計算数理工学論文集 Vol. 16 (2016 年 12 月), 論文 No. 01-161202 JASCOME

2次元波動伝搬問題に対する演算子積分時間領域境界要素法・イメージベース有限要素法結合解法

DEVELOPMENT OF COUPLING METHOD OF CONVOLUTION QUADRATURE BEM AND IMAGE-BASED FEM FOR 2-D WAVE PROPAGATION IN TIME-DOMAIN

斎藤　隆泰 [1)]，市川　諒 [2)]，稲垣　祐生 [3)]

Takahiro SAITOH, Ryo ICHIKAWA and Yu INAGAKI

1) 群馬大学大学院理工学府　准教授　(〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1,　E-mail:t-saitoh@gunma-u.ac.jp)
2) 群馬大学大学院理工学府　修士課程　(〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1,　E-mail:t15803006@gunma-u.ac.jp)
2) 群馬大学大学院理工学府　修士課程　(〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1,　E-mail:t12305007@gunma-u.ac.jp)

In this research, a coupling method of the convolution quadrature time-domain boundary element method (CQBEM) and image-based finite element method (IMFEM) is presented. This coupling method has two main advantages: 1) finite element modelling for heterogeneous areas can be treated without difficulties by using digital data for analysis model, and 2) wave propagation in infinite domains can be calculated with high accuracy by using CQBEM. In this paper, the formulation and validation of the proposed method are described and confirmed by solving fundamental wave propagation problems. As numerical examples, SH wave scattering in inhomogeneous media is demonstrated using the proposed method.

Key Words: Convolution Quadrature Method, Time-Domain Boundary Element Method, Finite Element Method, Image-based Modeling, Wave Propagation.

1. はじめに

本研究では, 演算子積分時間領域境界要素法 (CQBEM) とイメージベース有限要素法 (IMFEM) の結合解法について検討する. 演算子積分時間領域境界要素法は, Lubich[(1)] が提案した畳込み積分を精度良く, 安定に計算する数値計算手法を, 時間領域境界積分方程式の時間方向の離散化に適用した方法であり, 弾性波動問題 [(2, 3)] や飽和多孔質弾性波動問題 [(4)] 等, 工学の様々な問題 [(5)] に適用されてきた. その演算子積分時間領域境界要素法の利点は, 時間増分が小さい場合でも, 比較的安定に, 精度良く解析が可能であること, 通常の境界要素法と同様, 境界のみの離散化で解析を実行できること, 無限領域を含む波動伝搬解析に適している点等が挙げられる. 一方, 有限要素法は, 非線形問題の扱いに強く, 今日では最も汎用性に優れた数値解析手法であり, 産業界では有限要素法は数値解析のデファクトスタンダードとなっている. 実際, 例えばデジタル画像のピクセルデータを有限要素メッシュに変換し, その有限要素メッシュを数値解析に利用するイメージベースモデリング [(6)] を適用したイメージベース有限要素法 (IMFEM) は, 有限要素法の汎用性をおおいに高め, 今日では, 時間領域差分法の改良版である動弾性有限積分法 (EFIT:Elastodynamic Finite Integration Technique) に利用される [(7)] までに至っている. イメージベースモデリングの利点は, 非均質材料を容易にモデル化できる点にあり, この利点は有限要素法や差分法が備える, 境界要素法に比べて非均質材料の解析に優位である点と一致するため, その利用が拡大したことが背景にある. しかしながら, 有限要素法は無限・半無限領域を含む波動伝搬解析は比較的苦手であり, その改善に, PML 等の吸収境界条件等を適用する方法 [(8)] がなされているが, どのような波動に対しても精度良く適応可能な吸収境界条件は, 今のところ存在しないのが現状である.

そこで, 本研究では, 無限・半無限領域を含む領域に対して演算子積分時間領域境界要素法を, 非均質領域に対してはイメージベース有限要素法を適用した, 演算子積分時間領域境界要素法・イメージベース有限要素法結合解法を開発する. 演算子積分時間領域境界要素法とイメージベース有限要素法の両者の利点を活かした波動伝搬解析手法を開発することで, 効率的な解析が可能となる. 以下では, まず, 解くべき問題について説明した後, 2 次元面外波動問題を例として, 演算子積分時間領域境界要素法の定式化について説明する. 次に, イメージベースモデリングと有限要素法の定式化につい

2016 年 8 月 7 日受付，2016 年 10 月 21 日受理

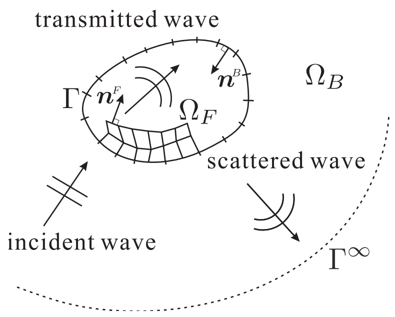

Fig.1　Elastic wave scattering problems with heterogeneous areas.

て説明する. 両者の結合には, 等価境界要素結合法を用いた定式化を実施する. 最後に, 簡単な波動散乱問題と, イメージベースモデリングを適用した非均質材料に対する波動問題を解くことで, 本手法の妥当性について検討する.

2. 解くべき問題

以下では簡単のため, 2 次元面外波動問題を対象とし, 直交座標系 (x_1, x_2), 時刻 t に対し, 面外変位 $u_3(\boldsymbol{x}, t)$ 等を単に $u(\boldsymbol{x}, t)$ 等と表記する. Fig.1 のように, CQBEM で解くべき無限・半無限均質領域を Ω_B, FEM で解くべき非均質領域を Ω_F とし, 領域 Ω_B 側から領域 Ω_F 側への入射波 $u^{\rm in}(\boldsymbol{x}, t)$ の透過・散乱問題について考えれば, 各領域 Ω_B, Ω_F において, 面外変位 $u(\boldsymbol{x}, t)$ が満足する波動方程式, 初期条件はそれぞれ次のように与えられる.

$$\mu\nabla^2 u(\boldsymbol{x}, t) - \rho\ddot{u}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{1}$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = 0,\ \ \dot{u}(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \tag{2}$$

ここで, μ はせん断弾性定数, ρ は密度である. なお, ここでは物体力の項は無視している. また, 変数 u の上のドットは時間微分を表す. 式 (1), (2) を各領域 Ω_B, Ω_F で満たす面外変位 $u(\boldsymbol{x}, t)$ を演算子積分時間領域境界要素法と有限要素法の結合解法で求める.

3. 境界要素領域に対する定式化

3.1. 時間領域境界積分方程式

まず, 無限領域を含む均質な領域 Ω_B に対し, 放射条件の扱いが容易な時間領域境界要素法を適用することを考える. 領域 Ω_B に対する時間領域境界積分方程式は次のように書ける.

$$C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}, t) = u^{\rm in}(\boldsymbol{x}, t) + \int_\Gamma G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) * q(\boldsymbol{y}, t) d\Gamma_{\boldsymbol{y}} - \int_\Gamma S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) * u(\boldsymbol{y}, t) d\Gamma_{\boldsymbol{y}} \tag{3}$$

ここで, $C(\boldsymbol{x})$ は自由項 [9], $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$, $S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ は, それぞれ 2 次元面外波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核, $q(\boldsymbol{y}, t)$ は面外方向表面力であり, $q(\boldsymbol{x}, t) = \mu\partial u(\boldsymbol{x}, t)/\partial n^B$ と表される. ただし $\partial/\partial n^B$ は, Fig.1 で示すような境界 Ω_B から見た境界 Γ における外向き法線方向微分, $*$ は時間に関する畳込み積分を表す.

時間領域境界積分方程式 (3) の計算は, 従来の時間領域境界要素法では, 時間増分 Δt が小さい場合 [10] に数値解が不安定になることが知られている. 一方, 時間領域有限要素法においても, 解の精度を保証するためには小さい時間増分が要求される. そこで, 本研究では, 境界積分方程式 (3) の畳込み積分の離散化に, Lubich が提案した演算子積分法 (CQM: Convolution Quadrature Method) を適用することで, 時間増分が小さい場合でも, 精度の良い安定な数値解を得られるよう工夫する.

3.2. 演算子積分法

演算子積分法を時間領域境界積分方程式 (3) に適用する前に, Lubich の演算子積分法について簡単にまとめておく. 一般に, 畳込み積分は次のように表される.

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \tag{4}$$

時間増分を Δt とし, 時間 t を N ステップに分割し, $t = n\Delta t(n = 0, 1, \ldots, N)$ とすると, 式 (4) の畳込み積分は, Lubich の演算子積分法により,

$$f(n\Delta t) * g(n\Delta t) \simeq \sum_{k=0}^{n} \omega_{n-k}(\Delta t) g(k\Delta t),\ \ n = 0, 1 \ldots N \tag{5}$$

と離散化近似される. ここで, 式 (5) 中の ω_n は, 演算子積分法で畳込み積分を近似するために用いる重みであり, Laplace パラメータ s, 自然対数の底 e を用いた関数 $f(t)$ の Laplace 変換

$$F(s) = \int_0^\infty f(t){\rm e}^{-st}dt \tag{6}$$

を用いて次のように計算できる.

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{1}{2\pi {\rm i}}\int_{|z|=\mathcal{R}} F\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1} dz \simeq \frac{\mathcal{R}^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t}\right){\rm e}^{\frac{-2\pi {\rm i}nl}{L}} \tag{7}$$

ここで i は虚数単位である. 式 (7) において, f の Laplace 変換である関数 F の存在を保証するためには, 引数 $\gamma(z)/\Delta t$ の実部が正のときに正則でなければならない. また, 式 (7) の第一式から第二式への計算は, 台形公式を用いて行うことを前提とする. その場合, 引数 z_l は半径 $\mathcal{R} < 1$ の円周上の等分点 L を用いて, $z_l = \mathcal{R}{\rm e}^{2\pi {\rm i}l/L}$ によって計算される. ここで, $\mathcal{R}$ は目標とする精度 ϵ によって決定されるパラメータで,

$$\mathcal{R}^L = \sqrt{\epsilon} \tag{8}$$

として計算される. また, 式 (7) の $\gamma(z)$ は線形多段法における生成多項式の商を表しており, その一般形は

$$\gamma(z) = \frac{\alpha_0 z^k + \alpha_1 z^{k-1} \cdots + \alpha_k}{\beta_0 z^k + \beta_1 z^{k-1} \cdots + \beta_k} \tag{9}$$

によって与えられる. 線形多段法では, 式 (9) の係数 α_k や β_k の決定の仕方により様々な解法が提案されているが [11], 例えば $\alpha_k \neq 0, \beta_k = 1, \beta_j = 0(j < k)$ とすれば, k 次の後退差分法へ帰着でき, $\gamma(z)$ は

$$\gamma(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}(1-z)^i \tag{10}$$

で計算できる. 式 (5) を時間領域境界積分方程式 (3) の畳込み積分に適用し, 式 (7) の重み関数を用いると, 最終的に, 演算子積分法を用いて時間領域境界積分方程式を解く場合, 時間領域基本解は直接に必要ではなく, 時間領域基本解の Laplace 変換が必要となることがわかる.

3.3. 時間・空間に関する離散化

次に, 空間に関する離散化を線形要素を用いて行う. まず, 境界 Γ_j 上において, 局所座標 ξ に対する内挿関数 $\phi^i(\xi)$ を導入し [12], 境界 Γ_j 上の面外方向変位 u, および対応する表面力 q を, それぞれ,

$$u = \sum_{i=1}^{2} \phi^i(\xi) u_j^i \tag{11}$$

$$q = \mu \frac{\partial u}{\partial n^B} = \sum_{i=1}^{2} \phi^i(\xi) q_j^i \tag{12}$$

の形に近似する. ただし, u_j^i, q_j^i は, 空間に関して離散化された要素 Γ_j における節点 i での変位および表面力を表す. 境界積分方程式 (3) を, 時間に関しては式 (5) の演算子積分法を用いて離散化し, 空間に関しては, 式 (11), (12) を用いた M_B 個の線形要素で離散化すると, 離散化された境界積分方程式は, 次のように書くことができる.

$$C_i u_i(n\Delta t) = u_i^{\mathrm{in}}(n\Delta t) + \sum_{j=1}^{M_B} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[A_{ij}^{n-k,\alpha}(\boldsymbol{x}) q_j^{\alpha}(k\Delta t) - B_i^{n-k,\alpha}(\boldsymbol{x}) u_j^{\alpha}(k\Delta t) \right] \tag{13}$$

ここで, $A_{ij}^{m,\alpha}$, $B_{ij}^{m,\alpha}$ は影響関数であり, 式 (5), (7) を用いて次のように表される.

$$A_{ij}^{m,\alpha} = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{A}_{ij}^{l,\alpha} \mathrm{e}^{\frac{-2\pi iml}{L}} \tag{14}$$

$$B_{ij}^{m,\alpha} = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{B}_{ij}^{l,\alpha} \mathrm{e}^{\frac{-2\pi iml}{L}} \tag{15}$$

ただし, $\hat{A}_{ij}^{l,\alpha}$, $\hat{B}_{ij}^{l,\alpha}$ は

$$\hat{A}_{ij}^{l,\alpha} = \int_{\Gamma_j} \hat{G}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}, s_l) \phi_j^{\alpha} d\Gamma \tag{16}$$

$$\hat{B}_{ij}^{l,\alpha} = \int_{\Gamma_j} \hat{S}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}, s_l) \phi_j^{\alpha} d\Gamma \tag{17}$$

で表される. ここで, s_l は Laplace 変換のパラメータであり, 式 (14), (15) を高速フーリエ変換を用いて効率的に計算するために, 通常は $L = N$ とする. また, $\hat{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s_l)$, $\hat{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s_l)$ は Laplace 変換領域における 2 次元面外波動問題の基本解および対応する二重層核であり, それぞれ次のように表される.

$$\hat{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) = \frac{1}{2\pi\mu} K_0(sr) \tag{18}$$

$$\hat{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) = \mu \frac{\partial \hat{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s)}{\partial n^B} = -\frac{s}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n^B} K_1(sr) \tag{19}$$

ここに, $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, K_n は n 次の第 2 種変形 Bessel 関数である. 離散化された境界積分方程式 (13) において, 第 n ステップにおける面外方向変位 $u_j^{\alpha}(n\Delta t)$, および対応する表面力 $q_j^{\alpha}(n\Delta t)$ を左辺に移項すれば, 第 n ステップにおける $u_j^{\alpha}(n\Delta t)$, $q_j^{\alpha}(n\Delta t)$ は, 次の時間ステップ方程式を導くことで求まる.

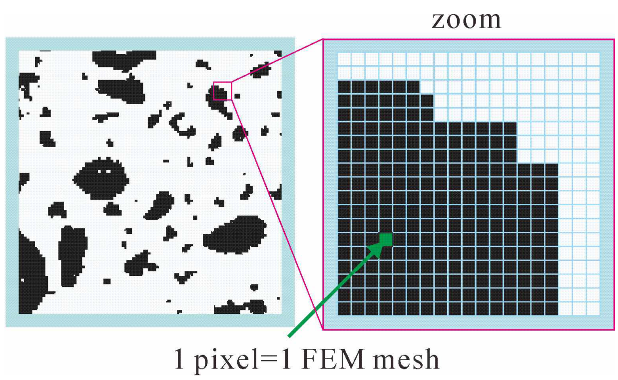

Fig.2　A digital data and magnification of a local area.

$$\sum_{j=1}^{M_B} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\left\{ C_i \delta_{ij} + B_{ij}^{0,\alpha} \right\} u_j^{\alpha}(n\Delta t) - A_{ij}^{0,\alpha} q_j^{\alpha}(n\Delta t) \right] = u_i^{\mathrm{in}}(n\Delta t) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{M_B} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[A_{ij}^{n-k} q_j(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k} u_i(k\Delta t) \right] \tag{20}$$

式 (20) は, 第 n ステップにおいて, 右辺が第 $n-1$ ステップまでの変位や表面力から成る. よって, $n = 1$ から初めて, 逐次的に式 (20) を解くことで, 第 N ステップまでの境界上の面外方向変位や表面力を全て求めることができる.

4. 有限要素領域に対する定式化

次に, 時間領域有限要素法の定式化を示す. 以下では, まずイメージベースモデリングについて簡単に説明した後, イメージベースモデリングの利用を前提とした有限要素法の定式化について説明する.

4.1. イメージベースモデリング

イメージベースモデリングとは, 解析対象のデジタル画像を利用して, 解析対象物の形状データをモデル化する方法である. 一般的に, デジタル画像は Fig.2 に示すように, 画素の集合として表されるため, 2 次元問題の場合は一画素 (ピクセル) を 1 つの有限要素に対応させることで解析を実施する. そのため, 基本的に有限要素は正方形となる. もちろん, 3 次元問題の場合は断層画像を数多く撮影することで奥行き方向を表現するため, 結果, 有限要素は直方体要素となる. イメージベースモデリングは, デジタル画像を数値解析の形状データとして利用するため, Fig.2 のように曲線 (曲面) を滑らかに表現することは難しいものの, 解析対象が複雑であったり, X 線等の検査を行わないと内部構造が明らかにならないようなモデルの場合は形状を容易に表現することができるため, 解析に必要なプリプロセスに必要な時間を大幅に削減することが可能である.

4.2. 有限要素方程式

4.1 節で述べたイメージベースモデリングを用いることを前提とした有限要素法の定式化について簡単に説明する. 重

み関数 ψ を式 (1) に乗じ, 有限要素領域 Ω_F に渡って積分し, Gauss の発散定理を用いると, 式 (1) は次のように表される.

$$\int_{\Omega_F}\mu\nabla u(\boldsymbol{x},t)\nabla^t\psi d\Omega_F+\int_{\Omega_F}\rho\psi\ddot{u}(\boldsymbol{x},t)d\Omega =\int_{\Gamma}\psi q(\boldsymbol{x},t)d\Gamma \tag{21}$$

ここで, $(\ )^t$ は転置を表している. 有限要素領域 Ω_F にイメージベースモデリングを適用し, Ω_F を M_F 個のピクセルに分割し, それを M_F 個の有限要素に対応させる. この場合, 有限要素は正方形要素となるので, 要素上の面外変位 u, および対応する表面力 q を空間に関して次のような局所座標 ξ,η に対する内挿関数 $N^i(\xi,\eta)$

$$u=\sum_{i=1}^{4}N^i(\xi,\eta)u_j^i \tag{22}$$

$$q=\mu\frac{\partial u}{\partial n^F}=\sum_{i=1}^{4}N^i(\xi,\eta)q_j^i \tag{23}$$

を用いて表現する. ただし $\partial/\partial n^F$ は有限要素の外向き法線方向微分を表す. 一方, 時間に関しては次の後退差分近似

$$\ddot{u}(\boldsymbol{x},t)=\frac{u(n\Delta t)-2u((n-1)\Delta t)+u((n-2)\Delta t)}{(\Delta t)^2} \tag{24}$$

を適用することで, $\psi=N^i$ とした Galerkin 法を用いれば, 式 (21) は次のように離散化近似される.

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{M_F}\sum_{\alpha=1}^{4}\int_{\Omega_{F_j}}[(\Delta t)^2\mu N^iN^\alpha+\rho N^iN^\alpha]u_j^\alpha(n\Delta t)d\Omega\\&-(\Delta t)^2\sum_{j=1}^{M_F}\sum_{\alpha=1}^{4}\int_{\partial\Omega_j}N^iN^\alpha q_j^\alpha(n\Delta t)d\partial\Omega\\&=\sum_{j=1}^{M_F}\sum_{\alpha=1}^{4}\int_{\Omega_{F_j}}\rho N^iN^\alpha(2u_j^\alpha((n-1)\Delta t)-u_j^\alpha((n-2)\Delta t))d\Omega\end{aligned} \tag{25}$$

ここで u_j^α, q_j^α はそれぞれ j 番目の有限要素 Ω_{F_j} における α 番目の節点の面外方向変位, および対応する表面力, $\partial\Omega_j$ は有限要素 Ω_{F_j} の縁を表す. 以上より, 離散化された時間領域におけるイメージベース有限要素方程式を示すことができた. 式 (25) より, 式 (25) の右辺は第 $n-1, n-2$ ステップにおける面外方向変位で表されるから, $n=1$ から始めて初期条件と共に逐次的に第 n ステップにおける面外方向変位や表面力を求めることができる.

5. 演算子積分時間領域境界要素法とイメージベース有限要素法の結合

本節にて, 演算子積分時間領域境界要素法とイメージベース有限要素法の結合方法について簡単にまとめておく. 一般的に, 境界要素法と有限要素法の結合解法では, 等価境界要素結合法と等価有限要素結合法の 2 種類が知られている [13]. 本研究では, 等価境界要素結合法を採用した. 等価境界要素結合法では, 有限要素離散化領域を等価な境界要素として考える手法であり, 既存の境界要素法のアルゴリズムを容易に応用できるメリットがある. 式 (20), (25) を連立して解くために,

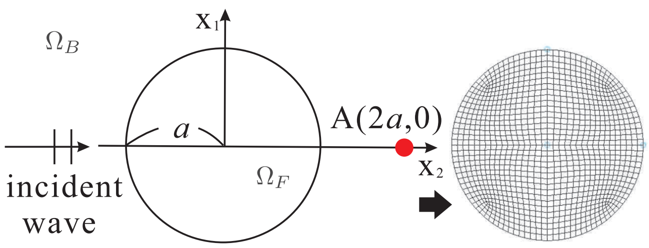

Fig.3　Analysis model for accuracy verification and its BEM-FEM mesh.

両手法間で時間増分 Δt を一定とし, 境界要素領域 Ω_B と有限要素領域 Ω_F との境界 Γ に次の連続条件を与える.

$$u_B(\boldsymbol{x},t)=u_F(\boldsymbol{x},t),\quad q_B(\boldsymbol{x},t)+q_F(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{26}$$

ここで, 下付き添え字 B は境界要素領域, F は有限要素領域における面外方向変位や表面力を表す. 式 (20), (25) に式 (26) を用いて第 n ステップにおける境界上の変位, 表面力を未知数とした連立一次方程式を導出し, 第一ステップから順に解くことにより, 全時間ステップにおける境界 Γ 上および有限要素領域 Ω_F 内の未知量を求めることができる. なお, 実際の計算では, 式 (25) の左辺第二項の $\partial\Omega_j$ に関する積分は, 隣り合う有限要素同士で打ち消し合うため, 境界 Γ に一致する部分のみを実行すればよいことに注意されたい.

6. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す. 以下の全ての計算では式 (8) における ϵ を $\epsilon=1.0\times10^{-12}$ として計算を行った. また, 時間増分 Δt は, Ω_B, Ω_F で同一とした.

6.1. 計算精度の確認

まず, イメージベースモデリングを時間領域有限要素法に適用する前に, 演算子積分時間領域境界要素法と時間領域有限要素法の結合が適切に実行できていることを確認する. Fig.3 のような無限領域中の原点中心, 半径 a の円形介在物を考え, 円形介在物の外側領域を演算子積分時間領域境界要素法で解析する領域 Ω_B, 円形介在物を有限要素法で解析する領域 Ω_F とする. ここで, Ω_B, Ω_F それぞれにおける密度 ρ とせん断弾性定数 μ を一致させれば, 解くべき問題は, 境界要素領域 Ω_B からの入射波の伝搬問題となる. したがって, 得られる数値解は, 演算子積分時間領域境界要素法で解く積分方程式 (3) における入射波 $u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)$ と一致する. ここでは, 入射波 $u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)$ に, 次の正弦形パルスを用いた.

$$u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}u_0(1-\cos 2\pi\alpha)$$
$$\alpha=\begin{cases}\dfrac{c}{\lambda}\Big(t-\dfrac{x_1+a}{c}\Big) & \text{for}\quad (0\le\alpha\le1)\\ 0 & \text{for}\quad \text{otherwise}\end{cases} \tag{27}$$

ただし, c は波速, u_0 は振幅, λ は波長を表す.

Fig.4 に, Fig.3 における観測点 A$(2a,0)$ での様々な時間増分 Δt に対する全変位の時間変化を示す. なお, 比較のため, この問題の解析解となる式 (27) で表される入射波も黒の実線

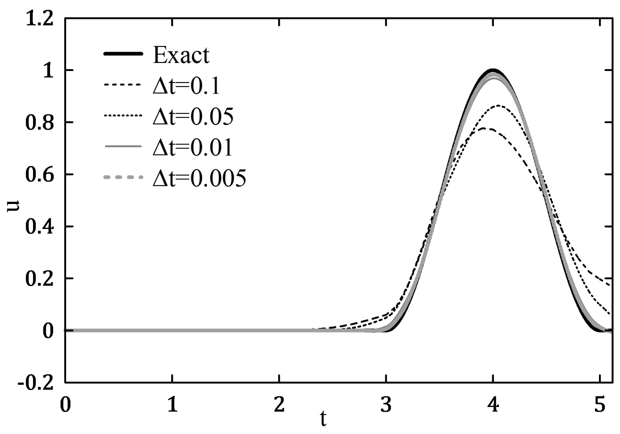

Fig.4　Time variation of total displacements at A in Fig.3 for various time increments.

で示してある. 解析では, $\lambda = 2.0$, $a = 1.0$, $\rho = 1.0$, $c = 1.0$, $u_0 = 1.0$ とした. また, 1 波長に対して十分な要素, 節点を配置できるよう, 円形介在物は四角形メッシュを用いて Fig.3 右に示すよう, 有限要素数 $M_F = 1092$, 境界要素数 $M_B = 104$ の要素数で離散化した. このとき, 全節点数は 1145 で与えられる. Fig.4 より, 時間増分 Δt が $\Delta t = 0.1, 0.05$ と比較的大きい場合は $t = 4.0$ のピーク値において，厳密解と 20%〜30% の相対誤差がみられる. しかしながら, $\Delta t = 0.01, 0.005$ の場合, 相対誤差は 3% 程度となっており, 厳密解に良く一致していることがわかる. 観測点 A は有限要素領域 Ω_F の後方に位置することから, 時間増分 Δt を十分小さく取ることで, 両手法の計算精度が高まり, 高精度な結果が得られている. 以上より, 時間増分が小さい場合でも, 数値解は安定で, かつ高精度に解析が実行できていることが確かめられた.

6.2. イメージベースモデリングを適用した場合の数値解析例

次に, 時間領域有限要素法にイメージベースモデリングを適用した場合の数値解析例を示す. 解析の一例として, 複数の散乱体がランダム配置されている固体中での波動散乱問題を考える. 複数の散乱体作成例として, Fig.5(a) のようなコンクリートの X 線 CT デジタル画像を利用した. なお, 現段階ではイメージベースモデリングを適用した一連の結合解法を開発することに主眼をおいているため, デジタル画像から識別した散乱体に実際の材料定数を与えて解析を実行するわけでないことに注意する.

6.2.1. イメージベースモデリングによる解析モデルの作成

まず, イメージベースモデリングによる解析モデルの作成を行う. 解析に用いたデジタル画像データは, Fig.5(a) のような 200 × 200 の画素数のものとした. したがって, デジタル画像の 1 画素 (1 ピクセル) を有限要素法の 1 有限要素と整合させた場合, 有限要素領域 Ω_F の有限要素数 M_F は $M_F = 40000$ であり, 結合境界 Γ は 800 要素となる. 解析モデルの作成に当たって, まず Fig.5 (a) のようなグレースケールデジタル画像の各画素を, 0〜255 までの整数で表現する. そして, その 0〜255

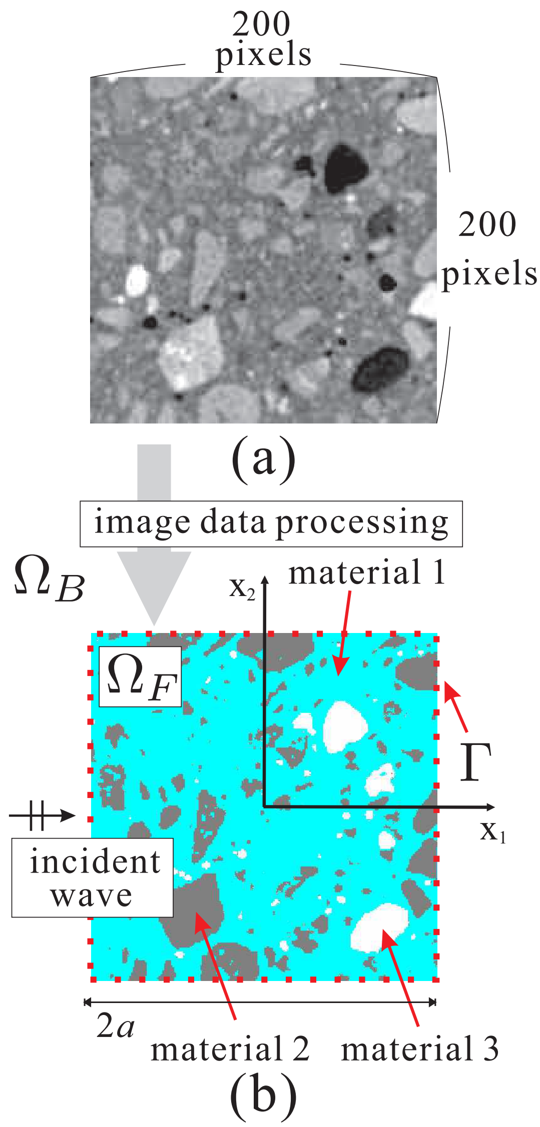

Fig.5　Image-based modelling using a X-ray CT image (a) original X-ray CT image and (b) the image data processing.

の整数に閾値を設け, 非均質領域 Ω_F を 3 つの material に識別した. ここでは Fig.5(b) のようにグレースケールが 151〜255 を material 1, 61〜150 を material 2, 0〜60 の部分を material 3 とすることで, 領域 Ω_F を 3 値化処理し, 3 つの異なる材料を表現した. このように, イメージベースモデリングでは, 解析対象のデジタル画像を作成することさえできれば容易に有限要素モデルを作成することができる.

6.2.2. 解析結果

6.2.1 節より, 全体の解析モデルは, Fig.5(b) のような無限領域 Ω_B 中の長さ $2a \times 2a$ の非均質領域 Ω_F における入射波の散乱問題となる. ただし, 演算子積分時間領域境界要素法で解析する無限領域を含んだ Ω_B の材料は, Ω_F における material 1 と同一な材料であるとした. そのため, Ω_B における密度 ρ やせん断弾性定数 μ は Ω_F における material 1 のそれらと等しくなる. 解析で与える入射波は, 6.1 節と同様, 式 (27) で与えられる正弦形パルスを用いた. また, 各 material 1, 2, 3 に与えるパラメータをそれぞれ下付き添字 1, 2, 3 で表現し, $c_1 = 1.0$,

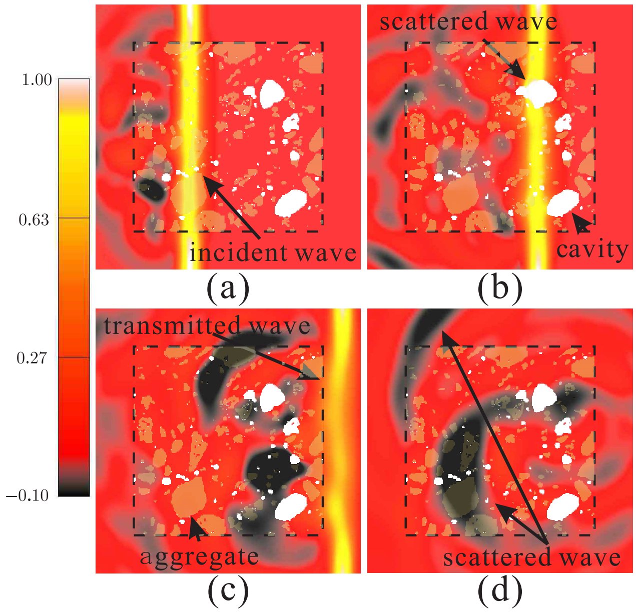

Fig.6 Total wave fields around the inhomogeneous area at (a) $n=400$ (b) $n=600$ (c) $n=800$ (d) $n=1000$ time steps.

$c_2=\sqrt{2}$, $c_3=1.0\times10^{-15}$, $\rho_1=\rho_2=\rho_3=1.0$ とした. なお $u_0=1.0$, $a=2.5$, $\Delta t=0.01$ とし, 入射波の波長 λ は, $\lambda=1.0$, 総時間ステップ数 N は $N=1024$ とした．正方形領域の中心に Fig.5(b) のように原点を設けた.

Fig.6(a)-(d) は, 時間ステップ n がそれぞれ $n=400$, 600, 800, 1000 での非均質領域 Ω_F 周辺の全変位場を示している. Fig.6(a)-(b) より, 非均質領域 Ω_F を伝搬した入射波は, 均質領域である Ω_B を伝搬する場合に比べて, 入射波の波面がやや先に伝搬している様子を見て取れる．material 2 の波速が他に比べて大きいためであり, 入射波は正しく伝搬していると考えられる. また, 均質領域 Ω_B では, 非均質領域 Ω_F 内の material 2, material 3 による散乱波が伝搬している様子も確認することができる. Fig.6(c) では, 非均質領域 Ω_F を透過した入射波, Fig.6(d) では, Ω_F 内の散乱体同士による多重散乱も確認することができる. Fig.6(a)-(d) を通して, 演算子積分時間領域境界要素法を用いているため, 散乱波は無限遠方に伝搬している. また, 結合境界 Γ において, 物理的に不要な波動の発生も確認することができない. 以上の結果から，本手法を用いて複雑な非均質領域および無限遠を含む波動問題を, 正しく再現できており, 本手法の妥当性が示せた.

7. まとめと今後の課題

2 次元面外波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法・イメージベース有限要素法結合解法を開発した. イメージベースモデリングを適用した数値解析例を示すことで, 本手法の妥当性を示した. イメージベースモデリングを取り入れた場合, 解析手法としての汎用性を高めることができるが, 解くべき問題の自由度は大きく増加する. そのため, 今後は, 高速化手法の適用方法の検討についても行う予定である. また, コンクリート供試体に対する水浸超音波探傷試験や空気超音波シミュレーション等, イメージベースモデリングと無限遠を容易に扱える境界要素法の利点を活かすことが可能な実用的な応用問題についても解析していく予定である.

謝辞

本研究の一部は, 平成 27 年度学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点公募型共同研究 (課題番号 jh150027) の支援の下, 実施されました. また, 本研究で用いたイメージベース画像の撮影には群馬大学機器分析センターの林史夫准教授にご協力いただきました.

参考文献

(1) C. Lubich: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**(1998), pp.129-145.

(2) 斎藤隆泰，石田貴之，福井卓雄，廣瀬壮一: 演算子積分法および高速多重極法を用いた新しい二次元時間領域動弾性境界要素法について, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.11,(2008), pp.193-200.

(3) T. Maruyama, T. Saitoh, T. Q. Bui and S. Hirose: Transient elastic wave analysis of 3-D large-scale cavities by fast multipole BEM using implicit Runge-Kutta convolution quadrature, *Comput. Method. Appl. M.*, Vol.303,(2016), pp.231-259.

(4) T. Saitoh, F. Chikazawa and S. Hirose: Convolution quadrature time-domain boundary element method for 2-D fluid-saturated porous media, *Appl. math. model.*, Vol.38,(2014), pp.3724-3740.

(5) 福井卓雄, 斎藤隆泰: Lubich の演算子積分法における高速多重極法，日本シミュレーション学会論文誌，小特集, 境界要素法の新展開, Vol.28 No.3,(2009), pp.17-22.

(6) K. Terada, T. Miura and N. Kikuchi: Digital image-based modeling applied to the homogenization analysis of composite materials, *Comput. Mech.*, Vol.20(4), (1997), pp.331-346.

(7) 中畑和之, 高田恭兵: 有限積分法 (FIT) のイメージベース波動伝搬シミュレーションへの応用, 非破壊検査, 特集号, 超音波シミュレーションの展開, Vol.60, (2011), pp.204-209.

(8) D. Givoli: High-order local non-reflecting boundary conditions: a review, *Wave Motion*, Vol.39,(2004), pp.319-326.

(9) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000).

(10) 福井卓雄: 境界要素法の研究-高速・高精度計算法の開発と応用-, 京都大学博士論文, (1998).

(11) 数値積分法の基礎と応用, 日本機械学会編, コロナ社, (2003).

(12) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行共著: 境界要素法, 計算力学と CAE シリーズ 2, 培風館, (1991).

(13) 神谷紀生, 北英輔著: 偏微分方程式の数値解法, 共立出版株式会社, (1998).