

見かけの複素固有値の分布に基づいた 2 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題における単一境界積分方程式法の考察

A study on the single boundary integral equation method for transmission problems for Helmholtz' equation in 2D based on the distribution of fictitious complex eigenvalues

三澤 亮太¹⁾, 西村 直志²⁾

Ryota MISAWA, Naoshi NISHIMURA

1) 京都大学大学院情報学研究科大学院生 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: misawa@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

2) 京都大学大学院情報学研究科教授 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)

Boundary Integral Equations (BIEs) may suffer from inaccuracies caused by the presence of fictitious eigenvalues. Even BIEs without real fictitious eigenvalues may have complex fictitious eigenvalues with very small imaginary parts, which may result in inaccuracies when one solves problems with real frequencies. In this paper, we study the Single Boundary Integral Equations (SBIEs) to see if they can resolve this problem. We investigate the behavior of SBIEs from the viewpoint of complex fictitious eigenvalues. Numerical examples suggest that properly formulated SBIEs have complex fictitious eigenvalues with larger imaginary parts and are more accurate than the PMCHWT and Müller formulations in problems with real frequencies.

Key Words: transmission problems, boundary integral equations, fictitious eigenvalues, single boundary integral equations

1. はじめに

全空間, 周期問題, 導波路などの無限領域中に存在する有限の大きさの透過性物質による波動散乱問題を扱う transmission 問題は, 様々な分野で現れる普遍的な外部境界値問題であり, その数値解法の研究は重要な課題である. 境界積分方程式法は, 無限遠における仮想境界やその上での人工的な透過条件の導入を必要とせず, transmission 問題に適した解法である. また近年, 境界値問題の実固有値のみでなく複素固有値 (固有振動数) を計算することの重要性が著者らを含むいくつかのグループの研究で明らかになってきている⁽¹⁾. 複素固有値解析を行う場合, 遠方の仮想境界を用いる解法では, その上の関数値が指数的に増大する虞があるため, 仮想境界を要しない境界積分方程式法は特に魅力的な解法である.

Transmission 問題に対する境界積分方程式にはいくつかの選択肢があるが, 通常, 選定する際に考慮されるべき基準は以下の 2 点である:

- 1. 得られる係数行列は良条件であるか.
- 2. 見かけの固有値の影響を受けないか.

1. は, 計算時間の観点による基準である. 境界積分方程式法は, 何の工夫も行わない場合, 計算量は $O(N^2)$ (N : 未知数の数) となるため, 現実的な時間で大規模問題を解くためには通常何らかの高速化手法が用いられ, 特に高速多重極法などのポテンシャルの高速計算手法と, GMRES 等の線形方程式の反復解法を併用した手法がよく用いられる. この解法では, GMRES における反復計算が全計算時間の大部分を占める. したがって, 反復解法を用いる場合は速く解に収束する良条件な積分方程式を用いることが望ましい.

基準 2. は, 解析精度の向上のために重要である. 一般に, 境界積分方程式の固有値には, 元の境界値問題の固有値の他に, 物理的に意味の無い「見かけの固有値」が含まれる. 見かけの固有値では, 解くべき境界値問題は一意可解であるにも関わらず境界積分方程式は非正則となり, 数値計算精度が著しく悪化する虞がある. そのため, 見かけの固有値が解の精度に悪影響を及ぼしにくい境界積分方程式を選ぶことが重要である.

Transmission 問題に対する境界積分方程式として, PMCHWT 定式化や Müller の定式化がよく知られている. 後者は第 2 種 Fredholm 積分方程式であり, 前者は作用素を適切に配置することで GMRES において速く解に収束することが

知られており^(2,3), 両者ともに実数周波数解析において見かけの固有値が生じない. ところが, 物理的な固有値でない特定の実数周波数において, これらの定式化の計算精度が著しく悪化する現象が著者らによって報告されている⁽³⁾. 著者らの最近の研究⁽⁴⁾により, この現象は「複素数の」見かけの固有値に起因することが分かってきた. すなわち, PMCHWT 定式化や Müller の定式化には, 実数の見かけの固有値は存在しないが, 複素数の見かけの固有値は存在する. 特に, 虚部がゼロではないが非常に小さい見かけの複素固有値が存在すると, その複素固有値の実部に近い実数周波数において系が悪条件となり, 計算精度が著しく悪化する. そこで, この様な実数周波数における計算精度の悪化を防ぐためには, 非常に小さい虚部を持つ見かけの複素固有値を排除すれば良いと考えられる.

そこで本論文では, 上記の問題に対処しうる積分方程式法の定式化として, transmission 問題に対する単一境界積分方程式法 (Single Boundary Integral Equation Method, SBIE⁽⁵⁾) を取り上げ, その振る舞いを検証する. SBIE を考える理由は次の通りである. まず, SBIE の見かけの複素固有値は, 内部インピーダンス問題と外部 Dirichlet 問題の固有値となる. このうち, 内部インピーダンス問題の固有値は適切に係数を変えて制御できるため, SBIE で得られる見かけの固有値のうちいくつかは実軸から引き離すことができると期待される. また, PMCHWT 定式化や Müller の定式化の見かけの固有値は, 元の問題とは別の transmission 問題の固有値となる⁽⁴⁾. ところが transmission 問題の複素固有値には虚部が非常にゼロに近いものがあるので (後に実例を示す), SBIE は見かけの固有値が transmission 問題の固有値にならない点においても期待が持てる. さらに, 得られる積分方程式は良条件で GMRES における収束も速いことが報告されている⁽⁶⁾.

本論文では, SBIE が持つ見かけの複素固有値の挙動を考察し, その観点から PMCHWT 定式化や Müller の定式化と比較する. SBIE 自体は古くから知られている定式化であるが, 見かけの複素固有値の観点からパフォーマンス考察を行った研究は, 著者らの知る限りない.

本論文の構成は以下の通りである. 2 節で考える境界値問題, 境界積分方程式および見かけの固有値について示す. 3 節で, 2 節で示した境界積分方程式の複素固有値の挙動および実数周波数における計算精度を数値実験により確認する. 4 節で結論を述べる.

2. transmission 問題および境界積分方程式の定式化

2.1. transmission 問題

本論文では 2 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題を取り扱う. なお, Helmholtz 方程式は $e^{-i\omega t}$ 時間調和 (ω : 周波数) な波動方程式より導出されたものとする. 全空間 \mathbb{R}^2 中の有限の大きさの散乱体 Ω_2 を考え, $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_2}$, $\Gamma = \partial\Omega_2$ とする. Transmission 問題は, 以下の条件を満たす u を求

める:

$$\Delta u + k_i^2 u = 0 \text{ in } \Omega_i \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

$$u^+ = u^- (= u), \quad \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial u^+}{\partial n} = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial u^-}{\partial n} (= q) \text{ on } \Gamma \quad (2)$$

$$\text{散乱波 } u^{\text{sca}} = u - u^{\text{inc}} \text{ は外向き放射条件を満たす} \quad (3)$$

ここに, ϵ_i ($i = 1, 2$) は領域 Ω_i における物性値で, 正の実数とし, 波数 k_i は $k_i = \omega\sqrt{\epsilon_i}$, $i = 1, 2$ と表される. 上付添字 $+$, $-$ はそれぞれ領域 Ω_1, Ω_2 から境界 Γ への極限, $\partial/\partial n$ は Γ 上での法線微分 (ただし, Ω_2 から Ω_1 向きを正の向きとする), および u^{inc} は入射波を表す. Transmission 問題の固有値とは, $u^{\text{inc}} = 0$ である斉次 transmission 問題に非自明解 u が存在する複素周波数 $\omega \in \mathbb{C}$ である. ただし, $\omega \in \mathbb{C}$ の場合, 放射条件 (3) は, よく知られている Sommerfeld の放射条件でなく, 外向き解を重ねあわせた式の解析接続により与えられる⁽⁷⁾. 因果律と $e^{-i\omega t}$ 時間調和の仮定を考慮すると, 全空間の transmission 問題の固有値は負の虚部を持ち, 実数や正の虚部を持つ固有値は存在しないことに注意されたい.

2.2. 単一境界積分方程式 (SBIE)

次に単一境界積分方程式 (SBIE) を示す. 基本的には Kleinman and Martin⁽⁵⁾ の 5 章に従うが, 本論文では複素固有値計算を考えるために標準的でない定式化を行う. いま, Ω_1 における解 u が, 境界 Γ 上の密度関数 μ を用いて

$$u = u^{\text{inc}} + a \int_{\Gamma} G_1(x, y) \mu(y) ds_y + b \int_{\Gamma} \frac{\partial G_1(x, y)}{\partial n_y} \mu(y) ds_y \quad (4)$$

とかけるとする. ここに, G_1 は 2 次元 Helmholtz 方程式の全空間における外向き基本解 $G_1(x, y) = (i/4)H_0^{(1)}(k_1|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$, a, b は複素数の定数であり, その選び方は後述する. ここで, Ω_2 における解に関する Green 公式:

$$0 = \epsilon_2 \int_{\Gamma} G_2(x, y) q(y) ds_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial G_2(x, y)}{\partial n_y} u(y) ds_y, \quad x \in \Omega_1 \quad (5)$$

を考える (u, q は (2) を参照). ここに, G_2 は内向き基本解 $G_2(x, y) = (-i/4)H_0^{(2)}(k_2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ である. G_1 には外向き基本解, G_2 には内向き基本解を用いることが標準的でない点であるが, その理由は後述する.

いま, (5) を Γ へ極限移行すると, 境界条件 (2) および (4) を用いて未知関数 μ に関する以下の積分方程式を得る:

$$\begin{aligned} & \epsilon_2 S_2 \left(\frac{1}{\epsilon_1} M_1 \mu \right) - \left(\frac{I}{2} + D_2 \right) L_1 \mu \\ & = \frac{1}{2} u^{\text{inc}} + D_2 u^{\text{inc}} - \epsilon_2 S_2 \left(\frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial n} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

ここに, I は恒等作用素であり, 作用素 S_i, D_i, D'_i, N_i ($i = 1, 2$) は以下のように定義される境界上の一重層・二重層ポテンシャルおよびその法線微分である:

$$\begin{aligned} S_i q(x) &= \int_{\Gamma} G_i(x, y) q(y) ds_y, \quad D_i u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_i(x, y)}{\partial n_y} u(y) ds_y \\ D'_i q(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G_i(x, y)}{\partial n_x} q(y) ds_y, \quad N_i u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G_i(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} u(y) ds_y \end{aligned}$$

また, L_1, M_1 は (4) およびその法線微分の Γ への外部 trace を与える作用素で, 以下のようにかける:

$$\begin{aligned} L_1\mu &= aS_1\mu + b\left(\frac{I}{2} + D_1\right)\mu \\ M_1\mu &= a\left(-\frac{I}{2} + D_1'\right)\mu + bN_1\mu. \end{aligned}$$

まとめると, SBIE を用いた境界積分方程式法では, 境界上の未知 (密度) 関数 μ に関する方程式 (6) を解き, 得られた μ を (4) や (5) (の $x \in \Omega_2$ の式) に代入して物理的に意味のある解を得る. 例えば, 境界値 u, q は上で定義した作用素 L_1, M_1 を用いて以下のように求まる:

$$u = u^{\text{inc}} + L_1\mu, \quad q = \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial n} + M_1\mu \right) \text{ on } \Gamma.$$

また, (6) より得られる積分方程式は Calderon の式を考慮すると第 2 種 Fredholm 積分方程式となり⁽⁵⁾, GMRES において速く解に収束することが期待される.

2.3. 単一境界積分方程式の見かけの固有値

ここでは, SBIE の見かけの固有値を示す. SBIE(6) の見かけの固有値は, 以下の 2 つの斉次境界値問題の固有値となる:

- 外部 Dirichlet 問題:

$$\begin{aligned} \Delta v + k_2^2 v &= 0 \text{ in } \Omega_1, \quad v^+ = 0 \text{ on } \Gamma \\ v &\text{ は内向き放射条件を満たす.} \end{aligned} \quad (7)$$

- 内部インピーダンス問題:

$$\Delta v + k_1^2 v = 0 \text{ in } \Omega_2, \quad av^- + b\frac{\partial v^-}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma \quad (8)$$

証明は, 標準的な手法で行えるため省略する.

次に, これらの見かけの固有値の挙動を考察し, 定数 a, b の選び方を示す. 本論文は, 見かけの複素固有値の挙動を興味の対象としている. そのためには, 境界積分方程式から得られた固有値が, 物理的に意味のある真の固有値であるか, 見かけの固有値であるかを区別し, それぞれの影響を切り分けて考える必要がある. 実は, 先述の G_2 の選び方と a, b の適切な選び方によりこれを実現できる. まず, (7) には複素固有値しか存在せず, さらにそれらの複素固有値は, v が内向き放射条件を満たすことから正の虚部を持つため, 負の虚部を持つ真の固有値と分離できる. これが, G_2 に内向き基本解を用いた理由である. この方法については, 著者らの論文⁽¹⁾ の concluding remarks および論文⁽⁴⁾ を参照されたい. また, (8) の解は Green 公式から

$$-\text{Im}\left(\frac{a}{b}\right) \int_{\Gamma} |v|^2 ds + 2 \text{Re}\{k_1\} \text{Im}\{k_1\} \int_{\Omega_2} |v|^2 dV = 0 \quad (9)$$

を満たすことが容易にわかる. $\text{Im}(a/b)$ と $\text{Re}\{k_1\} \text{Im}\{k_1\}$ が異符号であれば, 式 (9) を満たす v はゼロしかないので, この条件下においては固有値は存在しない. そこで, 真の固有値が現れる $\text{Re} k_1 > 0, \text{Im} k_1 < 0$ ($\text{Re} \omega > 0, \text{Im} \omega < 0$) の範囲に見かけの固有値 ((8) の固有値) が現れないようにするには $\text{Im}(a/b) > 0$ となるように a, b を選ばば良い.

次に, 見かけの固有値がなるべく実軸から離れた位置に現れるように a, b を選ぶことを考える. まず, (8) の固有値は Burton-Miller の方程式の見かけの固有値と同じであることに注意する. Burton-Miller の方程式の見かけの複素固有値の挙動は, Zheng ら⁽⁸⁾ により数値的に調べられており, $a = 1, b = -i/k_1$ と選ぶと実軸から最も離れることが報告されている. このことから, 以下では $a = 1, b = -i/k_1$ と選ぶことにする. なお, a, b を $a = 0$ または $b = 0$ と選ぶと, (8) の固有値はそれぞれ内部 Neumann 問題, 内部 Dirichlet 問題の固有値となり実数となる.

2.4. PMCHWT 定式化および Müller の定式化, 見かけの固有値

ここでは参照の便宜のために, PMCHWT 定式化と Müller の定式化を記す. 前節で定義した作用素を用いて, PMCHWT 定式化は以下のようにかける:

$$\begin{pmatrix} -(D_1 + D_2) & \epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2 \\ -\left(\frac{N_1}{\epsilon_1} + \frac{N_2}{\epsilon_2}\right) & D_1' + D_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{\text{inc}} \\ \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial n} \end{pmatrix} \quad (10)$$

同様に, Müller の定式化は以下のようにかける:

$$\begin{pmatrix} I + \begin{pmatrix} -\frac{2\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2} \left(\frac{D_1}{\epsilon_1} - \frac{D_2}{\epsilon_2}\right) & \frac{2\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2} (S_1 - S_2) \\ -\frac{2}{\epsilon_1+\epsilon_2} (N_1 - N_2) & \frac{2}{\epsilon_1+\epsilon_2} (\epsilon_1 D_1' - \epsilon_2 D_2') \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2} u^{\text{inc}} \\ \frac{2}{\epsilon_1+\epsilon_2} \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial n} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (11)$$

ただし, これらの積分方程式の未知関数は境界値 u, q である. PMCHWT 定式化は, 式 (10) のように作用素を配置すると GMRES において速く解に収束する⁽²⁾. また, Müller の定式化 (11) は第 2 種 Fredholm 積分方程式であり, これも GMRES において速く解に収束する⁽³⁾. PMCHWT 定式化の見かけの固有値は, (1) と (2) で k_1 と k_2, ϵ_1 と ϵ_2 を入れ替え, (3) を内向き放射条件に変えた斉次 transmission 問題に対する固有値となる. また, Müller の定式化の見かけの固有値は, (1) で k_1 と k_2 を入れ替え, (3) を内向き放射条件に変えた斉次 transmission 問題に対する固有値となる. 詳細は⁽⁴⁾ を参照されたい.

3. 数値実験

以上で示した境界積分方程式の見かけの固有値の振る舞いを数値的に確認する. 計算結果を示す前に, 固有値計算に必要な櫻井・杉浦法 (Sakurai-Sugiura projection Method, SSM) について簡単に説明する. 詳細は, Asakura et al.⁽⁹⁾ を参照されたい. SSM は, 複素平面内の閉曲線 γ で囲まれる領域内に存在する, 行列関数 $A(\omega)$ の非線形固有値 (すなわち, $A(\omega)\mathbf{x} = 0$ を満たす非自明解 \mathbf{x} が存在するような $\omega \in \mathbb{C}$) を, γ 上の周回積分:

$$\int_{\gamma} \omega^n \mathbf{v}^H A(\omega)^{-1} \mathbf{u} d\omega \quad (12)$$

を用いて計算するアルゴリズムである．ここに、 \mathbf{u}, \mathbf{v} はランダムベクトルであり、周回積分 (12) は数値積分で計算される (\mathbf{u}, \mathbf{v} は計算精度の向上のため普通は複数本とられる⁽¹⁰⁾). 境界積分方程式法と組み合わせて固有値解析を行う場合、行列関数 $A(\omega)$ は、境界積分方程式 (6), (10) および (11) を離散化して得られる方程式の係数行列となる．したがって、SSM に必要なものは積分路 γ 上の各積分点の上での $A(\omega)^{-1}\mathbf{u}$ である．なお、この計算は高速多重極法と GMRES を用いて行う．本研究では、境界上の離散化は区分一定要素で行い、境界積分方程式の離散化は選点法で行う．

また、以下では、主に散乱体 Ω_2 における波速が外部領域 Ω_1 における波速よりも速い場合を考える．この場合、PMCHWT 定式化と Müller の定式化は見かけの固有値が特に問題となると考えられる．実際、PMCHWT 定式化と Müller の定式化の見かけの固有値は 2.4 節の最後に述べたように、各領域における波数を交換した transmission 問題の固有値となる．このため、元の問題で内部領域のほうが波速が速い場合には、見かけの固有値に対応する問題では内部領域の波速のほうが遅くなり、(物理的には) 波が閉じ込められやすくなるので、虚部の小さな見かけの固有値が現れやすいと予想される．

3.1. 各定式化に対する見かけの固有値の挙動

本節では、これまでに述べた定式化の見かけの固有値の性質を数値的に確認する．まず、 Ω_2 が半径 r_0 の円の場合を考え、円の外部 Ω_1 と内部 Ω_2 における物性値は $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (4, 1)$ (波速の比は $k_1^{-1} : k_2^{-1} = 1 : 2$) とする．この場合、解析解や固有値を求めることは容易であり、例えば、元の transmission 問題の固有値と SBIE の見かけの固有値は、それぞれ以下の式のゼロ点となる：

- transmission 問題:

$$-H_n^{(1)}(k_1 r_0) k_2 J_n'(k_2 r_0) / \epsilon_2 + J_n(k_2 r_0) k_1 H_n^{(1)}(k_1 r_0) / \epsilon_1 \quad (13)$$

- SBIE の見かけの固有値:

$$H_n^{(2)}(k_2 r_0) (a J_n(k_1 r_0) + b k_1 J_n'(k_1 r_0)) \quad (14)$$

ここに $H_n^{(m)}$, J_n は m 種 n 次 Hankel 関数及び、 n 次 Bessel 関数であり、これらのゼロ点は SSM で求めた．

Fig. 1(a) は $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (4, 1)$, $r_0 = 1$ としたときの、SBIE, PMCHWT 及び Müller の積分方程式の固有値の解析解である．ただし、これらは SSM を用いて計算しており、Fig. 1(a) には SSM で固有値を計算する範囲も示した (図の煩雑化を避けるために外周のみ示しているが、実際には Fig. 1(a) 中の長方形を 6 つに分割して計算している)．また、式 (13) などの次数 n は $n = 0$ から $n = 40$ まで変化させた．Fig. 1(a) において、下半平面にあるものは真の固有値、上半平面にあるものは各定式化で得られる見かけの固有値である．この図により、PMCHWT 定式化と Müller の定式化の見かけの固有値は $\text{Re} \omega$ が大きくなると実軸に近いものが増える傾向が見られるが、一方で SBIE の見かけの固有値はある程度実軸から離れていることがわかる．また、Fig. 1(b) は Fig. 1(a) の固有値のうち虚部が -0.1 から 0.1 の範囲のもの (上図) と、実数

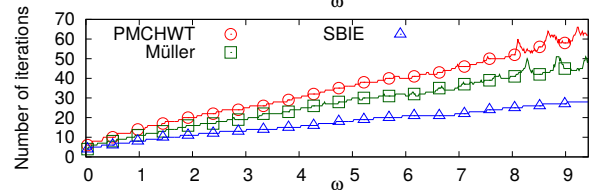
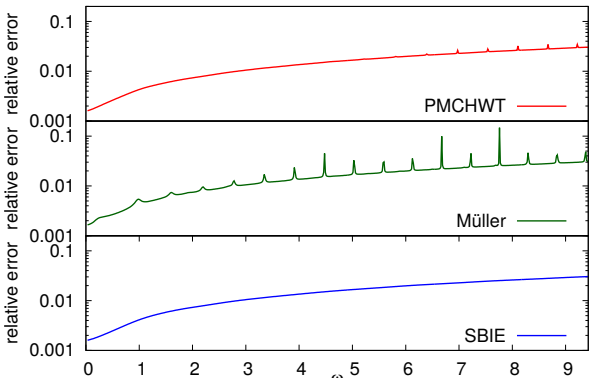
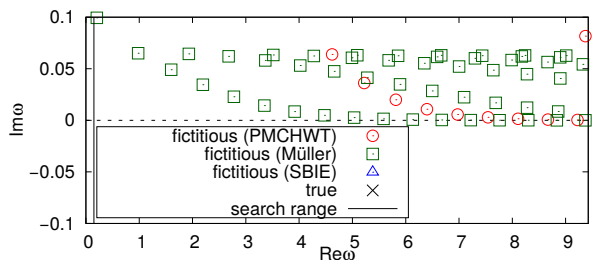
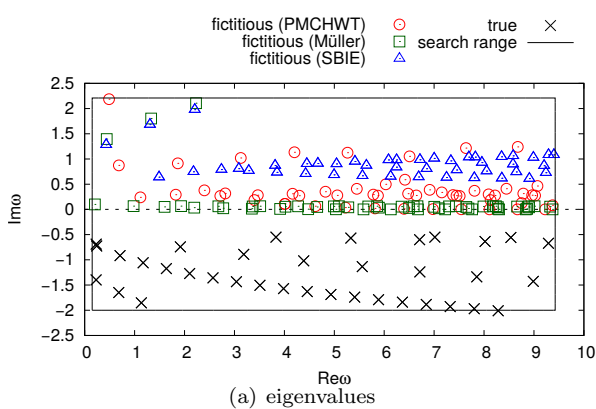
の周波数に対する $u^{\text{inc}} = e^{ik_1 x_2}$ 入射の時の各定式化で得られた u, q の \mathcal{L}^2 相対誤差の平均値 (中段三図)、及び各定式化の GMRES の収束に要した反復回数である (下図)．ただし、円の境界は 1000 要素で分割した．Fig. 1(b) から、PMCHWT 定式化と Müller の定式化は非常に小さな虚部を持つ見かけの固有値の実部に近い周波数で解析精度が悪化しているが、一方で小さな虚部の見かけの固有値を持たない SBIE ではこの範囲のすべての周波数において精度よく解を求められている事がわかる．なお、Müller の定式化のほうが PMCHWT 定式化よりも精度が悪くなっているのは、元より Müller の定式化の方が悪条件になりやすい⁽³⁾ ことに加えて、Müller の定式化は PMCHWT 定式化よりも多くの虚部の小さい固有値を有しているからである．また、GMRES における反復回数は少ない順に SBIE, Müller, PMCHWT となり、SBIE は高速な収束を示す (Fig. 1(b) 最下図)．また、PMCHWT と Müller の定式化は実軸に非常に近い見かけの固有値の近くで反復回数の増加するが、固有値が実軸から遠い SBIE ではそのような増加は見られない．

円の内外の物性値を交換した $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (1, 4)$ (波速比 $k_1^{-1} : k_2^{-1} = 2 : 1$) の場合の同様の解析結果を Fig. 2 に示した．この場合、どの定式化の見かけの固有値もある程度実軸から離れているが、SBIE のものが最も離れている (Fig. 2 上図)．一方で、多数の実軸に近い真の固有値が現れる．これらの固有値に近い実数周波数においては、境界値問題自身が悪条件となるため、どの定式化も精度が悪化する (Fig. 2 中図)．ただし精度悪化が起こる周波数における精度は定式化ごとに多少差が見られ、精度の良い順に SBIE, PMCHWT, Müller となる傾向が見られる．また、SBIE は最も少ない反復回数で解に収束し (Fig. 2 下図)、真の固有値の近くではどの定式化も多少反復回数が増加するが、SBIE の増加は僅かである．

3.2. 複雑な形状に対する固有値解析

次に、解析解を求めることが困難な、より複雑な形状に対して、境界積分方程式法を用いた解析結果を示す．ここでは、Fig. 3(a) に示した滑らかな星形⁽¹¹⁾ $(x_1, x_2) = ((1 + 0.3 \cos 5\theta) \cos \theta / 1.3, (1 + 0.3 \cos 5\theta) \sin \theta / 1.3)$ を考える．この形状を区分一定要素を用いて 2000 要素で分割した．Fig. 3(b) は、各積分方程式で得られた固有値および SSM で固有値を計算した範囲を示している．Fig. 3(b) により、下半平面の真の固有値は定式化によらずほぼ同じ位置に得られていることがわかる (下半平面において Müller の定式化が 1 点経路外に固有値を得ているが、これは SSM ではしばしば起こりうることである⁽¹⁰⁾．なお、この固有値は経路外に得られた真の固有値であることを確認した．)．一方、上半平面の見かけの固有値について、先の円形の場合と同様に、SBIE 以外の他の定式化は実軸に近い固有値を持つ傾向が見られ、SBIE は複雑な形状についても、見かけの固有値を実軸から引き離せていることがわかる．

Fig. 3(c) は SSM で用いた周回積分路上の各積分点の上で GMRES の収束に要した反復回数を 3 次元プロットしたものを、真横から眺めた図 ($\text{Re} \omega$ v.s. 反復回数) である．Fig. 3(c)



(b) eigenvalues, relative errors and numbers of iterations

Fig. 1: (a): analytical eigenvalues for various BIEs for a single circular scatterer, (b): eigenvalues with very small imaginary parts (top), relative errors of the BIEM solutions (middle 3 figures) and numbers of iterations (lower).

により、SBIE の GMRES において収束に要する反復回数は、PMCHWT 定式化のものより少なく、Müller の定式化とは同程度であり、高速な収束が実現できていると言える。

なお、高速多重極法と GMRES を用いているため、(6) の二重積分を $O(N)$ のコストで計算していることに注意されたい。ここで、各定式化の行列ベクトル積の計算コストを考える。PMCHWT 定式化と Müller の定式化では、 S_{iq} や D_{iu} などの小行列ベクトル積の回数は、(10)-(11) から $4+4=8$ 回である。SBIE の場合、 Ω_1 で $L_{1\mu}$, $M_{1\mu}$ 計算に 4 回、 Ω_2 での計算に 2 回であるので合計 6 回である。したがって、実装によっては計算時間が上記の比となるとは限らないが、PMCHWT

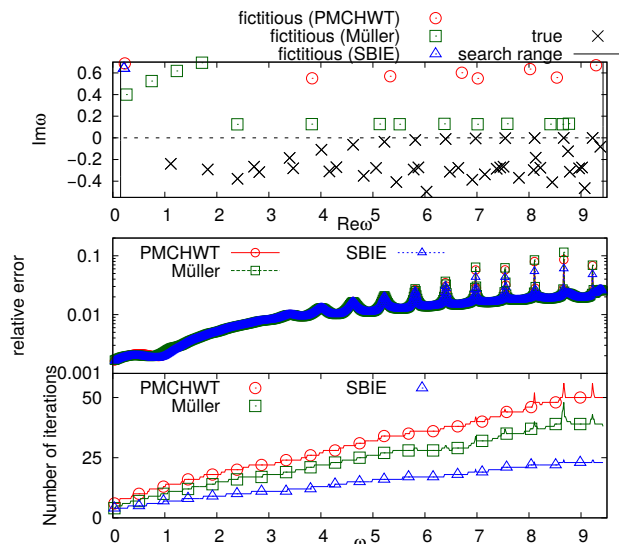
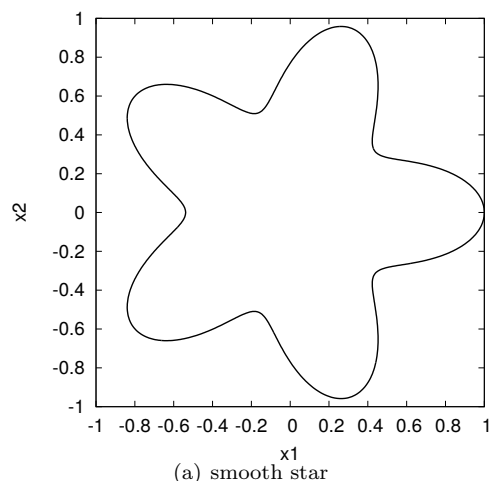


Fig. 2: ($\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 4$, circular scatterer) eigenvalues (upper), relative errors of the BIEM solutions (middle), numbers of iterations (lower)

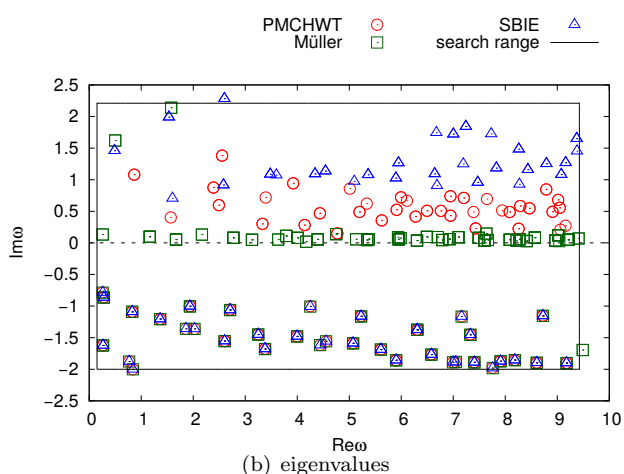
定式化と Müller の定式化の一反復の計算コストは、SBIE の約 1.3 倍ほどとなる。星形の 2000 要素離散化のとき (行列サイズは SBIE, PMCHWT および Müller の定式化でそれぞれ 2000, 4000) 一回の行列ベクトル積に要する計算時間は、SBIE は約 0.049 秒、PMCHWT 定式化と Müller の定式化は約 0.051 秒であった (実行環境は東大 FX10 システム (SPARC64TMIXfx コア) で OpenMP16 並列とした)。

4. 結論

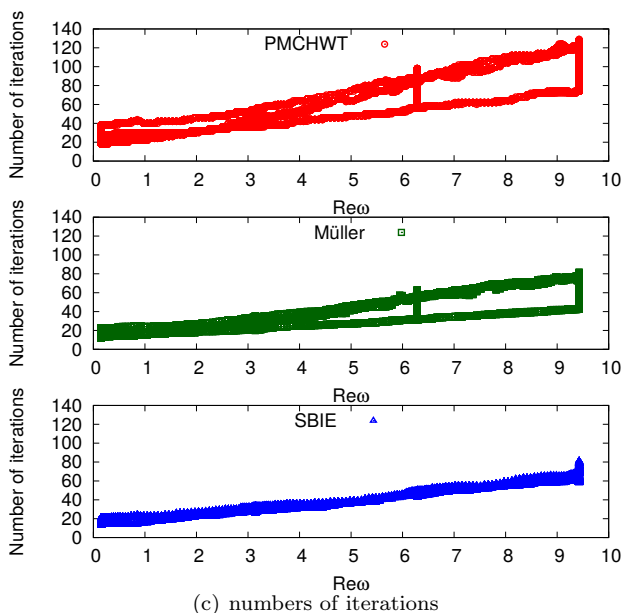
本論文では、SBIE の見かけの複素固有値の性質を数値的に検証した。数値実験の結果、SBIE は PMCHWT 定式化や Müller の定式化よりも実軸に近い見かけの複素固有値が現れにくく、実数周波数解析での精度悪化を避けられることを数値的に確認した。本研究で得られた数値実験結果は、高精度な境界積分方程式の定式化を考察する上で見かけの複素固有値の振る舞いを考えることが有用であることを示している。したがって今後の課題として、様々な境界積分方程式に対して、見かけの複素固有値に基づく同様の検討を行うことが挙げられる。例えば、(5) とその法線微分に重み定数をかけて足した定式化を行うことが考えられる。この場合、見かけの固有値は外部インピーダンス問題と内部インピーダンス問題の固有値となるため、重み定数を変えることで外部問題の固有値から生じる見かけの固有値の位置も制御できると考えられる。ただし、この方法では第 2 種 Fredholm 積分方程式であるという利点は失われるため、固有値解析に影響を与えないような適切な前処理を行い収束速度を速める必要があると考えられる。また、Müller の定式化は一通りではなく、本論文で用いた積分核が最も滑らかな定式化手法 (11) 以外にも可能性がある⁽³⁾。そこで、Müller の定式化手法を適切に変えて固有値を実軸から引き離せるかどうか調べることも考えられる。ただし、これは 3 節の冒頭で述べた理由から難しい可能性がある。また、固有値と解析を行う周波数の距離と、BIEM の精度に関する定量的な評価や、境界形状が滑ら



(a) smooth star



(b) eigenvalues



(c) numbers of iterations

Fig. 3: (a): smooth star shaped scatterer, (b): eigenvalues for the smooth star, (c): $\text{Re } \omega$ v.s. numbers of iterations needed at integration points on the contours for SSM.

かでない問題の場合の考察も今後の課題として挙げられる。

謝辞: 本研究はJSPS 科研費番号14J03491の助成を受けた。

- (1) R. Misawa, K. Niino, and N. Nishimura. An FMM for waveguide problems of 2-D Helmholtz' equation and its application to eigenvalue problems. *Wave Motion*, Vol. 63, pp. 1–17, 2016.
- (2) K. Niino and N. Nishimura. Preconditioning based on Calderon's formulae for periodic fast multipole methods for Helmholtz' equation. *J. Comput. Phys.*, Vol. 231, pp. 66–81, 2012.
- (3) 三澤亮太, 西村直志. 2次元 Helmholtz 方程式の1周期 transmission 問題における境界積分方程式の定式化について. *計算数理工学論文集*, Vol. 12, pp. 109–114, 2012.
- (4) R. Misawa, K. Niino, and N. Nishimura. Boundary integral equations for calculating complex eigenvalues of transmission problems. <https://arxiv.org/pdf/1608.00500v1.pdf> (submitted).
- (5) R.E. Kleinman and P.A. Martin. On single integral equations for the transmission problem of acoustics. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 48, pp. 307–325, 1988.
- (6) Y. Boubendir, C. Turc, and V. Domínguez. High-order Nyström discretizations for the solution of integral equation formulations of two-dimensional Helmholtz transmission problems. *IMA J. Numer. Anal.*, Vol. 36, pp. 463–492, 2016.
- (7) S. Kim and J.E. Pasciak. The computation of resonances in open systems using a perfectly matched layer. *Math. Comp.*, Vol. 78, pp. 1375–1398, 2009.
- (8) C.-J. Zheng, H.-F. Gao, L. Du, H.-B. Chen, and C. Zhang. An accurate and efficient acoustic eigensolver based on a fast multipole BEM and a contour integral method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 305, pp. 677–699, 2016.
- (9) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and K. Kimura. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals. *JSIAM Lett.*, Vol. 1, pp. 52–55, 2009.
- (10) T. Ikegami, T. Sakurai, and U. Nagashima. A filter diagonalization for generalized eigenvalue problems based on the Sakurai-Sugiura projection method. *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 233, pp. 1927–1936, 2010.
- (11) A. Barnett, Boundary integral equations for BVPs, and their high-order Nyström quadratures: a tutorial. Lecture materials for "2014 CBMS-NSF Conference: Fast Direct Solvers for Elliptic PDEs", <https://math.dartmouth.edu/~fastdirect/notes/quadr.pdf> (accessed 2016-10-28).