

# 2次元音響問題における境界要素法を用いたインピーダンス境界条件を有する散乱体のトポロジー最適化

## A TOPOLOGY OPTIMIZATION IN 2D ACOUSTICS WITH THE IMPEDANCE BOUNDARY CONDITION USING THE BEM

花田 萌美<sup>1)</sup>, 飯盛 浩司<sup>2)</sup>, 高橋 徹<sup>3)</sup>, 松本 敏郎<sup>4)</sup>

Moemi HANADA, Hiroshi ISAKARI, Toru TAKAHASHI and Toshirou MATSUMOTO

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: m.hanada@nuem.nagoya-u.ac.jp)  
 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.ac.jp)  
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)  
 4) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

The topology optimization is known as the most flexible computer-aided design method and applied to the various fields. To apply the topology optimization to the wave problems, we have attempted to utilize the BEM and the level set method in the process of the optimization. This paper presents an application of such topology optimization method for 2D acoustics with the impedance boundary condition, which can modelize the acoustic absorptivity of materials. A detailed derivation of the topological derivative for a scatterer with the impedance boundary condition and some numerical results are shown in this paper.

**Key Words:** Topology Optimization, 2D Acoustics, Boundary Element Method, Level Set Method

### 1. 緒言

トポロジー最適化は最も設計自由度の高い最適化手法として知られており, 現在, 構造問題や熱問題など様々な分野への適用例が見られる [1, 2]. 当研究室では, 境界要素法を用いた各種波動問題に対するトポロジー最適化手法の開発に取り組み, これまでに電磁波動問題や音響問題といった各種波動問題に対するトポロジー最適化を実現した [3, 4]. 最適化アルゴリズム中の順解析過程においてソルバとして境界要素法を用いることにより, 有限要素法を用いた解析では吸収境界を用いて近似的に取り扱う必要があった無限遠での放射条件を近似なく厳密に取り扱うことが可能である. また, 繰り返し順解析を要求する最適化過程において, 境界のみの離散化によって解析を行うことができるため, 境界要素法を用いることにより, 有限要素法を用いた場合と比べてメッシュの再生成のコストを抑えることができる. 境界要素法を用いるにあたって, 境界形状を精度よく表現するために, 本研究ではレベルセット法を用いる. 昨年, 当研究室ではこれらの手法を用いた3次元音響問題に対するトポロジー最適化に取り組み, 最適化実行の結果, 得られる形状が複雑に入り組んだものとな

ることがわかった [4]. そのような物体形状の視認性の低さにより最適化により得られた設計案の評価が困難であった. 設計工学においては, 最適設計により得られた設計案を詳細に吟味し, 目的関数の最小化を達成するメカニズムに関する知見を蓄積することは重要である. したがって, 今後本手法の応用範囲を広げる取り組みを行うにあたって, 同手法を用いた2次元音響問題に対するトポロジー最適化の実現の必要性が認められる. このため, 本研究の目的を境界要素法を用いた2次元音響問題に対するトポロジー最適化手法の開発とし, トポロジー導関数の導出と最適化実行例を示す. また, 得られた最終形状から一部の散乱体を取り除くことで各部位がどのように音波伝達に影響を及ぼしているのかを可視化した例を示し, 提案手法により得られた解の検討を行う.

### 2. 定式化

#### 2.1. 2次元音場における最適化問題の定式化

Fig.1のように, 領域 $\Omega_1$ 中に境界 $\Gamma$ を有する散乱体 $\Omega_2$ が存在する2次元領域に入射波 $p^{\text{in}}$ が入射する場合を考える. なお, 領域 $\Omega_1$ は無限遠を含む $\mathbb{R}^2$ の領域とする. このとき, 式(1)の最適化問題を考える.

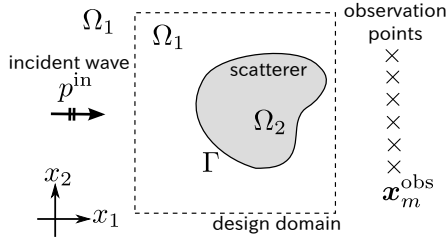


Fig. 1 Settings for optimal design.

$$\min_{\Omega_1, \Omega_2} J = \sum_{m=1}^M f(p(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})) + \int_{\Gamma} g(p, q) d\Gamma \quad (1)$$

ここに、第1項は領域  $\Omega_1$  中の観測点  $\mathbf{x}_m^{\text{obs}}$  において定義される目的関数を表す項であり、 $M$  は観測点の総数である。また、第2項は散乱体の境界上において定義される目的関数を表す項である。なお最大化を考える場合には、関数  $f, g$  に負の符号を与えればよい。なお、ここでは簡単のため、 $\Gamma$  はあらかじめ存在した境界のみを考える。制約条件として式 (2)-(5) および Sommerfeld の放射条件を要求する。

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \quad (2)$$

$$p = \bar{p} \quad \text{on } \Gamma_p \quad (3)$$

$$q \equiv \frac{\partial p}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (4)$$

$$q = \frac{i\rho\omega}{z} p \quad \text{on } \Gamma_z \quad (5)$$

ここに、境界  $\Gamma$  のうち、Dirichlet 条件を有する境界を  $\Gamma_p$ 、Neumann 境界条件を有する境界を  $\Gamma_q$ 、インピーダンス境界条件を有する境界を  $\Gamma_z$  とし、 $\Gamma_p \cup \Gamma_q \cup \Gamma_z = \Gamma$  を満足するものとする。また、 $p$  は音圧、 $k$  は波数、 $n$  は境界  $\Gamma$  における  $\Omega_1$  の外向き単位法線ベクトル、 $z$  は音響インピーダンス、 $\rho$  は媒質の密度、 $\omega$  は入射波の角周波数を表す。 $\bar{p}, \bar{q}$  はそれぞれ音圧、音圧の法線方向微分の既知量を表す。なお、本研究では時間依存項は  $e^{-i\omega t}$  と仮定する。

## 2.2. レベルセット関数について

本研究では、式 (6) で定義されるレベルセット関数  $\phi(\mathbf{x})$  を用いて領域および境界を表現し、目的関数を最小化する固定設計領域内のレベルセット関数の分布を探索することで最適化を行う。

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{in } \Omega_1 \\ 0 = \phi(\mathbf{x}) & \text{on } \Gamma \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{in } \Omega_2 \end{cases} \quad (6)$$

レベルセット関数の更新には、仮想時刻  $t$  を導入し、以下の反応拡散方程式 (7) を用いる。

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial t} = k\mathcal{T}(\mathbf{x}) + \tau \Delta \phi(\mathbf{x}) \quad (7)$$

ここに、 $k$  は適当な正の定数係数、 $\mathcal{T}$  はトポロジー導関数である。また、 $\tau$  は形状の複雑さを規定する係数であり、 $\tau$  の値が大きいほど  $\mathbf{x}$  におけるレベルセット関数の曲率に対するペナ

ルティが大きくなり、よりなめらかな境界を持つ連続的な構造が得られるようになる [5]。以下の 2.3 節でトポロジー導関数  $\mathcal{T}$  についての詳細を述べる。

## 2.3. トポロジー導関数の導出

Fig.1 の領域  $\Omega_1$  にインピーダンス境界を有する半径  $\varepsilon$  の微小円形領域  $\Omega_\varepsilon$  が湧き出す時を考える。領域  $\Omega_1$  に微小円が湧き出すことによって、領域  $\Omega_1$  において  $p \rightarrow p + \delta p, q \rightarrow q + \delta q$  のように  $p, q$  が変化したとき、微小円の湧き出し前と湧き出し後の差分をとると、 $\delta p$  について次の境界値問題を求められる。

$$\Delta(\delta p) + k^2(\delta p) = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \quad (8)$$

$$\delta p = 0 \quad \text{on } \Gamma_p \quad (9)$$

$$\delta q = 0 \quad \text{on } \Gamma_q \quad (10)$$

$$\delta p = -\frac{iz}{\rho\omega} \delta q \quad \text{on } \Gamma_z \quad (11)$$

$$\delta p = -\frac{iz}{\rho\omega} \delta q - \left( p + \frac{iz}{\rho\omega} q \right) \quad \text{on } \Gamma_\varepsilon \quad (12)$$

領域  $\Omega_1$  に微小円が湧き出すことにより、 $J \rightarrow J + \delta J$  と変化するときに、

$$J + \delta J = \sum_{m=1}^M f\left((p + \delta p)(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})\right) + \int_{\Gamma} g(p + \delta p, q + \delta q) d\Gamma \quad (13)$$

と書き表すことができる。式 (1), (13) より微小円発生前後の差分をとると、目的関数の変化分  $\delta J$  は以下のように表される [3, 4]。

$$\begin{aligned} \delta J = \text{Re} & \left[ \sum_{m=1}^M \frac{\partial f(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})}{\partial p} \delta p(\mathbf{x}_m^{\text{obs}}) \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial g}{\partial p} \delta p + \frac{\partial g}{\partial q} \delta q \right) d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (14)$$

本研究では、この  $\delta J$  の評価に随伴変数法を用いる。随伴問題を次のように定義する。

$$\Delta \lambda(\mathbf{x}) + k^2 \lambda(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^M \frac{\partial f(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})}{\partial p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m^{\text{obs}}) = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \quad (15)$$

$$\lambda = -\frac{\partial g}{\partial q} \quad \text{on } \Gamma_p \quad (16)$$

$$\mu \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial p} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (17)$$

$$\mu = \frac{i\rho\omega}{z} \left( \lambda + \frac{\partial g}{\partial q} \right) + \frac{\partial g}{\partial p} \quad \text{on } \Gamma_z \quad (18)$$

ここに、 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m^{\text{obs}})$  は Dirac のデルタ関数であり、無限遠において  $\lambda$  は Sommerfeld の放射条件を満たすとする。ここで、 $\lambda \times$  (式 (8)) -  $\delta p \times$  (式 (15)) より、次式が得られる。

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega_1} (\lambda \Delta \delta p - \delta p \Delta \lambda) d\Omega \\ & - \int_{\Omega_1} \delta p \sum_{m=1}^M \frac{\partial f(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})}{\partial p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m^{\text{obs}}) d\Omega \end{aligned} \quad (19)$$

Gauss の発散定理および Dirac のデルタ関数の性質を用いると、式 (19) より、 $\delta p$  と  $\lambda$  に関する次の相反定理が得られる。

$$\int_{\Gamma \cup \Gamma_\varepsilon} (\delta p \mu - \lambda \delta q) d\Gamma + \sum_{m=1}^M \frac{\partial f(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})}{\partial p} \delta p(\mathbf{x}_m^{\text{obs}}) = 0 \quad (20)$$

得られた相反定理に各々の境界条件を代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \delta p(\mathbf{x}_m^{\text{obs}}) \frac{\partial f(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})}{\partial p} + \int_{\Gamma_p} \frac{\partial g}{\partial q} \delta q d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \frac{\partial g}{\partial p} \delta p d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_z} \delta p \left( \frac{i\rho\omega}{z} \frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial p} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} (\delta p\mu - \lambda\delta q) d\Gamma = 0 \quad (21) \end{aligned}$$

ここで、式 (14) で表される  $\delta J$  についても式 (21) と同様に境界条件を代入すると、 $\delta J$  は次のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned} \delta J = \text{Re} & \left[ \sum_{m=1}^M \frac{\partial f(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})}{\partial p} \delta p(\mathbf{x}_m^{\text{obs}}) + \int_{\Gamma_p} \frac{\partial g}{\partial q} \delta q d\Gamma \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_q} \frac{\partial g}{\partial p} \delta p d\Gamma + \int_{\Gamma_z} \left( \frac{i\rho\omega}{z} \frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial p} \right) \delta p d\Gamma \right] \quad (22) \end{aligned}$$

式 (21)、式 (22) より、 $\delta J$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta J = \text{Re} & \left[ \int_{\Gamma_\varepsilon} \delta p \left( \frac{i\rho\omega}{z} \lambda - \mu \right) d\Gamma \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_\varepsilon} \lambda \frac{i\rho\omega}{z} p d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} \lambda q d\Gamma \right] \quad (23) \end{aligned}$$

ここで、式 (23) の第 3 項に Gauss の発散定理を適用すると、次の式 (24) を得る。

$$\begin{aligned} \delta J = \text{Re} & \left[ \int_{\Gamma_\varepsilon} \delta p \left( \frac{i\rho\omega}{z} \lambda - \mu \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \lambda \frac{i\rho\omega}{z} p d\Gamma \right. \\ & \left. - \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla\lambda) \cdot (\nabla p) d\Omega + \int_{\Omega_\varepsilon} \lambda k^2 p d\Omega \right] \quad (24) \end{aligned}$$

ここで、 $\varepsilon \rightarrow 0$  において、式 (8)、式 (12) の  $\delta p$  に関する境界値問題は次のように近似できる。

$$\Delta\delta p + k^2\delta p = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon} \quad (25)$$

$$\delta p = -\frac{iz}{\rho\omega} \delta q - \left( p^0 + \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial p^0}{\partial n} \right) \quad \text{on } \Gamma_\varepsilon \quad (26)$$

ここに、 $p^0$  は  $\Omega_\varepsilon$  の中心  $\mathbf{x}^0$  における  $p$  を表す。この境界値問題の解のうち、放射条件を満たす関数は Hankel 関数を用いて次のように書くことができる。

$$\delta p(\mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \quad (27)$$

ここに、 $r$  及び  $\theta$  は  $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$  の極座標表示を表す。また、極座標を用いて微小円境界の単位法線ベクトルは次のように表すことができる。

$$\mathbf{n} = - \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad (28)$$

このとき、 $\delta q$  は次のように書くことができる。

$$\delta q(\mathbf{x}) = \frac{\partial\delta p}{\partial n} = -\frac{\partial\delta p}{\partial r} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\partial H_n^{(1)}(kr)}{\partial r} e^{in\theta} \quad (29)$$

式 (26) に式 (27)-(29) を代入すると、左辺は次式のようになる。

$$\delta p + \frac{iz}{\rho\omega} \delta q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \left\{ H_n^{(1)}(k\varepsilon) - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial H_n^{(1)}(k\varepsilon)}{\partial r} \right\} \quad (30)$$

また、右辺は次式のようになる。

$$\begin{aligned} - \left( p^0 + \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial p^0}{\partial n} \right) &= -p^0 + \frac{iz}{2\rho\omega} \left( \frac{\partial p^0}{\partial x_1} - i \frac{\partial p^0}{\partial x_2} \right) e^{i\theta} \\ &+ \frac{iz}{2\rho\omega} \left( \frac{\partial p^0}{\partial x_1} + i \frac{\partial p^0}{\partial x_2} \right) e^{-i\theta} \quad (31) \end{aligned}$$

$e^{in\theta}$  について係数比較すると、以下のような関係が得られる。

$$a_0 = -\frac{p^0}{H_0^{(1)}(k\varepsilon) - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial H_0^{(1)}(k\varepsilon)}{\partial r}} \quad (32)$$

$$a_1 = \frac{\frac{iz}{2\rho\omega} \left( \frac{\partial p^0}{\partial x_1} - i \frac{\partial p^0}{\partial x_2} \right)}{H_1^{(1)}(k\varepsilon) - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial H_1^{(1)}(k\varepsilon)}{\partial r}} \quad (33)$$

$$a_{-1} = \frac{\frac{iz}{2\rho\omega} \left( \frac{\partial p^0}{\partial x_1} + i \frac{\partial p^0}{\partial x_2} \right)}{H_{-1}^{(1)}(k\varepsilon) - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial H_{-1}^{(1)}(k\varepsilon)}{\partial r}} \quad (34)$$

ここで、Hankel 関数の以下の性質を用いる。

$$H_{-n}^{(1)}(kr) = (-1)^n H_n^{(1)}(kr) \quad (35)$$

以上より、 $\delta p$  は次式のように書き表される。

$$\begin{aligned} \delta p(\mathbf{x}) = & -\frac{p^0}{H_0^{(1)}(k\varepsilon) - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial H_0^{(1)}(k\varepsilon)}{\partial r}} H_0^{(1)}(kr) \\ & + \frac{\frac{iz}{2\rho\omega} \left( \frac{\partial p^0}{\partial x_1} - i \frac{\partial p^0}{\partial x_2} \right)}{H_1^{(1)}(k\varepsilon) - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial H_1^{(1)}(k\varepsilon)}{\partial r}} H_1^{(1)}(kr) e^{i\theta} \\ & + \frac{\frac{iz}{2\rho\omega} \left( \frac{\partial p^0}{\partial x_1} + i \frac{\partial p^0}{\partial x_2} \right)}{H_1^{(1)}(k\varepsilon) - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial H_1^{(1)}(k\varepsilon)}{\partial r}} H_1^{(1)}(kr) e^{-i\theta} \quad (36) \end{aligned}$$

Euler の公式を用いて指数関数を三角関数に置き換え整理すると、微小円境界  $\Gamma_\varepsilon$  上での  $\delta p$  は次式のように書き表される。

$$\begin{aligned} \delta p(\mathbf{x}) \Big|_{\Gamma_\varepsilon} = & -p^0 \frac{H_0^{(1)}(k\varepsilon)}{H_0^{(1)}(k\varepsilon) - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial H_0^{(1)}(k\varepsilon)}{\partial r}} \\ & - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial p^0}{\partial n} \frac{H_1^{(1)}(k\varepsilon)}{H_1^{(1)}(k\varepsilon) - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial H_1^{(1)}(k\varepsilon)}{\partial r}} \quad (37) \end{aligned}$$

ここで、 $F_i = \frac{H_i^{(1)}(k\varepsilon)}{H_i^{(1)}(k\varepsilon) - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial H_i^{(1)}(k\varepsilon)}{\partial r}}$  とし、 $F_i$  の  $\varepsilon \rightarrow 0$  での漸近展開を考えると、次のようになる。

$$F_0 = \frac{1}{2z} \left( 1 + i \frac{2\gamma}{\pi} \right) \rho\omega\pi\varepsilon + \frac{\rho\omega}{z} \log\left(\frac{1}{2}k\varepsilon\right)\varepsilon + O(\varepsilon^3) \quad (38)$$

$$F_1 = -\frac{i\rho\omega}{z} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (39)$$

ここに、 $\gamma$  は Euler 定数とする。式 (37) に式 (38)、(39) を代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta p(\mathbf{x}) \Big|_{\Gamma_\varepsilon} = & -p^0 \left\{ \frac{1}{2z} \left( 1 + i \frac{2\gamma}{\pi} \right) \rho\omega\pi\varepsilon + \frac{\rho\omega}{z} \log\left(\frac{1}{2}k\varepsilon\right)\varepsilon \right\} \\ & - \varepsilon \frac{\partial p^0}{\partial n} + O(\varepsilon^2) \quad (40) \end{aligned}$$

得られた  $\delta p$  を用いて式 (24) の  $\delta J$  の各項を評価すると、以下のようになる。

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \delta p \left( \frac{i\rho\omega}{z} \lambda - \mu \right) d\Gamma = O(\varepsilon^2) \quad (41)$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \lambda \frac{i\rho\omega}{z} p d\Gamma = \frac{i\rho\omega}{z} \lambda^0 p^0 \times 2\pi\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (42)$$

$$- \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla\lambda) \cdot (\nabla p) d\Omega = O(\varepsilon^2) \quad (43)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \lambda k^2 p d\Omega = O(\varepsilon^2) \quad (44)$$

したがって、 $\delta J$  の  $\varepsilon \rightarrow 0$  における漸近展開は次式となる。

$$\delta J = \text{Re} \left[ \frac{i\rho\omega}{z} \lambda^0 p^0 \times 2\pi\varepsilon \right] + O(\varepsilon^2) \quad (45)$$

さて、トポロジー導関数は、考えている領域に微小円形散乱体が発生したときに、その半径  $\varepsilon$  で目的関数の変分  $\delta J$  を漸近展開したときの leading term の係数として定義される。すなわち、

$$\delta J = \mathcal{T}a(\varepsilon) + o(a(\varepsilon)) \quad (46)$$

がトポロジー導関数  $\mathcal{T}$  の定義である。ここに、 $a(\varepsilon)$  は  $\varepsilon > 0$  における単調増加関数である。本問題におけるトポロジー導関数  $\mathcal{T}$  は  $a$  として、微小円の周長を選ぶことにより、

$$\mathcal{T} = \text{Re} \left[ \frac{i\rho\omega}{z} \lambda^0 p^0 \right] \quad (47)$$

と得られる。本研究では導いたトポロジー導関数を用いてレベルセット関数の更新を行い、最適化問題の解析をする。

### 3. 数値解析結果

本章では、前章で導出したトポロジー導関数の妥当性の検証および、トポロジー最適化の適用例を示す。

#### 3.1. トポロジー導関数の妥当性の検証

##### 3.1.1. 検証方法について

本節では、2.3 節で導出したトポロジー導関数の妥当性の検証を行う。トポロジー導関数  $\mathcal{T}$  は領域に微小円形散乱体が発生した際の目的関数の変化を微小円の周長で除したものである。このため、実際に固定設計領域内の各点に微小円形散乱体が発生させ、目的関数の変化を周長で除した差分法による値と  $\mathcal{T}$  を比較することで妥当性の検証が可能である。検証にあたって解析に用いた諸条件を Fig.2 に示す。

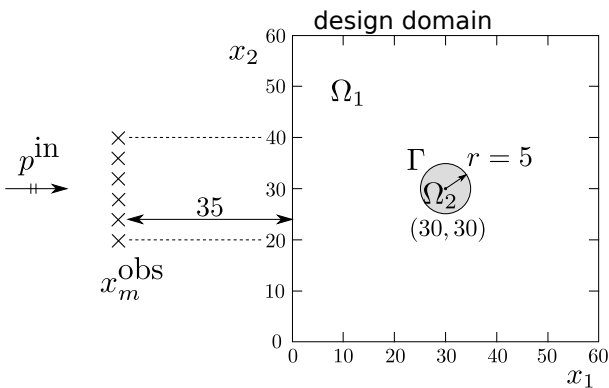


Fig. 2 Settings for numerical experiment.

固定設計領域のサイズは  $60 \times 60$  とし、固定設計領域中央に半径  $r = 5$  の円状の散乱体を配置した。境界  $\Gamma$  は  $z = 100$  のインピーダンス境界を有するとし、散乱体外部  $\Omega_1$  の媒質の

密度は  $\rho = 1.29$ 、入射波  $p^{\text{in}}$  は  $x_1$  軸と平行に入射する振幅 1、波数  $k = 0.18$ 、角周波数  $\omega = 60$  の平面波とした。インピーダンス  $z = 100$  は垂直吸音率  $\alpha = 0.64$  に対応する。また、目的関数は式 (48) で表される観測点における音場強度の総和とし、観測点を  $(x_1, x_2) = (-35, 20), (-35, 22), \dots, (-35, 40)$  の 11 点とした。

$$J = \sum_{m=1}^M \frac{1}{2} |p(x_m^{\text{obs}})|^2 \quad (48)$$

また、差分法において発生させる微小円形散乱体の半径は  $\varepsilon = 0.001$  とした。

##### 3.1.2. 検証結果

比較を行った結果を以下に示す。Fig.3 は  $x_2 = 17$  上におけるトポロジー導関数と差分法によって得られた値をプロットしたものである。

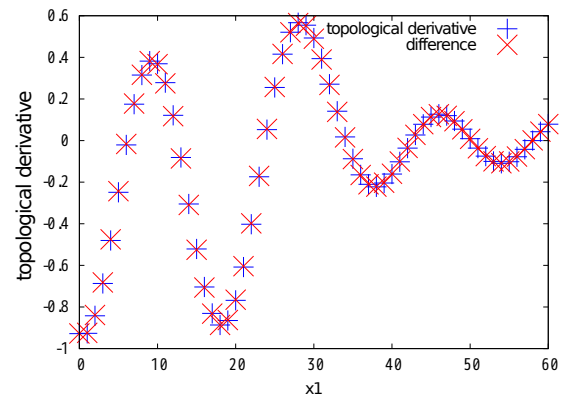


Fig. 3 Comparing derivatives on  $x_2 = 17$ .

Fig.3 からわかるように、トポロジー導関数と差分法によって得られた値はよく一致しており、第 2.3 節で導出したトポロジー導関数の妥当性が確認できた。

#### 3.2. 最適化実行例

##### 3.2.1. 最適化に用いた諸条件について

導出したトポロジー導関数を用い、観測点における音場強度を最小化する散乱体構造を求めるトポロジー最適化を行った。最適化に用いた諸条件を Fig.4 に示す。

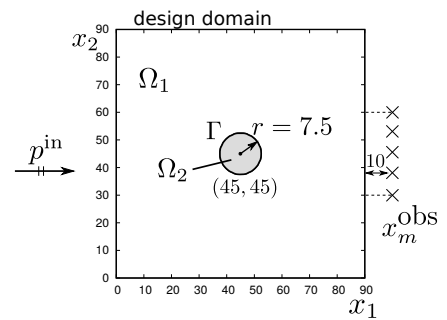


Fig. 4 Initial configuration.

固定設計領域のサイズは  $90 \times 90$  とし、固定設計領域中央に半径  $r = 7.5$  の円状の散乱体を配置したものを初期形状

として与えた. 境界  $\Gamma$  は  $z = 100$  のインピーダンス境界を有するものとし, 散乱体外部  $\Omega_1$  の媒質の密度は  $\rho = 1.0$ , 入射波  $p^{\text{in}}$  は  $x_1$  軸と平行に入射する振幅 1, 波数  $k = 0.067$ , 角周波数  $\omega = 20$  の平面波とした. また, 目的関数は式 (48) で表される観測点における音場強度の総和とし, 観測点を  $(x_1, x_2) = (100, 30), (100, 33), \dots, (100, 60)$  の 11 点とした. 以上の条件下で, 繰り返し回数 (ステップ数) を 40 とし最適化を実行した.

### 3.2.2. 最適化結果

目的関数の推移を Fig.5 に示す.

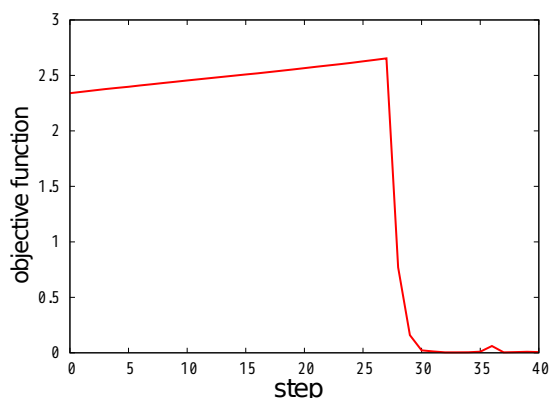


Fig. 5 History of the objective function  $J$ .

最終形状を Fig.6 に示す. ここに, 図中央の点線部は初期形状を表す. 最終形状における目的関数値は  $J = 6.239 \times 10^{-3}$  であり, 初期形状における目的関数値  $J = 2.340$  に比べ約 0.27%まで低下した.

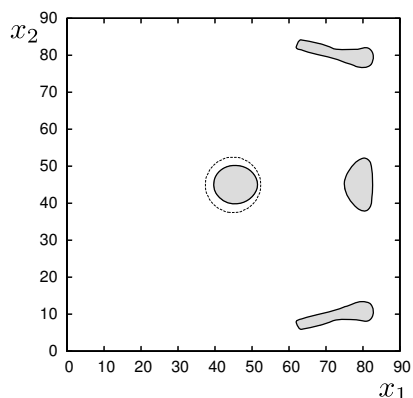


Fig. 6 Gained shape at the final step.

また, 固定設計領域周辺での音場強度の分布を Fig.7 に示す. Fig.7 より, 観測点周辺において音場強度が小さくなっていることが確認できる.

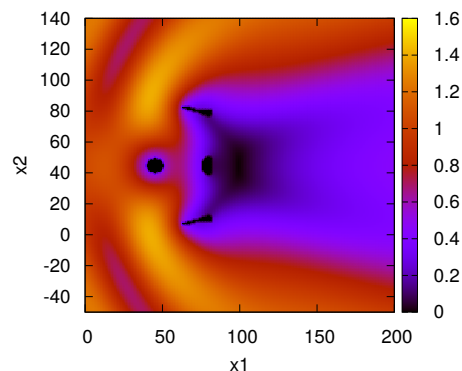


Fig. 7 Distribution of the acoustic power at the final step.

### 3.2.3. 最終形状の考察

以降では, 得られた最終形状から一部の散乱体を取り除くことで, 各部位がどのように音波伝達に影響を及ぼしているのかを調べる. 固定設計領域右端中央に位置していた散乱体, 固定設計領域中央に位置していた散乱体, 固定設計領域右端下部に位置していた散乱体をそれぞれ除去した状態を除去例 1, 2, 3 として音場解析を行った結果を Fig.8, 9, 10 に示す. 便宜上, 以下では各例で除去された散乱体をそれぞれ散乱体 1, 散乱体 2, 散乱体 3 と呼称することとする. また, 固定設計領域右端上部に位置している散乱体を散乱体 4 と呼称し, 散乱体 3 と散乱体 4 は対称の形状であるため, これらに関しては代表的に散乱体 3 の除去例のみを取り扱う.

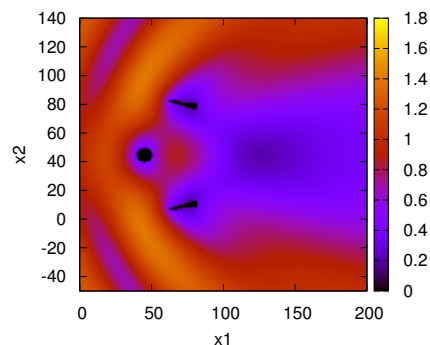


Fig. 8 Distribution of the acoustic power of Example 1.

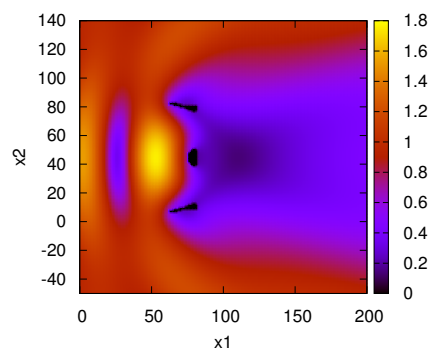


Fig. 9 Distribution of the acoustic power of Example 2.

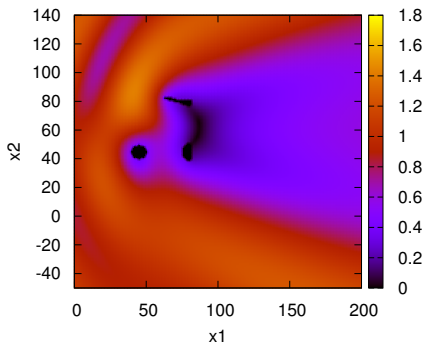


Fig. 10 Distribution of the acoustic power of Example 3.

各例における目的関数値を Table 1 に示す。ここに、Table 1 中の No scatterer case は固定設計領域中に一切の散乱体を配置せず入射波のみを与えたときの目的関数値である。

Table 1 Values of the objective function  $J$ .

	$J$
Original shape	$6.239 \times 10^{-3}$
Example 1	0.862
Example 2	0.182
Example 3	0.405
No scatterer case	5.500

まず散乱体 1 に着目すると、除去例のうちで除去例 1 での目的関数値がもっとも大きくなっていることから、得られた最適形状において散乱体 1 が極めて重要な効果を持っていることが推測される。Fig.8-10 から、散乱体 1 が存在しない構造では観測点付近において音場強度を下げるようなはたらきは強くないことがわかる。ここで、除去例 2 において散乱体 2 が存在しない場合でも散乱体 1 と散乱体 3、散乱体 4 によって観測点付近の音場強度が低下しているのがわかることと、除去例 3 観測点付近において散乱体 4 が存在する上部では音場強度が大きく低下しているのに対し、下部ではほとんど音場強度の低下が見られないことから、散乱体 1 により生じた散乱波と散乱体 3,4 により生じた散乱波が打ち消し合うことで、観測点付近における音場強度を低下させていることが推測される。次に、散乱体 2 に着目すると、最終形状と除去例 2 を見比べた際、 $x_1 > 90$  の領域については波形には差がほとんどなく音場強度に差が現れている。このため、散乱体 2 は、初期形状として与えた散乱体が残存したものであるために目的関数値を低下させるメカニズムに大きな影響は持たないが、散乱波が打ち消し合うように配置された散乱体 1, 3, 4 に対し、それらに入射する波を弱めるはたらきを持っていることが推測される。散乱体 3, 4 は上述の通り、散乱体 1, 3, 4 の散乱波が打ち消し合うように配置されており、観測点付近における音場強度を低下させるはたらきを有していることが推測される。

#### 4. 結言

本研究では、境界要素法を用いた波動問題のトポロジー最適化手法の開発の取り組みとして、2次元音響問題におけるインピーダンス境界条件を有する材料について、トポロジー導関数の導出を行い、数値実験によりその妥当性を確認し、また観測点における音圧を最小化する最適化実行例を示し、その有効性を確認した。さらに、2次元問題を取り扱うことで、提案手法で得られた設計案が観測点について音圧最小化を達成するメカニズムを詳細に検討することができた。一方で、本研究で開発した手法によって得られる形状は初期形状に依存することがわかっている。このため本手法を応用するにあたっては初期形状依存性についての検討が必要であり、今後の課題とする。

謝辞

本研究の一部は、JSPS 科研費 (26870269) の助成を受けて行ったものです。

#### 参考文献

- (1) Jae Seok Choi, Takayuki Yamada, Kazuhiro Izui, Shinji Nishiwaki, and Jeonghoon Yoo. Topology optimization using a reaction-diffusion equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200, No. 29, pp. 2407-2420, 2011.
- (2) Guoxian Jing, Hiroshi Isakari, Toshiro Matsumoto, Takayuki Yamada, and Toru Takahashi. Level set-based topology optimization for 2d heat conduction problems using bem with objective function defined on design-dependent boundary with heat transfer boundary condition. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 61, pp. 61-70, 2015.
- (3) 阿部史昌, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. レベルセット法と境界要素法を用いた二次元電磁波動問題におけるトポロジー最適化について. 計算数理工学論文集, Vol. 13, pp. 33-42, 2013.
- (4) 近藤豊大, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. 3次元音響問題におけるレベルセット法と高速多重境界要素法に基づくインピーダンス境界を有する散乱体のトポロジー最適化. 計算数理工学論文集, Vol. 14, pp. 19-24, 2014.
- (5) Takayuki Yamada, Kazuhiro Izui, Shinji Nishiwaki, and Akihiro Takezawa. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45, pp. 2876-2891, 2010.