の大きな問題に対する計算時間は膨大である. この問題を克服するため, 高速多重極法 [6, 7] が広く利用されている. 高速多重極法とは, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して行列ベクトル積 $\mathsf{A}\boldsymbol{x}$ を $\mathcal{O}(N)$ 程度で計算する手法である. そのため, 境界要素法の加速法として高速多重極法を用いる場合には代数方程式の反復解法と組み合わせることが一般的である. 一方で, 近年は境界要素法と代数方程式の直接解法を組み合わせた高速解法 (高速直接解法)[8, 9] の開発も積極的に行われている. 直接解法を用いることのメリットとして以下が挙げられる.

- 代数方程式 $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ が異なる複数の問題を解く場合に, 反復解法ではこれらを別の問題として解かなければならないのに対して, 直接解法では一旦係数行列 A の LU 分解を得れば, 同じ下三角行列 L と上三角行列 U を用いて代数方程式を効率的に解くことができる.
- 反復解法では, 反復回数が係数行列 A の条件数に依存することに起因して計算時間が不明瞭であるのに対し,

2016 年 9 月 30 日受付，2016 年 11 月 6 日受理

直接解法では計算時間を行列 A のサイズの情報のみで推定できる.

特に, 随伴変数法に基づく (トポロジー) 感度解析における順問題と随伴問題を離散化して得られる代数方程式 $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は, 多くの場合にその係数行列 A は共通なため, 直接解法の利用が適していると考えられる. そこで, 本論文では高速直接解法を用いたトポロジー最適化を実装し, その効率について論ずる. 前述のとおり, 現在, 高速直接解法にはいくつかの選択肢があるが, ここでは高速多重極法と代数方程式の直接解法を組み合わせた解法 [10] を利用する.

2. レベルセット法に基づくトポロジー最適化

2.1. 2 次元音場におけるトポロジー導関数

本節では, 2 次元音場における最適化問題の定式化を行う. 境界 Γ を有する散乱体 Ω_2 が存在する 2 次元領域 $\mathbb{R}^2$ に入射音波 u^{in} を入射した際の音波の伝播問題を考える. 領域 $\Omega_1 := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_2}$ において, 音圧 u は次の 2 次元 Helmholtz 方程式に支配される.

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{x}) + k^2 u(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \tag{1}$$

ここに, k は波数であり, 波速 c と角周波数 ω から $k = \omega/c$ と与えられる. また, 境界 Γ において, インピーダンス境界条件を課す. インピーダンス境界条件は, 物体固有の定数である音響インピーダンス z を用いて次式で表される.

$$q(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{i\rho\omega}{z} u(\boldsymbol{x}) \qquad \text{on } \Gamma \tag{2}$$

ここに, $\boldsymbol{n}$ は境界 Γ における領域 Ω_2 方向の単位法線ベクトル, ρ は Ω_1 を満たす媒質の密度である. さらに, 無限遠において Sommerfeld の放射条件を課す.

ここで, 目的関数 J を次式のように定義する.

$$J = \sum_{m=1}^{M} f(u(\boldsymbol{x}_m^{\mathrm{obj}})) \tag{3}$$

ここに, $\boldsymbol{x}_m^{\mathrm{obj}}$ は m 番目の観測点の座標, M は観測点の総数を表す. また, u は上記の境界値問題 (順問題), すなわち式 (1), (2) 及び放射条件に現れる関数である.

式 (3) で表される目的関数 J のトポロジー導関数 $\mathcal{T}$ は, 領域 Ω_1 に微小円形散乱体 Ω_ε が発生した際の目的関数 J の変化の割合を表す関数であり, 次式で計算される [3, 4, 11].

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \Re\left[\frac{i\rho\omega}{z} u(\boldsymbol{x})\lambda(\boldsymbol{x})\right] \tag{4}$$

ここに, λ は随伴変数であり, 以下の境界値問題 (随伴問題) の解である.

$$\nabla^2 \lambda(\boldsymbol{x}) + k^2 \lambda(\boldsymbol{x}) + \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_m^{\mathrm{obj}})}{\partial u} \delta\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_m^{\mathrm{obj}}\right) = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \tag{5}$$

$$\mu(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{i\rho\omega}{z}\lambda(\boldsymbol{x}) \quad \text{on } \Gamma \tag{6}$$

ここで, 随伴問題に対しても, 無限遠において Sommerfeld の放射条件を課す. なお, インピーダンス境界条件では領域 Ω_2 内部の音場の様子を観測することはできないため, 本研究では領域 Ω_2 内部におけるトポロジーの変化は考慮しない.

2.2. レベルセット法

本節では, 散乱体の形状表現に用いるレベルセット法について述べる. レベルセット関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ を用いて領域および境界を次のように表現する.

$$0 < \phi(\boldsymbol{x}) \le 1 \qquad \text{in} \qquad \Omega_1 \cup D \tag{7}$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{on} \qquad \Gamma \tag{8}$$

$$-1 \le \phi(\boldsymbol{x}) < 0 \qquad \text{in} \qquad \Omega_2 \tag{9}$$

ここで, 開領域 Ω_1 において, 有限の固定設計領域 $D \subset \Omega_1$ を設け, 目的関数 J を最小とする固定設計領域内のレベルセット関数の分布, すなわち, 散乱体 Ω_2 の分布を求める.

式 (10) を用いて, レベルセット関数 ϕ の分布を時間発展させることにより, 目的関数 J を最小化する ϕ の分布を決定する [12].

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{x})}{\partial t} = k\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) + \tau\nabla^2\phi(\boldsymbol{x}) \quad \text{in } D \tag{10}$$

ここに, k は適当な正の定数, t は仮想時刻, τ は形状の複雑さを規定するパラメータ (定数) である [12]. また, ∂D における ϕ に対する境界条件として本研究では以下の Dirichlet 境界条件を課すことで, 散乱体の存在する領域を D に制限する.

$$\phi(\boldsymbol{x}) = c \quad \text{on } \partial D \tag{11}$$

ここに, c は適当な正の定数である.

本研究では, 最初に与えた形状に対してトポロジー導関数の分布を調べ, 式 (10) を用いてレベルセット関数を更新し, 更新後の散乱体形状に対し再びトポロジー導関数の分布を調べ, さらにレベルセット関数の更新を行うといった手順を繰り返し行うことで, 最終的に得られる形状を最適形状とする. トポロジー導関数の評価においては, 式 (4) の右辺に現れる順問題及び随伴問題の解 $(u(\boldsymbol{x}), \lambda(\boldsymbol{x}))$ を求める必要がある. 本研究ではこれらの評価に高速多重極法に基づく直接境界要素法を用いる. 次章では高速多重極法に基づく直接境界要素法の定式化について述べる.

3. 高速直接解法

3.1. 高速多重極法

本節では, 2 次元音場における境界値問題 (順問題) に対する高速多重極法の諸式を示す. ここでは順問題の解法についてのみ述べる.

観測点を $\boldsymbol{x}$, ソース点を $\boldsymbol{y}$ とし, 式 (1), (2) 及び放射条件で定義される境界値問題を, それと等価な積分方程式に変換すると以下の式を得る.

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{x}) + \int_\Gamma \left(\frac{\partial G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})} - \frac{i\rho\omega}{z}G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right) u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\Gamma = u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}) \text{ on } \Gamma \tag{12}$$

ここに, $G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は 2 次元 Helmholtz 方程式の基本解であり, 次式で定義される.

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) \tag{13}$$

ここに, $H_0^{(1)}$ は 0 次の第一種 Hankel 関数である. 式 (12) を適当に離散化することで, 代数方程式 $\mathsf{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}$ を得る. ここに, $\boldsymbol{u}$ は $u(\boldsymbol{y})$ を離散化して得られる未知のベクトルである. 高速多重極法 [6, 7] は, 式 (12) の左辺に現れる積分を $\mathcal{O}(N)$ 程度で評価する算法である (N は要素数).

以下, 直接解法の説明のため, 高速多重極法の諸式を示す. 式 (12) において, 遠方からの寄与のみを考えた次式を定義する.

$$\phi(\boldsymbol{x}) := \int_{\Gamma_{\rm far}} \left(\frac{\partial G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})} - \frac{i\rho\omega}{z} G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \right) u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\Gamma \tag{14}$$

ここに, $\Gamma_{\rm far}$ は Γ の部分領域であり, $\boldsymbol{x}\notin\Gamma_{\rm far}$ とする. ここで, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}|<|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|$ かつ $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Y}|<|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|$ を満たす 2 点 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ を用いて, 式 (14) は次式のように書き表される (多重極展開).

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{i}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k\left(\overrightarrow{Xx}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} O_{-k-m}\left(\overrightarrow{YX}\right) \times M_m(\boldsymbol{Y}) \tag{15}$$

ここに, $M_m(\boldsymbol{Y})$ は多重極モーメントと呼ばれ, 次式で定義される.

$$M_m(\boldsymbol{Y}) = (-1)^m \int_{\Gamma_{\sf far}} \left(\frac{\partial I_m\left(\overrightarrow{Yy}\right)}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})} - \frac{i\rho\omega}{z} I_m\left(\overrightarrow{Yy}\right) \right) u(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma \tag{16}$$

また, 関数 I_n, O_n は 2 次元 Helmholtz 方程式の解であり, それぞれ以下のように定義される.

$$I_n(\boldsymbol{r}) = i^n J_n(kr)\, e^{in\theta} \tag{17}$$

$$O_n(\boldsymbol{r}) = i^n H_n^{(1)}(kr)\, e^{in\theta} \tag{18}$$

ここに, J_n は n 次の Bessel 関数である. また, (r,θ) は $\boldsymbol{r}$ の極座標表示である. さらに, $\phi(\boldsymbol{x})$ は次式のように書き表せる.

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{i}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k\left(\overrightarrow{Xx}\right) L_{-k}(\boldsymbol{X}) \tag{19}$$

ここに, $L_{-k}(\boldsymbol{X})$ は局所展開係数と呼ばれる次式で定義される関数であり, 式 (19) を局所展開と呼ぶ.

$$L_{-k}(\boldsymbol{X}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} O_{-k-m}\left(\overrightarrow{YX}\right) \times M_m(\boldsymbol{Y}) \tag{20}$$

式 (20) は M2L 変換と呼ばれる.

$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})$ における多重極モーメント (局所展開係数) を $\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{X}')$ に移動する公式は以下のとおりである.

$$M_l(\boldsymbol{Y}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{l-m}\left(\overrightarrow{YY'}\right) \times M_m(\boldsymbol{Y}) \tag{21}$$

$$L_l(\boldsymbol{X}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{l-m}\left(\overrightarrow{XX'}\right) \times L_m(\boldsymbol{X}) \tag{22}$$

ここに, 式 (21) は M2M 変換, 式 (22) は L2L 変換と呼ばれる.

以上より, $\phi(\boldsymbol{x})$ は遠方からの寄与を式 (19) から計算する. なお, 近傍からの寄与は定義通り式 (12) を用いて計算する.

従来の高速多重極境界要素法は本節に示した手法を, 代数方程式の反復解法が要求する行列ベクトル積演算に用いることで, 高速化を実現する. しかし, 本研究では, 本節に示した諸式を行列表示し, 直接解法を用いて解く.

3.2. 高速多重極法に基づく直接境界要素法

本節では, 直接解法のための行列表示の方法を説明するために, 高速多重極法の木構造について述べた後, 1 次元領域を例にとり行列表示の方法を示す.

高速多重極境界要素法では, 対象領域全体を囲む正方形をレベル 0 のセルと呼ぶ. レベル i のセル C を 4 等分してレベル $i+1$ のセル C' を作り, 各セルに含まれる要素数が任意に決められる閾値を下回るまで繰り返し分割を行う. この時, レベル i のセル C に対して, レベル $i+1$ のセル C' のことを子セルと呼び, 逆にレベル $i+1$ のセル C' に対してレベル i のセル C を親セルと呼ぶ. また, 子セルを持たないセルのことをリーフと呼ぶ. また, 対象となるセルからの距離によって, そのまわりのセルを次の 3 つのグループに分類する. 同じレベル i において対象セルと, 頂点あるいは辺を共有するセルを隣接セル, 同じレベル i においては頂点も辺も共有していないが, 各々の親セルがレベル $i-1$ において隣接するセルの集合をインタラクションリスト, 親同士も隣接していないセルを遠方セルと呼ぶ.

以下, 直接解法のための行列表示の方法について 1 次元領域を例にとり解説する. 離散化した 1 次元領域を覆うレベル 0 のセルを繰り返し 2 分割 (2 次元領域の場合は 4 分割であったことに注意) し, レベル 3 において, 全てのセルがリーフになったとする (Fig. 1).

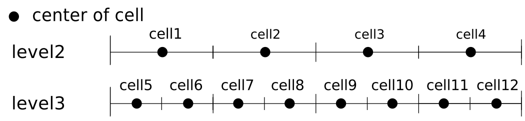


Fig. 1 A conceptual image of 1D domain and its tree structure.

まず, リーフにおいて多重極モーメントを求める. cell$i$ ($i=5,\ \cdots,\ 12$) における多重極展開のオペレータを表す行列を V_i とすると, レベル 3 の cell$i$ の多重極モーメントを要素とするベクトル $\boldsymbol{M}_i(3)$ は式 (16) より, 以下のように表される.

$$\boldsymbol{M}_i(3) = \mathsf{V}_i \boldsymbol{u}_i \tag{23}$$

ここに, $\boldsymbol{u}_i$ は cell$i$ 内にあるソース点のポテンシャルを要素とするベクトルである.

次に, レベル 3 の cell$j$ ($j=5,\ \cdots,\ 12$) における多重極モーメントを M2M 変換を用いてレベル 2 の cell$i$ ($i=1,\ \cdots,\ 4$) における多重極モーメントに変換する. cell$j$ から cell$i$ への M2M 変換のオペレータを表す行列を $\mathsf{S}_{i,j}$ とすると, cell$i$ の多重極モーメントを要素とするベクトル $\boldsymbol{M}_i(2)$ は式 (21) より, 以下のように表される.

$$\boldsymbol{M}_i(2) = \sum_{j\in\mathbf{C}_i} \mathsf{S}_{i,j}\boldsymbol{M}_j(3) \tag{24}$$

ここに, $\mathbf{C}_i$ はセル i の子セルの集合である.

次に, レベル 2 の cell$i$ ($i = 1, \cdots, 4$) における局所展開係数を M2L 変換を用いて cell$i$ のインタラクションリストである cell$j$ ($i = 1, \cdots, 4$) における多重極モーメントから計算する. cell$j$ から cell$i$ への M2L 変換のオペレータを表す行列を $\mathsf{T}_{i,j}$ とすると, cell$i$ の局所展開係数を要素とするベクトル $\boldsymbol{L}_i(2)$ は式 (20) より, 以下のように表される.

$$\boldsymbol{L}_i(2) = \sum_{j \in \mathbf{I}_i} \mathsf{T}_{i,j} \boldsymbol{M}_j(2) \tag{25}$$

ここに, $\mathbf{I}_i$ は cell$i$ のインタラクションリストである. レベル 3 の cell$i$ ($i = 5, \cdots, 12$) における局所展開係数は $\mathbf{P}_i$ からの L2L 変換と $\mathbf{I}_i$ からの M2L 変換から計算する. ここに, $\mathbf{P}_i$ は cell$i$ の親セルの集合である. cell$j \in \mathbf{P}_i$ から cell$i$ への L2L 変換のオペレータを表す行列を $\mathsf{R}_{i,j}$ とするとレベル 3 のセルの局所展開係数を要素とするベクトル $\boldsymbol{L}_i(3)$ は式 (20), (22) から以下のように表される.

$$\boldsymbol{L}_i(3) = \sum_{j \in \mathbf{I}_i} \mathsf{T}_{i,j} \boldsymbol{M}_j(3) + \sum_{j \in \mathbf{P}_i} \mathsf{R}_{i,j} \boldsymbol{L}_j(2) \tag{26}$$

最後に, リーフにおいて局所展開をする. また隣接セルからの影響は直接計算する. cell$i$ における局所展開と cell$j$ から cell$i$ への直接計算のオペレータを表す行列をそれぞれ U_i, $\mathsf{D}_{i,j}$ とすると, これらは式 (12) と式 (19) より, 以下のように表される. ($i = 1, \cdots, 4,\ j = 1, \cdots, 4$)

$$\boldsymbol{b}_i = \sum_{j \in \mathbf{N}_i} \mathsf{D}_{i,j} \boldsymbol{u}_j + \mathsf{U}_i \boldsymbol{L}_i(3) \tag{27}$$

ここに, $\mathbf{N}_i$ は cell$i$ の隣接セルの集合である. 式 (23), (24), (25), (26), (27) を行列表示すると次式のように書き表される.

$$\begin{bmatrix} \mathsf{D}_{i,j} & \mathsf{U}_{12-i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathsf{I} & \mathsf{R}_{12-i+1,4-j+1} & 0 & \mathsf{T}_{12-i+1,j} \\ 0 & 0 & -\mathsf{I} & \mathsf{T}_{4-i+1,j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathsf{I} & \mathsf{S}_{i,j} \\ \mathsf{V}_i & 0 & 0 & 0 & -\mathsf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{L}_{12-i+1}(3) \\ \boldsymbol{L}_{4-i+1}(2) \\ \boldsymbol{M}_i(2) \\ \boldsymbol{M}_i(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

式 (28) を疎行列用直接ソルバにより解くことで $u(\boldsymbol{y})$ を得る. また, 式 (28) はあらかじめ上三角行列に近い形に配置した.

3.3. 直接解法の高速化

本節では, 前節で得た代数方程式 (28) のサイズを圧縮する目的で行った代数的操作について述べる. ここでは, 代数方程式 (28) の係数行列 A' の一部 (M2L, M2M, L2L に相当する部分) を Interpolative Decomposition (ID)[13] により低ランク近似し, 行列の正方性を保ったまま行列のサイズを圧縮することで計算時間を短縮する手法 [10] を利用する. ここで, 係数行列 A' の M2L, M2M, L2L 変換に相当する部分を式 (28) から具体的に書き出すと, 次式のように表される.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccccccc}
\mathsf{R}_{12,4} & & & & & & & & & & & & \mathsf{T}_{12,9} & \mathsf{T}_{12,10} & & \\
\mathsf{R}_{11,4} & & & & & & & & & & & & \mathsf{T}_{11,9} & & & \\
 & \mathsf{R}_{10,3} & & & & & & & & & \mathsf{T}_{10,7} & \mathsf{T}_{10,8} & & & & \mathsf{T}_{10,12} \\
 & \mathsf{R}_{9,3} & & & & & & & & & \mathsf{T}_{9,7} & & & & \mathsf{T}_{9,11} & \mathsf{T}_{9,12} \\
 & & \mathsf{R}_{8,2} & & & & & & \mathsf{T}_{8,5} & \mathsf{T}_{8,6} & & & & \mathsf{T}_{8,10} & & \\
 & & \mathsf{R}_{7,2} & & & & & & \mathsf{T}_{7,5} & & & & \mathsf{T}_{7,9} & \mathsf{T}_{7,10} & & \\
 & & & \mathsf{R}_{6,1} & & & & & & & & \mathsf{T}_{6,8} & & & & \\
 & & & \mathsf{R}_{5,1} & & & & & & & \mathsf{T}_{5,7} & \mathsf{T}_{5,8} & & & & \\
\hline
 & & & & \mathsf{T}_{4,1} & \mathsf{T}_{4,2} & & & & & & & & & & \\
 & & & & \mathsf{T}_{3,1} & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \mathsf{T}_{2,4} & & & & & & & & \\
 & & & & & & \mathsf{T}_{1,3} & \mathsf{T}_{1,4} & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \mathsf{S}_{1,5} & \mathsf{S}_{1,6} & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \mathsf{S}_{2,7} & \mathsf{S}_{2,8} & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \mathsf{S}_{3,9} & \mathsf{S}_{3,10} & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & \mathsf{S}_{4,11} & \mathsf{S}_{4,12}
\end{array}\right] \tag{29}$$

まず, 式 (29) において $\begin{bmatrix} \mathsf{T}_{4,1} \\ \mathsf{T}_{3,1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathsf{T}_{4,2} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \mathsf{T}_{10,12} \\ \mathsf{T}_{9,12} \\ \mathsf{S}_{4,12} \end{bmatrix}$ のそれぞれに対して, ID による低ランク近似を行う. ID とは, 適当な行列 $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n} (m > n)$ のランクが $k < n$ のとき, 式 (30) のように分解できるというものである.

$$\mathsf{A} = \tilde{\mathsf{A}} \mathsf{V}^* \tag{30}$$

ここに, $\tilde{\mathsf{A}} \in \mathbb{C}^{m \times k}$ は A の部分行列, すなわち A の列ベクトルのうちの k 本を取り出し, 適当に並び替えたものである. また $\mathsf{V}^* \in \mathbb{C}^{m \times k}$ は復元行列であり, $k \times k$ の単位行列 (を適当に並び替えたもの) を含み, その要素の絶対値は 1 を超えないという性質を持つ. しかしながら, V^* の絶対値の最大値を 1 以下とする式 (30) の $\tilde{\mathsf{A}}$, V^* を有限の時間で計算するアルゴリズムは存在しない. そこで, ここでは行列の QR 分解を用い, 式 (30) を近似的に満たす $\tilde{\mathsf{A}}$, V^* を計算する.

一般に, 任意の行列 $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n} (m > n)$ のランク k は未知なので, 式 (30) を次式のように書き換える.

$$\mathsf{A} = \tilde{\mathsf{A}} \mathsf{V}^* + \mathsf{E} \tag{31}$$

式 (31) において, $\|\mathsf{E}\|_2 < \varepsilon$ を満たす ε を与えることで, $\tilde{\mathsf{A}}$, V^*, k を求める.

同様に, 行列 $\begin{bmatrix} \mathsf{R}_{12,4} & \tilde{\mathsf{T}}_{12,9} & \tilde{\mathsf{T}}_{12,10} \end{bmatrix}$ 等に ID を作用させることにより, さらに係数行列を圧縮することができる. ここに, $\tilde{\mathsf{T}}_{i,j}$ は $\mathsf{T}_{i,j}$ に ID を作用させた際の部分行列である.

4. 数値実験

本章では, 前節で示した提案手法の性能を評価するために, いくつかの数値実験を行う. 本研究における数値実験には 8 コアの CPU(Intel Xeon E5-2640 2.60GHz), 256GB のメモリをもつワークステーションを使用した.

4.1. 提案手法の妥当性の検証

本節では, 2 次元音響問題の境界値問題に対して, 提案手法の妥当性を検証するために, 理論解を解析的に導出できる単純な問題を取り扱う.

2 次元直交座標系において, 原点を中心とする半径 2.0 の円形散乱体 Ω_2 を配置した. ここに, 境界 Γ は $z = 100$ のインピーダンス境界を有するものとし, $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_2}$ は密度 $\rho = 1.0$ の媒質で満たされているとした. x_1 方向正の向きに進む振幅 1, 角周波数 $\omega = 2.0$, 波速 $c = 1.0$, 波数 $k = \omega/c = 2.0$ の平面波 u^{in} を散乱体 Ω_2 に入射した.

提案手法の妥当性を検証すると同時に, ID の許容誤差に対する提案手法の挙動を評価するために, ID の許容誤差が $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-5},\ 1.0 \times 10^{-4},\ 1.0 \times 10^{-3},\ 1.0 \times 10^{-2},\ 1.0 \times 10^{-1}$ の場合, また, 行列を圧縮しない場合 (uncompressed) において, 要素数 N を 100 から 100,000 まで変化させて, 上記の問題を解いた. そのときの境界上における近似解と理論解の ℓ_2 相対誤差を Fig. 2 にプロットし, その計算時間を Fig. 3 にプロットした.

Fig. 2 から, ID を用いない高速多重極境界要素法の直接解法による正解への収束は $\mathcal{O}(N^{-1})$ であることがわかる. また,

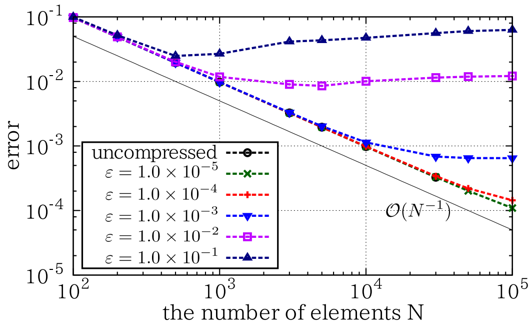


Fig. 2　The computational error of the proposed methods against the theoretical solution.

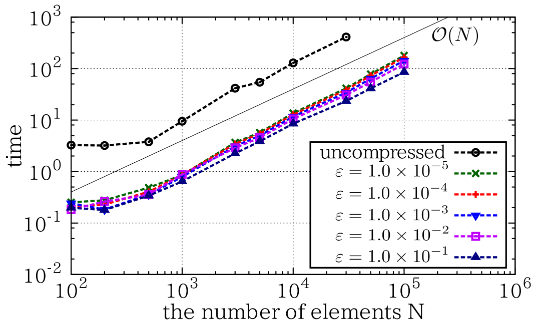


Fig. 3　Computational time for circular scatterer.

ID を用いた提案手法では, 要素数が小さければ, ID を用いない場合と同じ精度で計算でき, 要素数が大きくなれば, あるところで ID による近似誤差が支配的となり, そこからほぼ一定な精度を保つことがわかる. さらに, ID を用いない手法ではメモリ不足で計算できなかった要素数 50,000 以上の問題も ID を用いる手法では計算することができた. 次に計算時間は, Fig. 3 から要素数を大きくとるとほぼ $\mathcal{O}(N)$ であることが確認できる. また ID を用い係数行列を圧縮した場合では, 大幅に計算時間を短縮できていることが確認できた. さらに, ID の許容誤差を大きくとると, 計算時間をより短縮することができた.

4.2.　トポロジー最適化の数値例

本節では, 提案手法のトポロジー最適化に対する性能を評価するために, 観測点における音場強度を最小化する散乱体の構造を求めるトポロジー最適化の数値実験を行う.

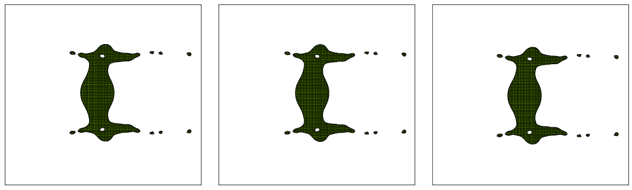
2 次元直交座標系において, x_1 方向正の向きに進む, 振幅 1, 角周波数 $\omega = 150$, 波数 $k = 0.5$, 波速 $c = 300$ の平面波 u^{in} を x_2 軸に垂直に入射する. 固定設計領域 D のサイズは 180×180 とし, 観測点は $(x_1, x_2) = (285, 120), (285, 114), \cdots, (285, 60)$ の 11 点とした. 発生した散乱体の外部の領域を Ω_1, 内部の領域を Ω_2, それらの境界を Γ とし, 境界 Γ は $z = 1.0$ のインピーダンス境界, 領域 Ω_1 を満たす媒質の密度 $\rho = 1.0$ とした. また, 初期形状として, 固定設計領域中央に半径 $r = 15.5$ の円状の散乱体を配置した. 目的関数は観測点における音場強度の総和とした.

以上の条件下で, 最適化ステップの繰り返し回数 (ステップ数) を 20 とし, 次の 3 つの手法を用いてトポロジー最適化を行った際の最適形状と計算時間の差について比較, 検討を行った.

- 代数方程式の反復解法 (前処理なしの GMRES) と高速多重極境界要素法を組み合わせた手法 (previous)
- 代数方程式の直接解法と高速多重極境界要素法を組み合わせた手法 (uncompressed)
- 代数方程式の直接解法と高速多重極境界要素法を組み合わせ係数行列を圧縮した手法 (proposed)

ここでは, ID の許容誤差を $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-5}$, GMRES の許容誤差を 1.0×10^{-10}, また形状の複雑さを規定するパラメータを $\tau = 5.0 \times 10^{-3}$ とした.

まず, 最適形状はそれぞれの手法において Fig. 4 のようになった. Fig. 4 から最適形状を比較すると, 形状はどれも非常



(a) previous　　(b) uncompressed　　(c) proposed

Fig. 4　Optimal shapes.

によく似ており, 直接解法を用いた場合においても, 高い精度で計算できおり, ID を用いて係数行列を圧縮した場合でも高精度に計算できていることが確認できた. また, それぞれの手法について目的関数値の変動は Fig. 5 のようになった. いずれも同様の形状となっており, 各ステップにおいて提案手法を用いた場合においても妥当な設計解を得たと言える. ここで, Fig. 4 の proposed の形状における固定設計領域周辺

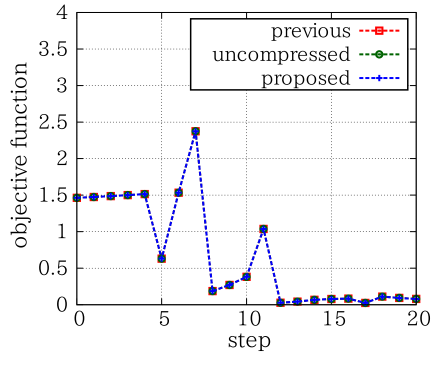


Fig. 5　Objective function.

での音場強度分布を Fig. 6 に示す. Fig. 6 から観測点周辺において音場強度は小さくなっていることが確認できる.

次に, 3 つの手法の計算時間について比較を行う. トポロジー最適化の計算時間の大部分を占める順問題と随伴問題の境界値計算 (代数方程式 $\mathsf{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$ を解く) に要する時間を比較するために, 各ステップにおける境界要素数を横軸にとり, 順問題と随伴問題における境界値計算の計算時間を Fig. 7 に示す. Fig. 7 から, 3 つの手法全てで計算時間は境界要素数 N に対しておよそ $\mathcal{O}(N)$ で計算できていることがわかる. また, 提案手法は従来手法よりも高速に計算できることが確

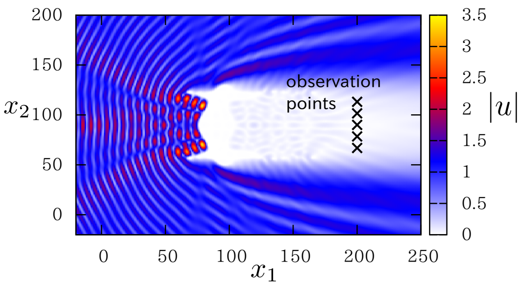


Fig. 6　The sound norm around the observation points.

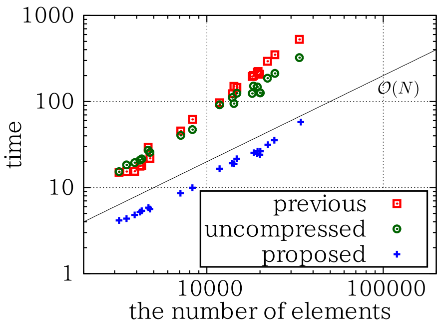


Fig. 7　Computational time for forward and adjoint analyses in each optimisation step.

認できた. この原因として, 従来手法では随伴問題を順問題とは別の問題として解き直しているので, 順問題と同等の計算時間を要することや, 形状が複雑化したり, 係数行列の条件数が大きいことで反復回数が増加していることが考えられる. 最適化全体では, 従来手法では約 3064 秒かかったのに対し, 提案手法で係数行列の圧縮をしない手法では約 2153 秒であり, この問題に対しては, 提案手法において係数行列の圧縮を施さずとも, 従来手法より高速にトポロジー最適化を実行することができた. さらに, 係数行列の圧縮を施した場合では, 最適化全体で約 478 秒と, 従来手法の約 $\frac{1}{6}$ の時間でトポロジー最適化を実行することができた.

5. 結言

本研究では, 2 次元 Helmholtz 方程式の境界値問題に対する高速多重極境界要素法と代数方程式の直接解法を組み合わせた手法を用いたトポロジー最適化手法を開発し, トポロジー最適化に要する計算時間を, 反復解法を用いた従来の高速多重極境界要素法を用いた場合よりも短縮することができる計算例を示した. 今後, 種々の前処理を施した GMRES 等と提案手法の計算時間について比較検討を行う予定である.

参考文献

(1) 阿部史昌, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. レベルセット法と境界要素法を用いた二次元電磁波動問題におけるトポロジー最適化について. 計算数理工学論文集, Vol. 13, pp. 37–42, 2013.

(2) 興梠洋一, 飯盛浩司, 高橋徹, 山田崇恭, 松本敏郎. 3 次元電磁波動問題における境界要素法を用いたトポロジー感度解析とそのレベルセット法に基づく構造最適化への応用について. 計算数理工学論文集, Vol. 13, pp. 55–60, 2013.

(3) H. Isakari, K. Kuriyama, S. Harada, T. Yamada, T. Takahashi, and T. Matsumoto. A topology optimisation for three-dimensional acoustics with the level set method and the fast multipole boundary element method. *Mechanical Engineering Journal*, Vol. 1, No. 4, pp. CM0039–CM0039, 2014.

(4) 近藤豊大, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. 3 次元音響問題におけるレベルセット法と高速多重極境界要素法に基づくインピーダンス境界を有する散乱体のトポロジー最適化. 計算数理工学論文集, Vol. 14, pp. 19–24, 2014.

(5) H. Isakari, K. Nakamoto, T. Kitabayashi, T. Takahashi, and T. Matsumoto. A multi-objective topology optimization for 2D electro-magnetic wave problems with the level set method and BEM. *European Journal of Computational Mechanics*, Vol. 25, No. 1-2, pp. 165–193, 2016.

(6) L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of computational physics*, Vol. 73, No. 2, pp. 325–348, 1987.

(7) V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *Journal of Computational Physics*, Vol. 60, No. 2, pp. 187–207, 1985.

(8) P.G. Martinsson and V. Rokhlin. A fast direct solver for boundary integral equations in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, Vol. 205, No. 1, pp. 1–23, 2005.

(9) M. Bebendorf. *Hierarchical matrices*. Springer, 2008.

(10) T.P. Pals. *Multipole for scattering computations: Spectral discretization, stabilization, fast solvers*. PhD thesis, University of California Santa Barbara, 2004.

(11) A.A. Novotny, R.A. Feijóo, E. Taroco, and C. Padra. Topological sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 7, pp. 803–829, 2003.

(12) T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, and A. Takezawa. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45, pp. 2876–2891, 2010.

(13) E. Liberty, F. Woolfe, P.G. Martinsson, V. Rokhlin, and M. Tygert. Randomized algorithms for the low-rank approximation of matrices. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 104, No. 51, pp. 20167–20172, 2007.