

2次元波動方程式の斜め入射周期問題における 時間域境界積分方程式法とそのCQMによる解法

A TIME DOMAIN BOUNDARY INTEGRAL EQUATION FOR PERIODIC PROBLEMS FOR
THE WAVE EQUATION IN 2D WITH OBLIQUE INCIDENCE AND ITS SOLUTION WITH CQM

吉見拓也¹⁾, 西村直志²⁾

Takuya YOSHIMI and Naoshi NISHIMURA

- 1) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yoshimi@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
2) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)

This paper presents a time domain boundary integral equation method for spatially periodic problems governed by the wave equation in 2D. A change of variable is introduced to cope with the difficulty associated with the oblique incidence. The resulting time domain boundary integral equation is solved stably with CQM. The proposed approach is validated successfully with a few numerical examples for periodically cracked domains.

Key Words: wave equation, periodic problems, oblique incidence, CQM

1. 序論

周期境界条件下における波動散乱問題を解くことは、フォトニック結晶やメタマテリアル等の応用上重要である。これらは散乱問題に属しているため、その数値解法として境界積分方程式法が優れていると考えられる⁽¹⁾。一般に波動問題の数値計算は周波数域の解法と、時間域の解法に分類されるが、時間域解法としては Finite-Difference Time-Domain method (FDTD 法) が一般的である。しかし、散乱問題に強い境界積分方程式法も有力であり、時間域の境界積分方程式法においても、周期境界条件の取扱いを研究することには意義があると考えられる。特に斜め入射問題の扱いは研究を要する課題である。

元来、周期問題における斜め入射問題の時間域の解法が困難であることは計算手法の別によらず、FDTD 法においても種々の解法が研究されている⁽²⁾。周波数域の解法では斜め入射問題を解くことに特に困難はないが、非線形問題などへの応用を考えると、時間域解法を開発することには意義があると考えられる。この状況は時間域の境界積分方程式法においても同じであり、従来、斜め入射問題においては周期グリーン関数を使った時間域境界積分方程式を離散化して解くことができなかった。そこで、西村⁽³⁾ は 2次元波動方程式のクラック問題について新たな時間変数を導入することによりその問題を解決した。さらに、解の精度と安定性の向上を目指して、Galerkin 法と Rynne and Smith の平均化法⁽⁴⁾

を用いた数値計算が渡辺・西村⁽⁵⁾ により行われた。しかし、安定性については依然として課題を残していた。

そこで、本研究では時間に関する積分を Lubich の Convolution Quadrature Method (CQM)⁽⁶⁾ を用いて計算することを検討した。CQM は畳み込み積分を数値的に計算する手法であり、畳み込みを行う関数のラプラス変換を利用し時間域の境界積分方程式法の離散化を行うことができる。また、形式的には時間域の解法でありながら本質的に周波数域の解法であるので、解の安定性の問題は生じ難い。CQM の境界積分方程式法への応用は多数行われているが、ここでは比較的初期の研究⁽⁷⁾ を引用するに留める。

本論文では、まず CQM を用いた時間域周期クラック問題の解法を示す。次に、一段の周期クラック問題について、CQM を用いた境界積分方程式法による数値解を求める。この問題は漸近解が解析的に求められるので、数値計算結果と解析解を比較して、計算の妥当性や精度を検証する。次にクラックの段数や時間ステップ数を増やして計算を行い、従来法と比較する。なお、本論文で言う従来法とは、渡辺・西村⁽⁵⁾ で提案された Galerkin 法と平均化を用いた時間域の解法のことである。さらに、入射波として点波源を用いた際の数値解を求める。これらの結果を通して、CQM が時間域周期波動問題の解法として有効であることを検証する。

本論文の構成は次の様である。第 2 節では、2次元波動方程式の周期クラック問題の解法と斜め入射を伴う際の定式化を検討し、第 3 節では数値計算法として Lubich の CQM と Galerkin 法について述べる。そして第 4 節では数値計算結

果とその考察、第5節では結論と今後の課題を記す。

2. 問題の定式化

2.1. 周期クラック問題

2次元デカルト座標系 $x_{1,2}$ をとり、領域 $(-\frac{l}{2} < x_1 < \frac{l}{2}) \times (-\infty < x_2 < \infty)$ 内の滑らかな、自分自身と交わらない両端のある曲線 Γ をクラックと呼ぶ。 l は周期長である。簡単のため周期長は $l = 1$ とする。このとき $D = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R} \setminus \Gamma$ とすると、考える問題は次のように定式化される:

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{in } D \times (t \geq 0) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^\pm = - \left(\frac{\partial u_I}{\partial n} \right) \quad \text{on } \Gamma \times (t \geq 0) \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(\frac{1}{2}, x_2, t) = u(-\frac{1}{2}, x_2, t - N_1/c) \\ \nabla u(\frac{1}{2}, x_2, t) = \nabla u(-\frac{1}{2}, x_2, t - N_1/c) \end{cases} \quad (x_2 \in \mathbb{R}, t > 0) \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad \text{in } D \quad (4)$$

$$\phi := u^+ - u^- \quad (5)$$

及び、 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ の時、放射条件を満たす関数 u を求める。ここに、 $u_I(\mathbf{x}, t)$ は入射波、 N は入射波の進行方向の単位ベクトル ($N_1 \geq 0, N_2 > 0$)、 c は波速、上つきの $(+)$ はクラックの単位法線ベクトル n の正 (負) の向きからの極限值、 ϕ は開口変位を表す。この問題の概略図を Fig. 1 に示す。

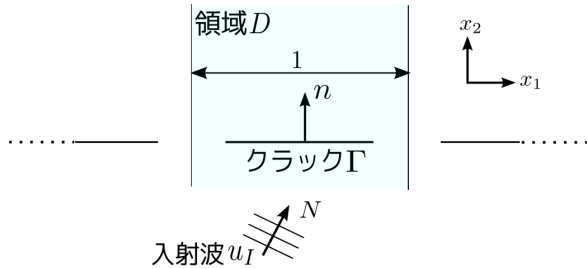


Fig. 1 Periodic crack problem

2.2. 積分方程式

この問題は次の積分方程式に帰着される。

$$-\frac{\partial u_I}{\partial n_x}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma} \int_0^{t+|N_1|/c} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} G^p(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \phi(\mathbf{y}, s) ds d\sigma_y \quad (6)$$

$$G^p(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x} - k\mathbf{e}_1, t - kN_1/c) \quad (7)$$

ここに、 $\frac{\partial}{\partial n_x}, \frac{\partial}{\partial n_y}$ はそれぞれ点 x, y での法線方向の微分、 \mathbf{e}_1 は x_1 軸の正方向を向いた単位ベクトルを表す。 $G^p(\mathbf{x}, t)$ は2次元波動方程式のGreen関数、 $G(\mathbf{x}, t)$ は2次元波動方

程式の基本解

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|^2/c^2}_+} \quad (8)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|^2/c^2}} & t > |\mathbf{x}|/c \\ 0 & t \leq |\mathbf{x}|/c \end{cases}$$

である。

2.3. 斜め入射問題の積分方程式

本研究の解法は、式(6)からわかるように、周期的に無限に並ぶクラックのうち、周期単位内のクラックにだけ注目する解法である。しかし、入射波がクラックに対して斜めに(左側からの入射として一般性を失わない)入射する問題では、左隣のクラックからの波が今考えているクラックに到達する時刻には、考えるクラックの右端に入射波が到達していない(従って開口変位が未知の)状況が考えられる(Fig. 2 参照)。この場合、左側のクラックからの影響は正しく計算できない。このため、通常的时间域境界積分方程式法は適用できない。

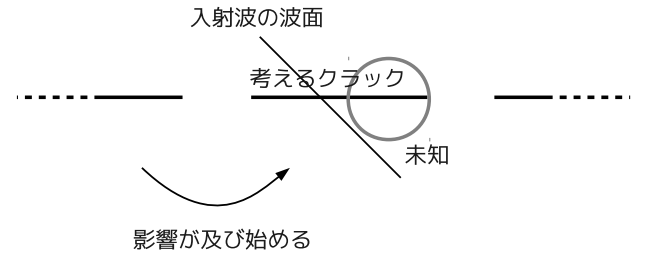


Fig. 2 Influence of nearby cracks

この問題の原因は、式(6)に現れる時間積分の積分範囲の上限が t ではないことにありとすることができる。つまり、式(6)が未来の影響を含んでいることに原因がある。そこで、次のような新たな時間変数を導入する。

$$T = t - \frac{N_1}{c} x_1$$

$$S = s - \frac{N_1}{c} y_1$$

すると、実際には時刻 $t = N_1/c$ 後に隣のクラックに到着する波が、見かけ上時刻 $T = 0$ に到着するように見える。このような変数変換を施すことにより、式(6)は

$$-\frac{\partial u_I}{\partial n_x}(T + N_1 x_1/c) = \int_{\Gamma} \int_0^T \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} G^p(\mathbf{x} - \mathbf{y}, T - S + N_1(x_1 - y_1)/c) \Phi(\mathbf{y}, S) dS d\sigma_y \quad (9)$$

$$\Phi(\mathbf{y}, S) = \phi(\mathbf{y}, S + N_1 y_1/c) = \phi(\mathbf{y}, s) \quad (10)$$

と変形でき、積分方程式を T について逐次的に解くことができる。

なお、このような変数変換を行うことは、周波数域では解を $u(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})e^{ikN_1 x_1}$ と書いて、 U を未知数にとることに相当する。また、FDTD法においてfield-transformation

technique⁽²⁾ と呼ばれる方法は本質的にこの変数変換と同等である。

3. 数値計算手法

3.1. Convolution Quadrature Method

本研究では式 (9) を数値的に解く必要がある。前節で導入した新しい時間変数を用いることで、時間域の境界積分方程式を標準的な手法により数値的に解くことができる。先行研究⁽⁵⁾ では、空間に対しては Galerkin 法、時間方向に対しては選点法と Rynne and Smith の安定化法⁽⁴⁾ を用いた方法が提案されており、解の精度に関しては一定の成果が得られたが、安定性に対しては課題を残すこととなった。そこで本研究では Lubich の Convolution Quadrature Method (以降、CQM) を用いる。CQM とは畳み込み積分

$$y(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (t \geq 0) \quad (11)$$

を $f(t)$ のラプラス変換 $\hat{f}(s)$

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

を利用して近似的に計算する手法である。CQM では式 (11) を離散化して

$$y(n\Delta t) \simeq \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t)f(k\Delta t) \quad (n = 0, 1, \dots, N_T)$$

とする。ただし、 Δt は時間増分、 N_T は時間ステップ数である。また、 ω_n は畳み込み積分の重みであり、 $\hat{f}(s)$ を用いて、

$$\omega_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \hat{f}\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1} dz \quad (12)$$

$$\simeq \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f}\left(\frac{\gamma(Re^{2\pi i l/L})}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i n l/L} \quad (13)$$

と表される。 R は式 (12) 中にある周回積分の半径、 L はその積分を数値積分で計算する際の分割数である。また $\gamma(z)$ は後退差分の重みを係数とする多項式であり、

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} (1-z)^k \quad (p \leq 6)$$

で求められる。 p は差分公式の次数である。関数 $\hat{f}(s)$ は考える積分経路上で正則である必要がある。

式 (9) の時間積分にこの CQM を用いることで安定性の向上が期待できる。また $L = N_T$, $R^{N_T} = \sqrt{\delta}$ にとると、 ω_n の誤差は $O(\sqrt{\delta})$ で収束することがわかっている⁽⁸⁾。そこで本研究では $\delta = 10^{-10}$ とし、 $R = \delta^{-2N_T}$ 、 $L = N_T$ と決めることにする。

3.2. CQM を用いた時間域境界積分方程式

式 (7) の周期グリーン関数のラプラス変換を考える。 $\Gamma^p(\mathbf{x}, T) = G^p(\mathbf{x}, T - N_1 x_1/c)$ とすると、

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^p(\mathbf{x}, s) &= \int \Gamma^p(\mathbf{x}, T) e^{-sT} dT \\ &= \frac{e^{\frac{N_1 s x_1}{c}}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_0\left(\frac{s}{c} |\mathbf{x} + n\mathbf{e}_1|\right) e^{\frac{N_1}{c} s n} \quad (14) \end{aligned}$$

である。ただし、 $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^t$ 、 $K_0(x)$ は 0 次の第 2 種変形 Bessel 関数である。式 (14) の級数は $\text{Re } s > 0$ 、 $|N_1| < 1$ のとき収束する。この $\hat{\Gamma}^p$ を用いて式 (9) に CQM を適用すると

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial u_I}{\partial n_x}(T + N_1 x_1/c) = \\ & \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} \sum_{m=0}^n \omega_{n-m}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \Delta t) \Phi(\mathbf{y}, m\Delta t) d\sigma_y \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \Delta t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \hat{\Gamma}^p\left(\frac{\gamma(Re^{2\pi i l/L})}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i n l/L} \\ &\simeq \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{\Gamma}^p\left(\frac{\gamma(Re^{2\pi i l/L})}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i n l/L} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\text{Re } \gamma(Re^{2\pi i l/L}) > 0$ となる様に γ を選ぶ必要がある。

3.3. Galerkin 法

時間に関しては上述の CQM を用いて離散化を行うが、さらに、空間に関しては Galerkin 法で離散化する。時間ステップ n について (すなわち時刻 $t = n\Delta t$) について考える。

微分方程式の解 Φ が基底関数 ψ_j を用いて

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_j \Phi_j(t) \psi_j(\mathbf{x}) \quad (16)$$

で離散化されるとする。重み関数 w_i を式 (15) に乗じて積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} w_i \frac{\partial u_I}{\partial n_x}(T + N_1 x_1/c) d\sigma_x \\ &= \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} \sum_{m=0}^n \omega_{n-m}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \Delta t) \Phi(\mathbf{y}, m\Delta t) d\sigma_y d\sigma_x \quad (17) \end{aligned}$$

このとき、Galerkin 法では重み関数 w_i としてテスト関数 ψ_i を採用する。したがって、最終的に離散化された積分方程式の形は次のようになる。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_i} \psi_i \frac{\partial u_I}{\partial n_x}(T + N_1 x_1/c) d\sigma_x \\ &= \int_{\Gamma_i} \psi_i \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} \sum_{m=0}^n \omega_{n-m}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \Delta t) \Phi_j(m\Delta t) \psi_j d\sigma_y d\sigma_x \quad (18) \end{aligned}$$

Galerkin 法を用いると、選点法に比べ、精度と安定性の向上が期待できることが渡辺・西村⁽⁵⁾ によって確認されている。

4. 数値計算結果

以下では特に断りのない限り、クラック 1 本の長さは 0.8、クラック 1 本あたり 20 分割とし、クラックの端の方で細くなるように分割した。また波速 $c = 1$ とし、線型方程式の解には LU 分解を用いた。基底関数 $\Phi_j(t)$ 、 $\psi_j(\mathbf{x})$ としては区分線形基底を用い、CQM に用いる差分公式の次数は $p = 2$ とした。

4.1. 1 段の周期クラックの場合

まず、クラックが横一段に並んだ周期クラック問題を考える。入射波として平面波を採用し、

$$u_I(\mathbf{x}, t) = h(t - \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}/c)$$

とする。時間波形は

$$h(t) = -\frac{(t-t_0)H(t-t_0)}{N_2} \quad (19)$$

とする。ここに、 t_0 はパラメータ、 $H(t)$ はヘヴィサイド関数である。無限領域における単一クラックにこの入射波が垂直に入射した場合 ($N_1 = 0, N_2 = 1$)、定常解は

$$\Phi(a, x_1) = \frac{l}{\pi} \log \left(\frac{\cos(\frac{x_1\pi}{l}) + \sqrt{\sin^2(\frac{a\pi}{l}) - \sin^2(\frac{x_1\pi}{l})}}{\cos(\frac{x_1\pi}{l}) - \sqrt{\sin^2(\frac{a\pi}{l}) - \sin^2(\frac{x_1\pi}{l})}} \right) \quad (20)$$

であることが知られている⁽⁹⁾。 l は周期長、 a は半クラック長である。この解と数値計算結果を比較する。ここでは $l = 1, a = 0.4$ とした。

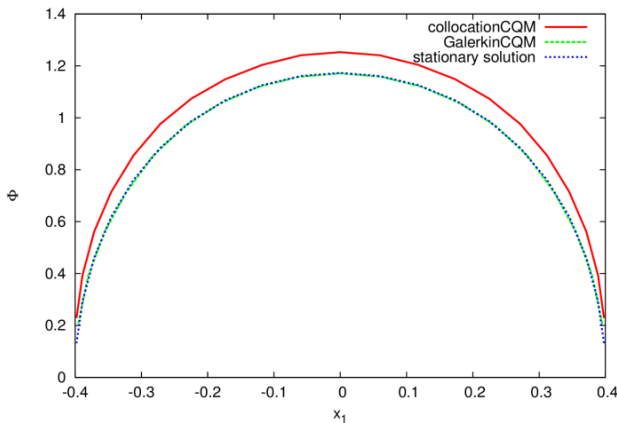


Fig. 3 Comparison of the long time solution vs stationary solution

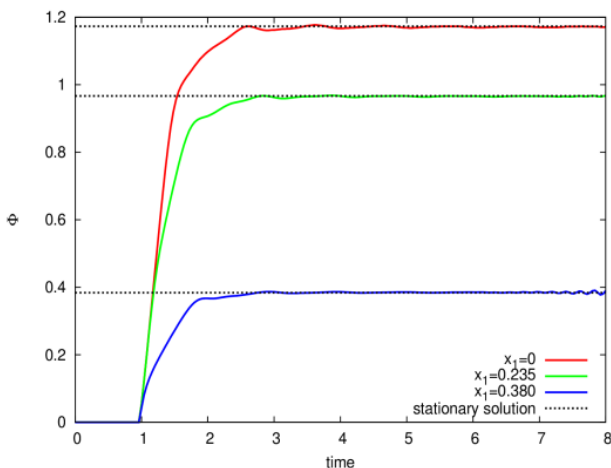


Fig. 4 Convergence to the stationary solution

Fig. 3 は横軸をクラックの x_1 座標、縦軸を開口変位 $\Phi(x_1)$ として、ある 1 つのクラックに着目して開口変位をプロットしたものである。赤線が区分一定基底を用いた選点法、緑の破線が Galerkin 法と CQM を用いた計算結果、青の破線が定常解 (式 (20)) である。 $\Delta t = 0.04$ 、時間ステップ数は 200、 $t_0 = 1$ である。選点法と CQM を用いた場合には、数

値解と定常解に 5% 程の誤差が見られる。しかし、Galerkin 法と CQM を用いた提案手法の場合、定常解とほぼ一致していることが確認できる。

次に、Fig. 4 は横軸に時間、縦軸に開口変位をとり、Galerkin 法と CQM を用いて解いた開口変位の時刻歴を $t = 0 \sim 8$ までプロットしたグラフである。赤線、緑線、青線の順にそれぞれ $x_1 = 0, 0.235, 0.380$ における時刻歴を表し、黒線は定常解である。それぞれ十分時間が経過すると定常解に近づいていくことがわかる。

また $x_1 = 0$ での開口変位の時刻歴を従来法と比較したグラフが Fig. 5 である。それぞれの結果はよく一致していることがわかる。以上の結果より、計算結果は妥当なものであると考えられる。

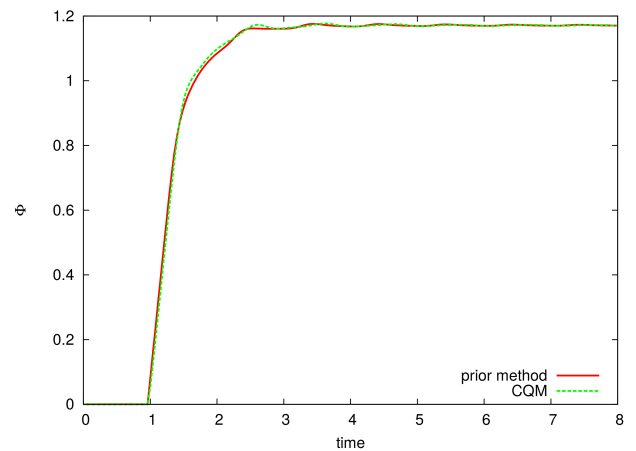


Fig. 5 Comparison of the conventional method with CQM

4.2. 3 段の周期クラックの場合

次に Fig. 6 のような周期クラックが縦方向に 3 段並んだ問題を考える。縦方向のクラック間隔は 0.1、前項と同じ式 (19) の波形の平面波を用い、入射方向は $N_1 = 0.4, N_2 = \sqrt{1 - N_1^2}$ とした。また、 $\Delta t = 0.02$ 、時間ステップ数は 4000、 $t_0 = 10$ とした。まずクラックの中心 $x_1 = 0$ での開口変位の時刻歴を 3 段のクラックそれぞれについてプロットしたものを Fig. 7 に示す。赤、緑、青の順にそれぞれ 1 段目、2 段目、3 段目のクラックの開口変位を表している。十分時間が経つと開口変位が 1、3 段目のクラックが同位相、2 段目のクラックが逆位相となっていくことがわかる。これは各クラックに挟まれた部分が導波管のような役目を果たしているからであると考えられる。

次に、従来法、CQM、および時間について Fourier 変換をとって得られる周波数域の周期波動問題の解を FFT を用いて時間域に戻した計算結果を比較し、Fig. 8 に示す。同図は 1 段目のクラックの中心の開口変位の時刻歴を表している。なお、周波数域の周期波動問題の解析には文献⁽¹⁰⁾の方法を用いた。この計算では $\Delta t = 0.01$ としたが、これは従来法の精度を確保するためであり、CQM も条件を揃えるために同じ時間増分を用いた。青線が従来法、緑線が CQM、赤線が

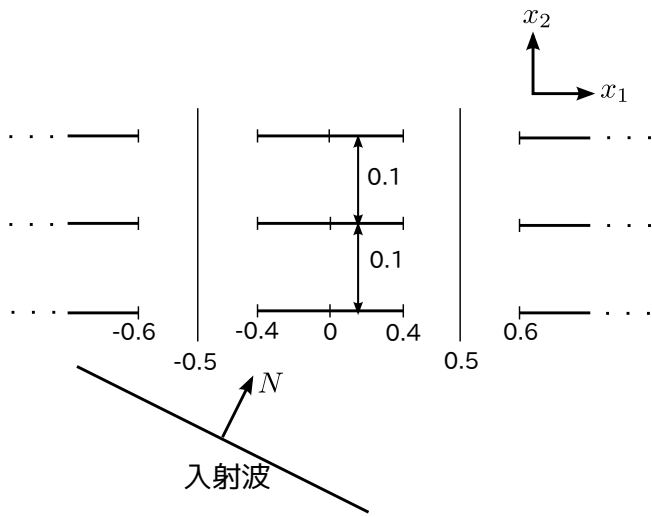


Fig. 6 3 rows of cracks

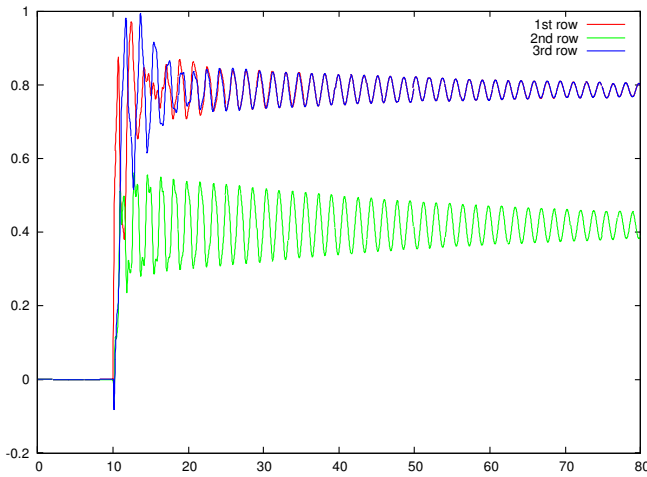


Fig. 7 Crack opening displacements of 3 row cracks vs time

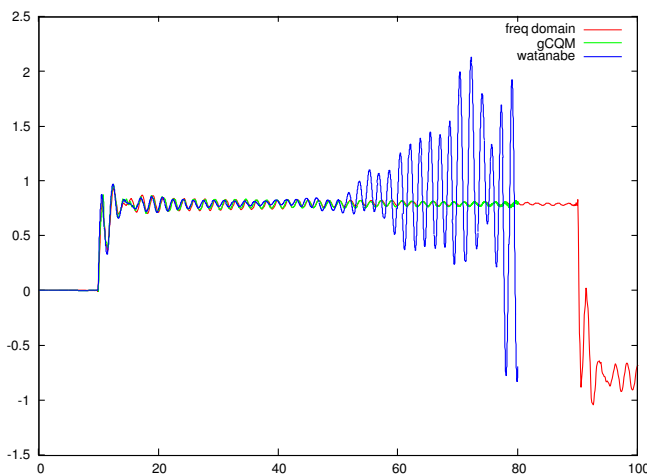


Fig. 8 Comparison of stability. COD vs time

周波数域の解法を用いた結果である。従来法は一時的には解が定常状態に近づくが、時間が経過すると不安定になっていることがわかる。それに対し、CQMを用いた計算結果では十分時間が経過しても不安定性は見られない。また、CQMと周波数域の解析結果はほぼ一致し、従来法の結果も不安定性が顕著になるまでは概ね他の結果と一致している。いずれの解にも細かい振動が見られるが、この周期は波動がクラック上を1往復するのに要する時間に一致している。なお、周波数域の解法では、静的解析を省略するために、一定時間経過後、入射波の符号が逆転するようにデータを与えたため、 $t = 90$ で立ち上がり時と逆向きに類似の挙動をとっている。また、詳細に見るとCQMの結果の長時間応答には細かい誤差が乗っていることが観測され、精度の改善は今後の課題となっている。

4.3. 5段の周期クラックの場合

さらに大きい問題の例として5段の周期クラックによる波動散乱問題を考える。クラック間隔、入射波などは前問と同じとし、 $\Delta t = 0.04$ 、時間ステップ数は2000とした。クラックの中点での開口変位の時刻歴を各段のそれぞれについてプロットしたものを Fig. 9 に示す。開口変位の振幅にうなりのような現象が見られる点が興味深い。

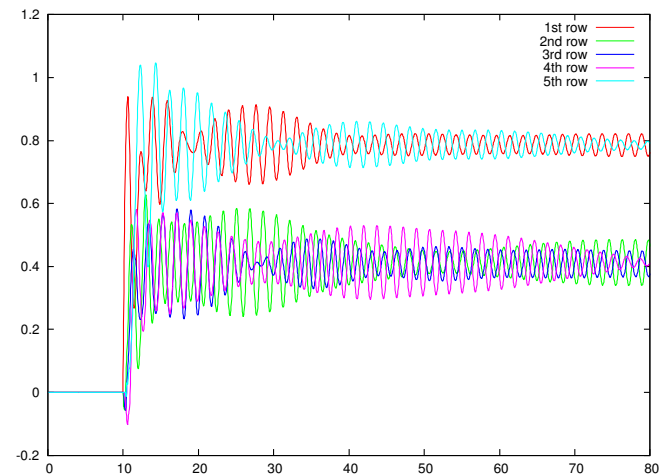


Fig. 9 Crack opening displacements of 5 row cracks vs time

4.4. 周期点波源の場合

次に、入射波が周期点波源である場合を考える。Fig. 10 に示すように、点 $(x_1, x_2) = (k, -2.5)$, ($k = \text{整数}$) に点波源を配置し、 x_1 軸負の方向にある波源から順に波動が発生する問題を考える。波源の時間波形を $h(t) = -\frac{t}{t+s_0}$ とすると、

$$u_I(\mathbf{x}, t) = \int_0^{t-|\mathbf{x}|} h(s) G^P(\mathbf{x}, t-s) ds \quad (21)$$

である。クラックの本数は3本、 $s_0 = 1$, $N_1 = 0.5$, $N_2 = \sqrt{1 - N_1^2}$ とする。計算結果を Fig. 11 に示す。

Fig. 11 の赤線、緑線、青線はそれぞれクラックの1、2、3段目の点 $(0, 0)$ での開口変位の時刻歴である。最初のうちは新たな波が到達する度に開口変位が大きくなってゆくこと

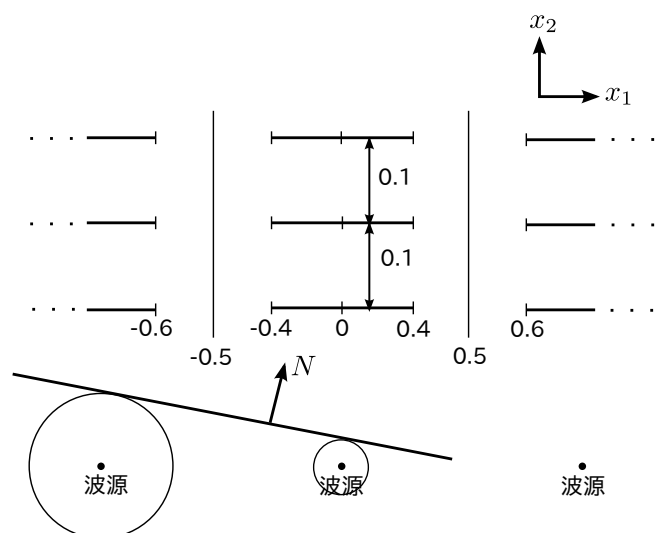


Fig. 10 Point source problems

がわかる。時間の経過とともに開口変位の変化は小さくなってゆくが、これは遠くの波源からの影響は近くの波源からの影響に比べ小さいためであると考えられる。Fig. 8と同様解に振動が見られるが、こちらの周期もクラック上を波が1往復するのに要する時間に一致している。またこの結果においても数値解に安定性の問題は見られない。

5. 結論

本研究では2次元波動方程式の周期クラック問題の時間域境界積分方程式法において、安定性を高めるためにCQMを用いることを提案した。第4節の結果より、CQMを用いることで安定性が向上することが確かめられた。また Galerkin法と併用することで十分な精度の結果を得られることが示された。

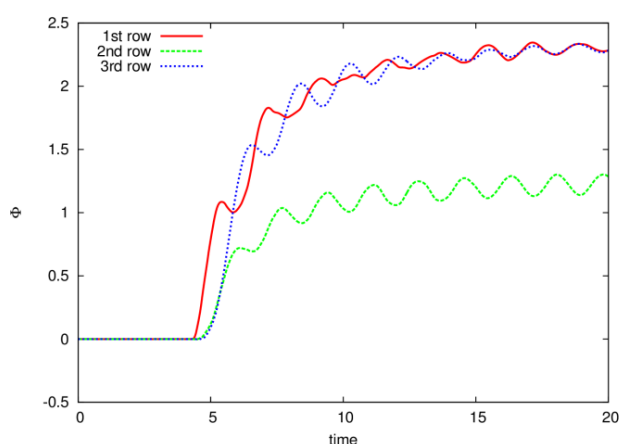


Fig. 11 Crack opening displacements for the point source problem

今後の課題としては、3次元問題への拡張や高速算法の適用などが挙げられる。また本論文で扱った直線クラック以外にも、折れ線やその他の形に対して応用することで現実のクラック解析に用いることも可能であると考えられる。

- (1) Y. Otani, N. Nishimura: A periodic FMM for Maxwell's equations in 3D and its applications to problems related to photonic crystals, *Journal of Computational Physics*, Vol.227, pp.4630–4652, 2008.
- (2) J. Maloney, M. Kesler, Periodic Structures, In; A. Taflove, S.C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method* (3rd edition), Chapter 13, pp.553–605, Artech House, 2005
- (3) 西村直志: 時間域周期亀裂問題の積分方程式の数値計算法, 日本応用数理学会, 2008 年会講演予稿集, 2008.
- (4) B. P. Rynne, P. D. Smith: Stability of time marching algorithms for the electric field integral equation, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol.4, No.12, pp.1180–1205, 1990.
- (5) 渡辺慧、西村直志: 2次元波動方程式の周期問題の時間域解法について, 日本機械学会計算力学講演会論文集 (CDROM), 2010.
- (6) C. Lubich: Convolution quadrature and discretized operational calculus. I, *Numerische Mathematik*, Vol.52, No.2, pp.129–145, 1988.
- (7) A.I. Aberu, J.A.M. Carrer, W.J. Mansur: Scalar wave propagation in 2D: a BEM formulation based on the operational quadrature method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.7, pp.101–105, 2003.
- (8) C. Lubich: Convolution quadrature and discretized operational calculus. II, *Numerische Mathematik*, Vol.52, No.4, pp.129–145, 1988.
- (9) 岡村弘之: 線形破壊力学入門, 培風館, 1976.
- (10) Y. Otani, N. Nishimura: An FMM for periodic boundary value problems for cracks for Helmholtz' equation in 2D, *International Journal for Numerical Method in engineering*, Vol. 73, pp.381–406, 2008.