計算数理工学論文集 Vol. 16 (2016 年 12 月), 論文 No. 02-161202 JASCOME

Cyclic densificationモデルに基づくバラスト道床沈下解析における バラスト材のYoung率の空間変動の影響

Influence of spatial variation of Young's modulus of ballast material on ballast settlement analysis based on cyclic densification elastoplastic model

紅露一寛 [1)]，井口建斗 [2)]，阿部和久 [3)]

Kazuhiro KORO, Kento IGUCHI and Kazuhisa ABE

1) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp)
2) 新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)
3) 新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp)

The influence of the spatial variation of Young's modulus of railway ballast on the simulated ballast vertical displacement is investigated through numerical tests using the spectral stochastic FEM with cyclic densification model. The present spectral stochastic elastoplastic FEM is based on Karhunen-Loeve expansion of spatial distribution of Young' modulus, the polynomial chaos expansion of ballast displacement and the bounding body approximation. Through the numerial tests, the coefficients of variation (CV) of simulated ballast displacement is comparable to the CV of Young's modulus.

Key Words: ballast settlement analysis, spatial variation of Young's modulus, spectral stochastic FEM(SSFEM),

1. はじめに

バラスト道床は，鉄道においてまくらぎ下に粒径数センチの砕石粒子を層状に敷設されるもので，衝撃輪重の分散効果や騒音低減，軌道の排水性の高さなどの理由から，国内外の鉄道において幅広く供用されている．しかし，砕石粒子の集合体であるがゆえに，列車の繰り返し走行に伴い，沈下等の軌道狂いが発生する．軌道狂いは乗り心地や安全性に影響を及ぼすため，鉄道事業者はバラスト道床の補整や敷直しなどの軌道の保守管理作業に多くの労力と予算を割いている．

そのような背景から，国内外の鉄道技術者・研究者が，実験によるバラスト道床沈下現象の解明 [1, 2] と，沈下量の定量予測のための数理モデル化に取り組んできた．これまでの数理モデル化では，個別要素法 [3] や不連続変形法 [4] の適用のほか，バラスト道床を弾塑性連続体とみなし，繰り返し荷重作用下での道床沈下量予測が試みられている [5, 6]．特に著者らは，拡張下負荷面モデルの適用 [5] のほか，Suiker らが提案した cyclic densification モデル [6] を用いた道床沈下解析を試みてきた．Cyclic densification モデルは，繰り返し載荷単位回あたりの応力や変形量の増分量を発展則の形で直接記述するモデルであり，応力積分の変数をサイクル数とすることができるため，解析時の計算負荷の劇的な削減可能性がある．そのため著者らは，実物大試験結果の再現性を確認した上で [7]，道床沈下解析と軌道振動解析との連成解析手法を構成し，軌道剛性急変部のバラスト道床沈下解析を試みた [8]．

なお，先述のように，バラスト道床は層厚に対して粒径が小さくないこともあり，その力学応答には何らかの空間的なばらつきが存在し，その度合いは小さくないものと考えられる．バラスト道床の力学応答を連続体モデルで表現した数値シミュレーションにおいては，実測結果とのカーブフィッティング等で連続体モデルの材料物性値を決定するため，力学応答の空間的なばらつきの影響は材料物性値の空間変動として考慮するのが自然である．しかしこれまで，バラスト道床の力学モデルに用いる材料物性値の空間的なばらつきが軌道系各部の力学応答に及ぼす影響を評価した事例はほとんどなく，バラスト道床の Young 率の空間変動が軌道系の振動応答に及ぼす影響を評価した Andersen ら [9] や著者ら [10] の研究はあるが，道床沈下解析結果に及ぼす影響は未検討である．

そこで本研究では，cyclic densification モデルを用いてバラスト道床の沈下解析を行なう場合を対象に，バラスト材の Young 率の空間変動が道床上面鉛直変位の解析結果に及ぼす影響を，スペクトル確率有限要素法 (SSFEM)[11] を用いて評価する．スペクトル確率有限要素法の定式化では，Young 率の空間変動を Karhunen-Loeve 展開で表現した上で，確率空間における離散化の際に polynomial chaos を用いる．なお，

2016 年 9 月 17 日受付，2016 年 10 月 21 日受理

SSFEM を弾塑性問題へ適用するに際しては，定式化の煩雑さや計算負荷の増加を極力回避するために，Anders ら [12] が提案した bounding body 近似に基づく手法を用いる．数値解析例では，まくらぎ 5 本分のバラスト道床区間を対象とした 2 次元平面ひずみ解析により，バラスト材の Young 率の空間変動がバラスト道床上面変位に及ぼす影響を検討する．

2. Cyclic densification モデルに基づくバラスト道床沈下解析法

本研究では，バラスト道床の繰り返し沈下挙動をモデル化するために，cyclic densification モデル [6] を用いる．当該モデルでは，所定の荷重振幅の下での載荷・除荷単位回あたりの応力および内部状態変数の変化量を発展則の形で直接表現し，それをサイクル数 N について積分することで，所定のサイクル数での物理量を評価することができる．そのため，解析においては，無荷重時と最大外力作用時との間の載荷および除荷過程（以下，まとめて単調載荷過程と呼ぶ）と，所定の荷重振幅での外力作用下を対象とした繰り返し載荷過程とに大別し，各々の過程で弾塑性モデルを与える必要がある．

2.1. 単調載荷過程

単調載荷過程では，次式の亜弾性構成則を仮定し，弾性挙動は完全等方性を仮定する．

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}^p_{kl}), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} D_{ijkl} = {} & \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \\ & \cdot \big\{(1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + 2\nu\delta_{ij}\delta_{kl}\big\}, \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，σ_{ij} は応力テンソル，ε_{kl} は微小ひずみテンソル，ε^p_{kl} は塑性ひずみテンソルであり，$\dot{}$ は制御パラメータ t についての物質微分である．δ_{ij} は Kronecker のデルタである．E は Young 率であり，本研究ではその空間変動を考慮する材料物性値である．ν は Poisson 比である．

なお，当該モデルでは本来，弾性係数は圧力依存性を有する形で定義されている [6] が，本研究では弾性挙動に対して最大の支配因子の空間変動がバラスト道床沈下量解析結果に及ぼす影響を評価するために，式 (2) の亜弾性構成関係を線形化した上で，主要な材料物性値である Young 率 E についてその空間変動を考慮することとした．なお，この取り扱いは，次項で示す繰り返し載荷過程においても同様とする．

塑性変形の発現メカニズムとして「摩擦すべり」,「体積圧縮」,「引張破壊」の 3 つを仮定し，降伏条件は次式で与える．

$$f^f(p, q, \kappa^p_0) = -\frac{q}{p - p^t_{num}} - H^f(\kappa^p_0) = 0, \tag{3}$$

$$f^c(p, \varepsilon^c_{vol,0}) = \frac{p}{p_0^{(init)}} - H^c(\varepsilon^p_{vol,c,0}) = 0, \tag{4}$$

$$f^t = p - p^t = 0. \tag{5}$$

なお，$p = \sigma_{mm}/3$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$，$q = \sqrt{3/2}\sqrt{s_{mn}s_{mn}}$ とし，$p_0^{(init)}$，p^t は材料物性値である．p^t_{num} はゼロ応力点が Drucker-Prager cone の頂点と一致することを回避するために導入した定数である．また，κ^p_0，$\varepsilon^p_{vol,c,0}$ は塑性乗数である．

硬化関数 H^f，H^c は次式で与える．

$$H^f(\kappa^p_0) = H_0 + (H_m - H_0)\big\{1 - \exp(-\zeta^f \kappa^p_0)\big\}, \tag{6}$$

$$H^c(\varepsilon^p_{vol,c,0}) = 1 + \zeta^c \varepsilon^p_{vol,c,0}. \tag{7}$$

ここで，H_0，H_m，ζ^f，ζ^c は材料物性値である．

流動則は次式の非関連流動則で与える．

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{\partial g^f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\kappa}^p_0 + \frac{\partial g^c}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\varepsilon}^p_{vol,c,0} + \frac{\partial f^t}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\varepsilon}^p_{vol,t,0} \tag{8}$$

なお，$\varepsilon^p_{vol,t,0}$ は塑性乗数であり，塑性ポテンシャル g^f，g^c は次式で与える．

$$g^f(p, q, \kappa^p_0) = q + d^f(\kappa^p_0)p, \tag{9}$$

$$g^c(p, \varepsilon^p_{vol,c,0}) = -p + H_c(\varepsilon^p_{vol,c,0})p_0^{(init)}, \tag{10}$$

$$d^f(\kappa^p_0) = d_0^{(init)} + (d_m^{(init)} - d_0^{(init)})\big\{1 - \exp(-\zeta^f \kappa^p_0)\big\}, \tag{11}$$

ここで，$d_0^{(init)}$，$d_m^{(init)}$ は材料物性値である．

本研究では，準静的条件下でのつり合い問題を考える．そのため，単調載荷モデルでは，制御パラメータ t について離散化し，$t_{n+1} = t_n + \Delta t$ において満たすべき次の方程式を有限要素法で近似的に解くこととなる．

$$\begin{aligned} \int_V \Delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV = {} & \int_V b_i^{(n+1)}\delta u_i dV \\ & + \int_{S_t} t_i^{(n+1)}\delta u_i dS - \int_V \sigma_{ij}^{(n)}\delta\varepsilon_{ij}dV \end{aligned} \tag{12}$$

なお，V は解析領域，S_t は境界 S 上で表面力が規定される部分境界である．b_i は物体力ベクトル，t_i は表面力ベクトルであり，δu_i は仮想変位，$\delta\varepsilon_{ij}$ は仮想ひずみである．$\Delta\sigma_{ij} = \Delta t \cdot \dot{\sigma}_{ij}$ であり，上添字 (n) は $t = t_n$ での物理量であることを示す．

2.2. 繰り返し載荷過程

一方，繰り返し載荷モデルでは，構成則として制御変数を繰り返しサイクル数 N とした次式を考える．

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dN} = D_{ijkl}\left(\frac{d\varepsilon_{kl}}{dN} - \frac{d\varepsilon^p_{kl}}{dN}\right), \tag{13}$$

塑性変形のメカニズムは，単調載荷の場合と同様に，摩擦すべり，体積圧縮，引張破壊の 3 種類を考慮することとし，塑性ひずみは Perzyna の超過応力モデルと非関連流動則によって規定するものとする．流動則は，

$$\frac{d\varepsilon^p_{ij}}{dN} = \frac{\partial g^f_{cyc}}{\partial \sigma_{ij}}\frac{d\kappa^p}{dN} + \frac{\partial g^c_{cyc}}{\partial \sigma_{ij}}\frac{d\varepsilon^p_{vol,c}}{dN} + \frac{\partial f^t}{\partial \sigma_{ij}}\frac{d\varepsilon^p_{vol,t}}{dN} \tag{14}$$

なお，κ^p，$\varepsilon^p_{vol,c}$，$\varepsilon^p_{vol,t}$ は塑性乗数であり，塑性ポテンシャル g^f_{cyc}，g^c_{cyc} は次式で与える．

$$g^f_{cyc}(p, q, \kappa^p) = q + d^f_{cyc}(\kappa^p)\cdot p, \tag{15}$$

$$g^c_{cyc}(p, \varepsilon^p_{vol,c}) = -p + h_c(\varepsilon^p_{vol,c})\cdot p_0, \tag{16}$$

$$d^f_{cyc}(\kappa^p) = d_0 + (d_m - d_0)\big\{1 - \exp(-\zeta^f(\kappa^p - \kappa^p_0))\big\} \tag{17}$$

ここで，d_0, d_m は材料物性値である．

塑性乗数 κ^p，$\varepsilon^p_{vol,c}$ の発展則は次式で与えられる．

$$\frac{d\kappa^p}{dN} = \alpha^f\left(-\frac{q}{p - p^t_{num}} - h^f_{sh}(\kappa^p)\right)_+^{\gamma^f} \tag{18}$$

$$\dot{\varepsilon}^p_{vol,c}=\alpha^c\left(\frac{p}{p_0}-h^c_{sh}(\varepsilon^p_{vol,c})\right)_+^{\gamma^c} \tag{19}$$

ここで，γ^f，γ^c は材料物性値であり，$(\cdot)_+$ は Macauley bracket である．

なお，硬化関数 $h^f_{sh}(\kappa^p)$，$h^c_{sh}(\varepsilon^p_{vol,c})$ は次式で与えられる．

$$h^f_{sh}(\kappa^p)=h_0+(h_m-h_0)\{1-\exp(-\eta^f(\kappa^p-\kappa^p_0))\} \tag{20}$$

$$h^c_{sh}(\varepsilon^p_{vol,c})=1+\eta^c(\varepsilon^p_{vol,c}-\varepsilon^p_{vol,c,0}) \tag{21}$$

ここで，h_0，h_m，η^f，η^c は材料物性値である．なお，$\varepsilon^p_{vol,t}$ は降伏条件 $f^t=0$ を満たすように定める．

繰り返し載荷過程では，サイクル数 N を制御パラメータとする準静的つり合い問題を考える．N について離散化し，第 $N+\Delta N$ サイクルにおいて満足する次の方程式を有限要素法で近似的に解くこととなる．

$$\begin{aligned}\int_V \Delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV&=\int_V b_i\delta u_i dV\\&+\int_{S_t} t^{(cyc)}_{i(N+\Delta N)}\delta u_i dS-\int_V \sigma_{ij(N)}\delta\varepsilon_{ij}dV\end{aligned} \tag{22}$$

なお，式 (22) では，$\Delta\sigma_{ij}=(d\sigma_{ij}/dN)\cdot\Delta N$ であり，繰り返し載荷過程では物体力ベクトルは一定であるものとする．$t^{(cyc)}_i$ は繰り返し載荷される表面力ベクトルの最大値であり，下添字 (N) は繰り返し載荷第 N サイクルでの物理量であることを示す．

3. バラスト材の Young 率の空間変動の影響を考慮した道床沈下解析法

本研究では，cyclic densification モデルに基づく弾塑性連続体でモデル化したバラスト道床の鉛直変位解析結果における Young 率の空間変動の影響を検討するために，スペクトル確率有限要素法 (SSFEM)[11] を用いて実空間および確率空間での離散化を行なった上で弾塑性有限要素解析を行なう．なお，SSFEM の弾塑性問題への適用にあたっては，Anders らが提案した bounding body 近似に基づく定式化手法 [12] を用いる．

文献 [12] では，解析対象領域 V において，Young 率がそれぞれ $\langle E^{-1}\rangle^{-1}$，$\langle E\rangle$（$\langle E\rangle$: E の期待値）で決定論的に与えられる弾塑性体を bounding body V^+ および V^- と定義し，$V^\pm$ とその境界上で所定の（決定論的に与えられる）境界条件の下で得られる応力解を $\sigma^\pm_{ij}$ とする．この決定論的応力解 $\sigma^\pm_{ij}$ を用いると，Young 率の空間変動を考慮した弾塑性問題におけるひずみエネルギー速度の期待値について上下界が定まることを利用して，有限要素解析の接線剛性方程式を構成・求解するものである．なお，解析手法としての bounding body 近似を用いた SSFEM の定式化の妥当性等の詳細については文献 [12] を参照することとして，以下では SSFEM を用いた弾塑性解析の定式化についてのみ説明する．

まず，式 (2) の弾性係数テンソルは，Young 率 E が空間変動を有するものとして，次式のように表わすことができる．

$$\begin{aligned}D_{ijkl}&=E(\omega)\cdot D^*_{ijkl},\\D^*_{ijkl}&=\frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\\&\quad\cdot\{(1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+2\nu\delta_{ij}\delta_{kl}\},\end{aligned} \tag{23}$$

ここで，ω は確率変数である．

そのため，前節の弾塑性構成モデルにおける接線弾塑性係数 $D^{(ep)}_{ijkl}$ は，D_{ijkl} と同様に次式で表わすことができる．

$$D^{ep}_{ijkl}=E(\omega)\cdot\Lambda_{ijkl}(D^*_{ijkl},\ \boldsymbol{\sigma}(\omega),\ \boldsymbol{q}(\omega)), \tag{24}$$

ここで，$\boldsymbol{q}$ は内部状態変数であり，Λ_{ijkl} は E と乗じること接線弾塑性係数テンソルを構成する 4 階テンソルである．式 (24) では，その材料非線形性ゆえに確率論的変動を有する Young 率 E，応力 $\boldsymbol{\sigma}$ および内部状態変数 $\boldsymbol{q}$ に依存して決まるため，確率空間での近似・離散化が困難であることから，bounding body 近似を導入すると，次式を得る．

$$D^{ep}_{ijkl}=E(\omega)\cdot\Lambda_{ijkl}(D^*_{ijkl},\ \boldsymbol{\sigma}^\pm,\ \boldsymbol{q}^\pm). \tag{25}$$

式 (23), (25) を仮想仕事式 (12) または (22) に適用し，Newton-Raphson 法および有限要素法を適用する．応力積分第 i ステップにおける N-R 反復第 j 回目において解くべき代数方程式は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned}&\left[{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i(E(\omega),\ {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}_i(\omega),\ {}^{j-1}\boldsymbol{q}_i(\omega))\right]\left\{{}^{j}\boldsymbol{\Delta U}_i(\omega)\right\}\\&\qquad=\left\{\boldsymbol{F}^{ext}_i\right\}-\left\{{}^{j-1}\boldsymbol{F}^{int}_i(\omega)\right\}\end{aligned} \tag{26}$$

ここで，$\left\{{}^{j}\boldsymbol{\Delta U}_i(\omega)\right\}$ は節点変位増分ベクトル，$\left\{{}^{j-1}\boldsymbol{F}^{int}_i(\omega)\right\}$ は第 i 荷重ステップ（サイクル）での第 $j-1$ N-R 反復における内力ベクトルである．また，$\left\{\boldsymbol{F}^{ext}\right\}$ は第 i 荷重ステップ（サイクル）における等価節点外力で，決定論的に定まる．

次に，式 (26) 左辺に式 (25) の bounding body 近似を導入する．その結果，接線剛性行列は次式で近似する．

$$\begin{aligned}&\left[{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i(E(\omega),\ {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}_i(\omega),\ {}^{j-1}\boldsymbol{q}_i(\omega))\right]\\&\qquad\approx\left[{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i(E(\omega),\ {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}^\pm_i,\ {}^{j-1}\boldsymbol{q}^\pm_i)\right]\end{aligned} \tag{27}$$

なお，${}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}^\pm_i$，${}^{j-1}\boldsymbol{q}^\pm_i$ は，bounding body $V^\pm$ において評価される第 i 荷重ステップ・第 $j-1$ N-R 反復における応力および内部状態変数で，その増分量は Young 率の空間変動を考慮した元のつり合い系で評価された変位増分の期待値から決定論的に求められる．

式 (27) において，接線弾塑性係数が (25) のように表わせることに留意すると，式 (27) の接線剛性行列は次式のように表わすことができる．

$$\begin{aligned}&\left[{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i(E(\omega),\ {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}_i(\omega),\ {}^{j-1}\boldsymbol{q}_i(\omega))\right]\\&\qquad\approx\left[{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i(E(\omega),\ {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}^\pm_i,\ {}^{j-1}\boldsymbol{q}^\pm_i)\right]\\&=\sum_{e=1}^{N_e}\int_{V_e}E(\omega)[\boldsymbol{B}^T][\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{D}^*,\ {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}^\pm_i,\ {}^{j-1}\boldsymbol{q}^\pm_i)][\boldsymbol{B}]dV\end{aligned} \tag{28}$$

ここで，Young 率 E の空間変動を，次式の Karhunen-Loeve 展開で近似的に表現しておく．

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{x},\omega)&\approx\langle E\rangle\left[1+\alpha(\boldsymbol{x},\omega)\right],\\\alpha(\boldsymbol{x},\omega)&=\sum_{m=1}^{N_k}\xi_m(\omega)\sqrt{\lambda_m}\phi_m(\boldsymbol{x}),\end{aligned} \tag{29}$$

ここで，λ_m，$\phi_m(\boldsymbol{x})$ はそれぞれ，空間変動成分 α の共分散関数 C_α の固有値と固有関数であり，$\xi_m(\omega)$ は標準正規分布に従う確率変数である．

式 (28) に式 (29) を代入すると，式 (26) 左辺の接線剛性行列は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
&\left[\,{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i(E(\omega),\ {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}_i(\omega),\ {}^{j-1}\boldsymbol{q}_i(\omega))\right] \\
&\qquad\approx \left[\,{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i^{(0)}\right] + \sum_{m=1}^{M} \xi_m(\omega)\left[\,{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i^{(m)}\right]
\end{aligned}
\tag{30}
$$

なお，$\left[\,{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i^{(0)}\right]$，$\left[\,{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i^{(m)}\right]$ は次式で定義される．

$$
\begin{aligned}
&\left[\,{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i^{(0)}\right] \\
&\quad = \sum_{e=1}^{N_e}\int_{V_e}\langle E\rangle[\boldsymbol{B}^T][\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{D}^*,\ {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}_i^{\pm},\ {}^{j-1}\boldsymbol{q}_i^{\pm})][\boldsymbol{B}]dV
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\,{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i^{(m)}\right] \\
&= \sum_{e=1}^{N_e}\int_{V_e}\langle E\rangle\sqrt{\lambda_m}\phi_m[\boldsymbol{B}^T][\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{D}^*,\ {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}_i^{\pm},\ {}^{j-1}\boldsymbol{q}_i^{\pm})][\boldsymbol{B}]dV
\end{aligned}
\tag{32}
$$

一方，式 (26) 右辺の内力ベクトルは，その期待値で近似することで，定式化の上では決定論的な量として取り扱う．

$$
\begin{aligned}
\left\{\,{}^{j-1}\boldsymbol{F}_i^{int}(\omega)\right\} &\approx \left\langle\,{}^{j-1}\boldsymbol{F}_i^{int}(\omega)\right\rangle \\
&= \sum_{e=1}^{N_e}\int_{V_e}[\boldsymbol{B}^T]\Big\langle\left\{\,{}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}_i(\omega)\right\}\Big\rangle dV
\end{aligned}
\tag{33}
$$

なお，$\{\,{}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}_i(\omega)\}$ は，その増分 $\{\,{}^{j-1}\boldsymbol{\Delta\sigma}_i(\omega)\}$ を陽的に次式で近似し，それを積分することで評価する．

$$
\begin{aligned}
&\{\,{}^{j-1}\boldsymbol{\Delta\sigma}_i(\omega)\} \\
&\qquad \approx E(\omega)\cdot[\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{D}^*,\ {}^{j-1}\boldsymbol{\sigma}_i,\ {}^{j-1}\boldsymbol{q}_i)]\{{}^{j-1}\boldsymbol{\Delta\varepsilon}_i(\omega)\}, \\
&\{{}^{j-1}\boldsymbol{\Delta\varepsilon}_i(\omega)\} = [\boldsymbol{B}]\{{}^{j-1}\boldsymbol{\Delta U}_i(\omega)\}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

式 (30)，(33) より，式 (26) の接線剛性方程式は次式のように表わすことができる．

$$
\begin{aligned}
&\left[\left[\,{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i^{(0)}\right] + \sum_{m=1}^{M}\xi_m(\omega)\left[\,{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i^{(m)}\right]\right]\left\{\,{}^{j}\boldsymbol{\Delta U}_i(\omega)\right\} \\
&= \left\{\boldsymbol{F}_i^{ext}\right\} - \left\langle\,{}^{j-1}\boldsymbol{F}_i^{int}(\omega)\right\rangle
\end{aligned}
\tag{35}
$$

最後に，節点変位増分 $\left\{\,{}^{j}\boldsymbol{\Delta U}_i\right\}$ を次式で定義される polynomial chaos 展開により表現する．

$$
\left\{{}^{j}\boldsymbol{\Delta U}_i\right\} \approx \sum_{l=0}^{L-1}\left\{{}^{j}\boldsymbol{\Delta U}_i^{(l)}\right\}\Psi_l(\boldsymbol{\xi}(\omega))
\tag{36}
$$

ここで，Ψ_l は正規化された polynomial chaos[11] で，$\langle\Psi_l\Psi_n\rangle = \delta_{ln}$ である．L は展開項数である．

式 (36) を式 (35) に代入し，polynomial chaos $\Psi_l(l = 0, 1, \ldots L-1)$ を重みとした確率空間での Galerkin 法を適用すると，次の連立 1 次方程式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{L-1}\Big[\delta_{ln}\left[\,{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i^{(0)}\right] \\
&\qquad + \sum_{m=1}^{M}\langle\xi_m\Psi_l\Psi_n\rangle\left[\,{}^{j-1}\boldsymbol{K}_i^{(m)}\right]\Big]\left\{{}^{j}\boldsymbol{\Delta U}_i^{(l)}\right\} \\
&\qquad\qquad = \langle\Psi_n\rangle\left\{\boldsymbol{F}_i^{ext}\right\} - \langle\Psi_n\rangle\left\langle\,{}^{j-1}\boldsymbol{F}_i^{int}(\omega)\right\rangle
\end{aligned}
\tag{37}
$$

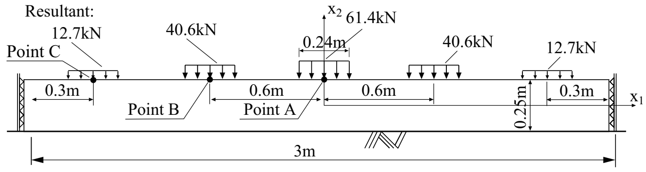


Fig.1 Problem description of ballasted track subjecting to vertical loads.

Table 1 Material parameters for cyclic densification model.

E	88(MPa)	p^t	5(kPa)
ν	0.09	α^f	5.0×10^{-3}
ρ	1.8×10^3(kg/m^3)	γ^f	4.0
p^t_{num}	10(kPa)	α^c	1.0×10^{-3}
$p_0^{(init)}$	-60(kPa)	γ^c	3.0
H_0	1.0	p_0	-50(kPa)
H_m	1.85	h_0	0.70
$d_0^{(init)}$	0.20	h_m	1.85
$d_m^{(init)}$	1.10	η^f	120
ζ^f	80	η^c	2000
ζ^c	250	$d_0(=d_m)$	-0.50

ただし，$n = 0, 1, \ldots, L-1$ である．解析では，各増分ステップにおいて式 (37) を解くこととなる．

4. Young 率の空間変動がバラスト道床上面鉛直変位に及ぼす影響

本研究では，前節で示した解析手法を用いて，バラスト道床上面各まくらぎ位置に生じる鉛直変位量に対するバラスト道床の Young 率の空間変動の影響を検討する．

4.1. 解析条件

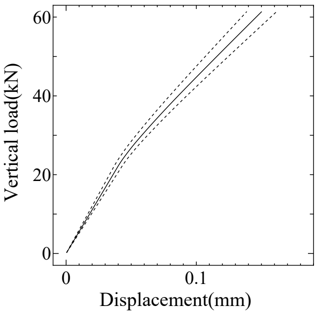
解析では，バラスト道床として Fig.1 に示す解析領域を考える．解析領域は，まくらぎ間隔 0.6m として幅 0.24m のまくらぎ 5 本を配置する領域を設定し，各まくらぎ位置ではまくらぎ幅で等分布に作用する表面力を与えた．各まくらぎ位置での表面力の大きさは，領域中央のまくらぎ直上のレール位置に軌道の設計荷重 170kN の輪重が作用する場合を想定し，車輪・軌道系の載荷解析結果を参考に荷重の分配率を合力 170kN に乗じることで算出した．その結果，領域中央でのまくらぎ位置に作用する表面力の合力は 61.4kN，中央まくらぎから離れるにつれて 40.6kN，12.7kN と低減させて与えている．領域左右端の部分境界では面外変位拘束，領域底部の部分境界では完全変位拘束の各境界条件を設定した．

バラスト材の材料定数は，文献 [6] においてバラスト材の繰り返し三軸試験結果を参考に設定された値を用いることとし，Young 率の期待値はまくらぎ直下で予想される発生応力値を参考に設定した．設定値は Table 1 に示す通りである．

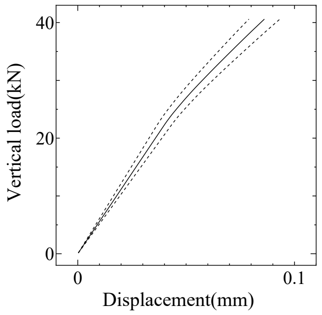
Young 率の空間変動成分の共分散関数 C は，次式で与えた．

$$
C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sigma_E^2\exp\Big[-\frac{|\xi_1 - x_1|}{b_1} - \frac{|\xi_2 - x_2|}{b_2}\Big]
\tag{38}
$$

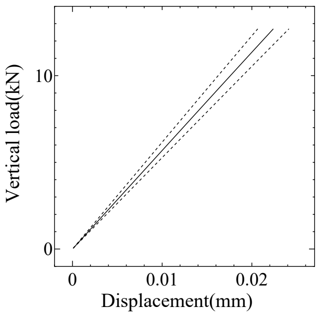
ここで，σ_E は Young 率の標準偏差，b_1，b_2 はそれぞれ x_1 軸，x_2 軸方向の相関長さである．本研究では，σ_E は，既往の研



(i) Point A.



(ii) Point B.



(iii) Point C.

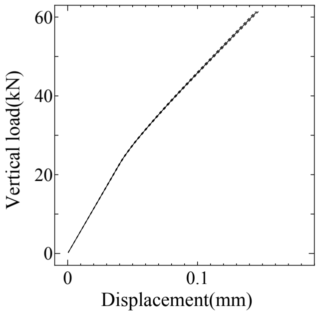
Fig. 2 Vertical displacement and its variation at point A, B and C.($\delta_E = 10\%$, $b = 1$(m), solid: expected value, dotted: expected value $\pm$ standard deviation)

究においてその観測結果がほとんど示されていないこと，前節で示した SSFEM の適用範囲が変動を考慮する入力物性値の 15-20%以下の変動を対象とする場合であることを考慮し，E の変動係数 $\delta_E = \sigma_E / \langle E \rangle$ =1%，10% または 15%にそれぞれ相当する値を与えて解析を行ない，σ_E の設定値が解析結果に及ぼす影響を考慮することとした．一方，相関長さは $b = b_1 = b_2$ =0.2, 1 または 2 (m) に設定して解析を行なった．また，Karhunen-Loeve 展開の項数は $M = 4$，Polynomial chaos は 1 次の項まで考慮して展開項数を $L = 5$ とした．

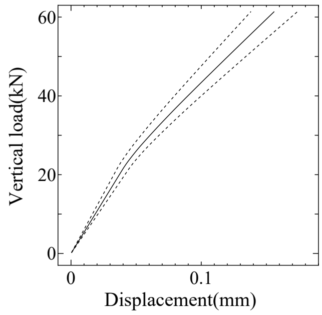
なお，解析にあたっては，接線剛性行列の評価の際に用いる bounding body は，Young 率が $\langle E \rangle$ で与えられる領域 V^- を用いることとし，今回は単調載荷過程における道床上面鉛直変位の変動量について検討することとした．

4.2. 解析結果

まず，各まくらぎ位置でのバラスト道床上面鉛直変位およびその変動量（標準偏差）と当該まくらぎ位置での作用力との関係を Fig.2 に示す．以下，本節で示す各まくらぎ位置での道床上面鉛直変位は，当該まくらぎ幅の区間内に存在する道床上面節点で観測される変位の空間平均で与えている．なお，$\delta_E = 10\%, b = 1$(m) としている．バラスト上面の作用力が最も小さい Point C では，荷重・変位関係が概ね線形で推移するのに対し，Point B, Point A では当該位置の作用力が 30kN 程度以上でバラスト道床内の塑性変形の影響を受けていることが確認できる．なお，いずれの地点でのバラスト道床上面変位の変動量は，相関長さ 1(m) の場合には変位の期待値の 10%程度で概ね推移しており，入力条件である Young 率の変動係数 10%と同程度を示すことが確認できる．

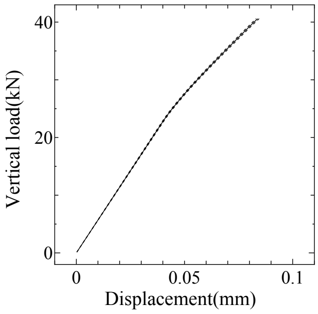


(a) $\delta_E = 1\%$.

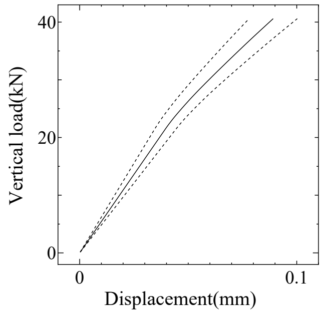


(b) $\delta_E = 15\%$.

(i) Point A.



(a) $\delta_E = 1\%$.



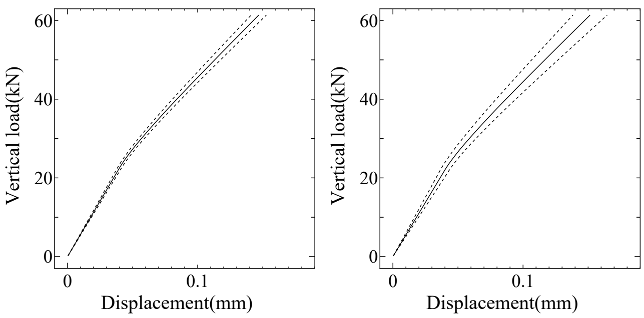
(b) $\delta_E = 15\%$.

(i) Point A.

Fig. 3 Influence of the coefficients of variation δ_E on the vertical displacement and its variation at point A and B.($b = 1$(m), solid: expected value, dotted: expected value $\pm$ standard deviation)

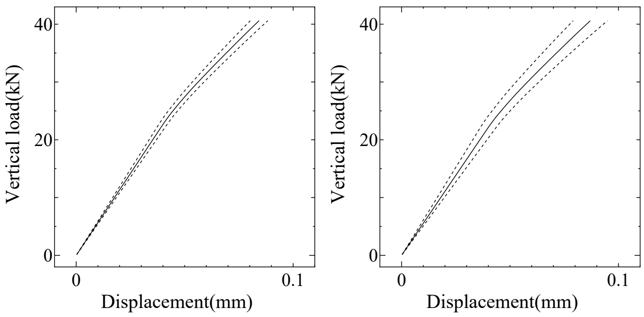
次に，Young 率の変動係数 δ_E がバラスト道床上面変位およびその変動量（標準偏差）に及ぼす影響について検討する．Fig.3 は，$\delta_E = 1\%$ または 15%に設定した場合の Point A でのバラスト道床上面鉛直変位の期待値と標準偏差を示したものである．相関長さは $b = 1$ で一定としている．いずれの場合においても，Young 率の空間変動の影響が伝播して生じるバラスト道床上面変位の変動量（標準偏差）は，Young 率の変動係数とほぼ同等の割合で混入することが確認できる．なお，道床上面鉛直変位の期待値は，変動係数の値が変化すると塑性域でわずかに変化し，Young 率の変動が大きいほど変位の期待値は大きめに評価されることがわかる．

最後に，Young 率の空間変動に関する相関長さがバラスト道床上面変位の変動量（標準偏差）に及ぼす影響について検討する．Fig.4 は，相関長さを $b = 0.2$(m) または 2(m) に設定した場合の Point A でのバラスト道床上面鉛直変位の期待値と標準偏差を示したものである．Young 率の変動係数は $\delta_E = 10\%$で一定としている．相関長さをある程度大きな値に設定すると，前述のようにバラスト道床上面変位の変動量（標準偏差）は上面変位の期待値の 10%程度となり，入力情報の不確実性のソースである Young 率の変動係数と同程度となっている．しかし，相関長さをバラスト道床厚程度である 0.2(m) に設定すると，入力情報に含まれる Young 率の空間変動から道床上面鉛直変位の変動量に伝播する不確実性は相対的に小さくなり，道床上面変位の変動係数に換算して 3%程



(a) $b = 0.2$(m).　　(b) $b = 2$(m).

(i) Point A.



(a) $b = 0.2$(m).　　(b) $b = 2$(m).

(ii) Point B.

Fig.4　Influence of the correlation length of Young modukus on the vertical displacement and its variation at point A and B.($\delta_E = 10\%$, solid: expected value, dotted: expected value $\pm$ standard deviation)

度にとどまることがわかった．ただし，相関長さが小さい場合には，Karhunen-Loeve 展開の高次項の影響が大きくなるため，今回対象とする解析における Karhunen-Loeve 展開の項数設定の影響を検討する必要がある．

5. おわりに

本研究では，cyclic densification モデルを用いてバラスト道床の沈下解析を行なう場合を対象に，バラスト材の Young 率の空間変動が道床沈下解析結果に及ぼす影響を，SSFEM を用いて評価した．数値解析例では，まくらぎ 5 本分のバラスト道床区間を対象とした 2 次元平面ひずみ解析を実施し，バラスト材の Young 率の空間変動がバラスト道床上面鉛直変位に及ぼす影響について検討した．その結果，Young 率の空間変動成分に関する共分散関数の相関長さがある程度の大きさに設定される場合では，弾塑性解析によって得られる道床上面変位の変動係数は Young 率の変動係数と概ね同程度となることがわかった．

なお，Young 率の空間的ばらつきを表現する Karhunen-Loeve 展開，および変位応答の変動を表現する polynomial chaos 展開の項数設定が解析結果に及ぼす影響の検討は十分とは言い難い．Karhunen-Loeve 展開項数は相関長さが小さい場合における沈下変位の変動量に，polynomial chaos 展開項数は変位解の確率分布の表現性能にそれぞれ影響を及ぼすことから，これらの項数設定について今後さらなる検討が必要である．また，今回は単調載荷過程のみの検討にとどまっており，多数回の繰り返し載荷による道床沈下の進展に伴い，本研究で用いた SSFEM の適用が困難となることが懸念される．そのため，まずは今回用いた SSFEM の適用限界を明らかにした上で，必要に応じてモンテカルロ法の適用も検討したい．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 15K06177 の助成を受けたものです．

参考文献

(1) 石川達也，名村明：実物大試験による道床バラスト部繰り返し変形特性の検討．土木学会論文集，No.512/IV-27，pp.47-59，1995.

(2) Suiker,A.S.J., Selig,E.T., Frenkel,R.：Static and Cyclic Triaxial Testing of Ballast and Subballast，*J．Geotech．Geoenviron．Engng*，Vol131，No6，pp.771-782，2005.

(3) Saussine, G., Cholet, C., Gautier, P.E., Dubois, F., Bohatier, C., Moreau, J.J.: Modelling ballast behaviour under dynamic loading. Part 1: A 2D polygonal discrete element method approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.195, pp.2841-2859, 2006.

(4) 石川達也，大西有三，堀池高広：不連続変形法 (DDA) による道床バラスト部繰り返し塑性変形機構の検討．土木学会論文集，No.645/III-50，pp.15-28，2000.

(5) 紅露一寛，阿部和久：有道床バラスト軌道を対象とした繰り返し鉛直・水平載荷試験の弾塑性有限要素解析．第 17 回鉄道技術連合シンポジウム (J-RAIL) 講演論文集，pp.565-568, 2010.

(6) Suiker, A.S.J. & de Borst, R.： A numerical model for the cyclic deterioration of railway tracks. *Int. J. Number. Meth. Engrg*, Vol.57，pp.441-470，2003.

(7) 佐藤江美，紅露一寛，阿部和久：Cyclic densification モデルを用いた有限要素法に基づくバラスト道床沈下解析法の適用可能性に関する検討，土木学会鉄道工学シンポジウム論文集，Vol.17, pp.143-150, 2013.

(8) 相田真人，紅露一寛，阿部和久：まくらぎの浮きを考慮した軌道振動・道床沈下連成解析，土木学会鉄道工学シンポジウム論文集，Vol.19, pp.127-134, 2015.

(9) Andersen, L. & Nielsen, S.R.K.: Vibrations of a track caused by vibration of the foundation stiffness. *Prob. Engrg. Mech.*, Vol.18, pp.171-184, 2003.

(10) 渡邉あゆみ，紅露一寛：バラスト軌道の振動応答に及ぼすバラスト材の弾性係数の空間変動の影響， 土木学会第 19 回応用力学シンポジウム講演概要集，pp.101-102, 2016.

(11) Ghanem, R.G. & Spanos, P.G.: Stochastic finite elements. Dover, 1991.

(12) Anders, M. & Hori, M.: Stochastic finite element method for elasto-plastic body. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.46, pp.1897-1916, 1999.