

Helmholtz 方程式の境界値問題に関連する固有値のトポロジー導関数と高速直接境界要素法を用いたその数値計算

THE TOPOLOGICAL DERIVATIVE FOR EIGENVALUES RELATED TO HELMHOLTZ' EQUATION AND ITS NUMERICAL EVALUATION WITH A FAST DIRECT BEM

飯盛 浩司¹⁾, 北林 達也²⁾, 高橋 徹³⁾, 松本 敏郎⁴⁾

Hiroshi ISAKARI, Tatsuya KITABAYASHI, Toru TAKAHASHI and Toshiro MATSUMOTO

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.kitabayashi@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

In this paper, we present a rigorous derivation of the topological derivative related to non-linear eigenvalue problems stemmed from the boundary element method for boundary value problems of the Helmholtz equation. It is shown that the topological derivative of the eigenvalue is associated with the eigenpair of the relevant eigenvalue. The validity of the topological derivative is confirmed with numerical examples by the SS method, in which a fast direct solver with the fast multipole representation of the boundary integral equation is employed. Also, a numerical example of a material configuration design to manipulate some eigenfrequencies by the topological derivative is shown.

Key Words: Topological Derivative, Non-linear Eigenvalue Problem, SS Method, Fast Direct Solver, Boundary Element Method, Photonic/Phononic Structure

1. 序

近年, フォトニック (フォノニック) 結晶等, その周期構造に起因して特異な波動特性を持つ新規材料が注目を集めている. フォトニック (フォノニック) 結晶は, 電磁波 (弾性波) に対するフルバンドギャップ, すなわち任意の方向に進む任意の偏光の波が透過できない周波数帯を有する材料であり^(1, 2), これまでにない波動特性を有する新規デバイスへの応用が見込まれるとして, その研究開発が進められている⁽³⁾.

フォトニック (フォノニック) 結晶の設計開発においては, 所望の周波数帯におけるフルバンドギャップを実現する構造を設計することが重要である. したがって, フォトニック (フォノニック) 結晶の最適設計問題はフルバンドギャップ幅の最大化問題として定式化することができる. フルバンドギャップは, 第一 Brillouin ゾーン中の全ての波数ベクトルに対し, 周期境界値問題の固有値が存在しない周波数帯として定義される⁽⁴⁾ ため, フルバンドギャップの上下端を周期境界値問題の固有値問題を解いて求め, これらを移動させる最適化問題を解く必要がある.

構造物の振動特性に関連した固有振動数の最小 (大) 化問題など, 境界値問題の固有値に関する最適設計問題は古くから研究されている⁽⁵⁾. また, トポロジー最適化に関する検討もごく初期の頃から行われている⁽⁶⁾. 近年では, フォトニック結晶のバンドギャップ幅の最大化問題に関する研究も盛んに行われている^(7, 8). Cox and Dobson⁽⁷⁾ はバンドギャップ幅の最大化問題の可解性を示し, そのトポロジー導関数を導出した. Burger et al.⁽⁸⁾ は, Cox and Dobson⁽⁷⁾ の結果を利用し, レベルセット法に基づく最適設計を行った. これらの先行研究に共通するのは, 周期境界値問題に関連する固有値の感度解析に有限要素法を用いる点である.

一方, 最適化アルゴリズムにおいて形状を逐次変更しながら順解析を繰り返す必要があることを考えると, remeshing のコストが低い境界要素法の利用も考えられる. 境界値問題の固有値問題を有限要素法で再定式化した場合には一般化固有値問題に, 境界要素法で再定式化した場合には非線形固有値問題となることから, 従来は境界要素法の利用は現実的ではなかった. しかし, 近年提案された Sakurai-Sugiura (SS) 法⁽⁹⁾ を利用することにより, 非線形固有値問題を比較的容易に解くことが可能となった. 実際, 境界要素法に由来する

非線形固有値問題を SS 法で解いた例として Gao ら⁽¹⁰⁾, 周期境界値問題に関連する固有値問題を境界要素法と SS 法を利用して解いた例として野瀬・西村⁽¹¹⁾ を挙げることができる。

本研究では, 将来的にはフォトニック (フォノンニック) 結晶の最適設計を SS 法と境界要素法を利用して行うことを見据える。ここではその第一歩として, 2次元 Helmholtz 方程式の境界値問題における固有値のトポロジー感度解析を境界要素法と SS 法を利用して行う手法の開発を行う。上述の通り, 最適化アルゴリズム内で境界要素法と SS 法による固有値解析を繰り返す必要があるため, 高速な順解析手法が必要となる。しかしながら, SS 法の運用においては, 多重固有値が存在する場合には境界要素法で得られる線形方程式を複数本の右辺ベクトルに対して解く必要がある (Block SS 法) ため, 従来の反復法に基づく多重極法^(12, 13) で境界要素法を加速することは現実的でない。したがって, ここでは多重極法と疎行列に対する直接法を組み合わせた手法⁽¹⁴⁾ を利用し, 順解析を加速する。

本論文の構成を以下に示す。2節では2次元 Helmholtz 方程式の境界値問題に関連した固有値問題の定式化を示した後, 固有値のトポロジー導関数を導出する。3節では, 2節に示した固有値問題が境界要素法を利用して再定式化すると非線形固有値問題となることを示し, これを SS 法と境界要素法を用いて解く方法について概説する。4節では, 境界要素法を多重極法と疎行列に対する直接法を利用して加速する方法について簡単に述べる。5節で, 提案手法の有効性を確認する目的でいくつかの数値計算例を示し, 6節で結論及び今後の課題を述べる。

2. トポロジー導関数

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$u(x) = 0 \quad x \in \Gamma_u \subset \Gamma := \partial\Omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0 \quad x \in \Gamma_q := \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_u \quad (3)$$

を満たす非自明な関数 u (固有ベクトル) が存在する波数 k (固有値) を求める固有値問題を考える。ここに, Ω は \mathbb{R}^2 の有界な部分領域, n は Γ における Ω の外向き単位法線である。

上記の固有値問題の解の1つ k に対し, $\lambda = k^2$ とおく。本節の目的は, Ω から微小円形領域 Ω_ε を取り除いた際の λ の変化の割合, 所謂トポロジー導関数を導出することである。簡単のため, λ の重複度は1とする。

境界値問題 (1)–(3) より, 固有値の二乗, 固有ベクトルの対 (λ, u) に対し, 次の恒等式が成立する。

$$0 = - \int_{\Gamma_u} \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla u d\Omega - \lambda \int_{\Omega} \tilde{u} u d\Omega \quad (4)$$

ここに, \tilde{u} は任意の関数である。さて, Ω 内部に空孔 Ω_ε が出現し, $(\lambda, u) \rightarrow (\lambda + \delta\lambda, u + \delta u)$ と変化したとする。この

とき, $u + \delta u$ は次の境界値問題を満たす。

$$\Delta(u + \delta u)(x) + (\lambda + \delta\lambda)(u + \delta u)(x) = 0 \quad x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon \quad (5)$$

$$(u + \delta u)(x) = 0 \quad x \in \Gamma_u \quad (6)$$

$$\frac{\partial(u + \delta u)(x)}{\partial n} = 0 \quad x \in \Gamma_q \quad (7)$$

$$\frac{\partial(u + \delta u)(x)}{\partial n} = 0 \quad x \in \Gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \quad (8)$$

また, Ω_ε の出現に伴い, 式 (4) は次式となる。

$$0 = - \int_{\Gamma_u} \tilde{u} \frac{\partial(u + \delta u)}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla(u + \delta u) d\Omega - (\lambda + \delta\lambda) \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon} \tilde{u}(u + \delta u) d\Omega \quad (9)$$

ここで, Γ_ε 上の法線は Ω の外向きを正と定義した。式 (4) 及び式 (2), (6) より得られる $\delta u|_{\Gamma_u} = 0$ を利用し, δu と $\delta\lambda$ の積を含む微小項を無視すれば, 式 (9) は次式となる。

$$0 = - \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon} (\Delta \tilde{u} + \lambda \tilde{u}) \delta u d\Omega - \int_{\Gamma_u} \tilde{u} \frac{\partial \delta u}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \delta u d\Gamma - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla u d\Omega + \lambda \int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{u} u d\Omega + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \delta u d\Gamma - \delta\lambda \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon} \tilde{u} u d\Omega \quad (10)$$

式 (10) において \tilde{u} として u を選べば, 式 (10) の右辺第1–3項が消去でき, 次式を得る。

$$\delta\lambda = \frac{- \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2) d\Omega + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} \delta u d\Gamma}{\int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon} |u|^2 d\Omega} \quad (11)$$

ここで, 固有ベクトル u には定数倍の自由度があるため,

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\Omega = 1 \quad (12)$$

で正規化し, 正規化された固有ベクトルを再び u と書けば, 式 (11) は次式となる。

$$\delta\lambda = \frac{- \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2) d\Omega + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} \delta u d\Gamma}{1 - \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 d\Omega} \quad (13)$$

この時, 式 (13) の右辺分子第3項は零となる。また, ε が小さいことを利用すると式 (13) の右辺分子第2項に現れる $\delta u|_{\Gamma_\varepsilon}$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$ における Laplace 方程式の解で近似できる。さらに, Ω_ε が半径 ε の円するとき δu を円筒関数で展開することで $\delta\lambda$ は次式で評価できる⁽¹⁵⁾。

$$\delta\lambda = \frac{- \int_{\Omega_\varepsilon} (2|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2) d\Omega}{1 - \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^2 d\Omega} \quad (14)$$

式 (14) の $\varepsilon \rightarrow 0$ における漸近展開は以下となる。

$$\delta\lambda = -(2|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2) \pi \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (15)$$

したがって, λ のトポロジー導関数 \mathcal{T} は次式で与えられる。

$$\mathcal{T} = -2|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 \quad (16)$$

3. SS 法

本節では、トポロジー導関数 (16) の評価に必要な固有値の二乗 λ 及び固有ベクトル u の計算に用いる SS 法について、その概略を述べる。SS 法の詳細については Asakura ら⁽⁹⁾、境界要素法を利用した SS 法の運用については Gao ら⁽¹⁰⁾ を参照されたい。

境界値問題 (1)–(3) を境界積分方程式を用いて再定式化すると次式を得る。

$$\frac{u(x)}{2} = \left(\mathcal{S}_{\Gamma_u} \frac{\partial u}{\partial n} \right) (x) - (\mathcal{D}_{\Gamma_q} u) (x) \quad (17)$$

ここに、 \mathcal{S}_{Γ} 、 \mathcal{D}_{Γ} は Γ で定義された積分作用素であり、次式で定義される。

$$(\mathcal{S}_{\Gamma} \phi)(x) = \int_{\Gamma} G(x-y) \phi(y) d\Gamma_y \quad (18)$$

$$(\mathcal{D}_{\Gamma} \psi)(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} \psi(y) d\Gamma_y \quad (19)$$

G は二次元 Helmholtz 方程式の基本解であり、次の表現を有する。

$$G(x-y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) \quad (20)$$

ここに、 $H_0^{(1)}$ は 0 次の第 1 種 Hankel 関数である。(17) を適当に離散化すると、解くべき固有値問題は、次式を満たす非自明なベクトル x が存在する波数 k を求める問題となる。

$$A(k)x = 0 \quad (21)$$

ここに、 $A(k) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 、 $x \in \mathbb{C}^n$ は各々、式 (17) に現れる積分作用素、密度関数を離散化して得られる行列及びベクトルである (n は境界要素数)。ここで、 k は行列 $A(k)$ 内に非線形に含まれることに注意する。すなわち、解くべき固有値問題は非線形固有値問題へと帰着される。

SS 法を用いると、固有値の探索範囲を複素面内の閉曲線内部に限定することで、非線形固有値問題を一般化固有値問題へと変換することができる⁽⁹⁾。以下、その概略を示す。

次の関数 $f(z)$ を定義する。

$$f(z) = u^H A(z)^{-1} v \quad (22)$$

ここに、 $u, v \in \mathbb{C}^n$ は零でないベクトルである。 $f(z)$ を用いて、次のモーメント μ_j ($j = 0, \dots, 2m-1$) を定義する。

$$\mu_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^j f(z) dz \quad (23)$$

ここに、 γ は複素面内の単純閉曲線である。 μ_j から得られる Hankel 行列 H_m 、 $H_m^<$ を各々次式で定義する。

$$H_m = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{m-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m-1} & \mu_m & \cdots & \mu_{2m-2} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$H_m^< = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m \\ \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{2m-1} \end{pmatrix} \quad (25)$$

ここに、 m は γ 内の相異なる固有値の数である。このようにして定義した Hankel 行列を用いて定義される行列束 $H_m^< - \lambda H_m$ の固有値 λ は元の非線形固有値問題の固有値のうち閉曲線 γ 内に存在するものに等しくなる。なお、実際の数値計算においては u, v としてランダムなベクトルを与える。また、 γ 内の固有値の数は未知であるため、実際の数値計算においては適当に大きな自然数 M に対して Hankel 行列 H_M の特異値を計算し、適当に設定した十分に小さな値 δ よりも大きな特異値の数を m とする。

$A(z)$ の固有ベクトル x_j は、 λ_j に属する $H_m^< - \lambda H_m$ の固有ベクトル w_j を用いて、次式で計算できる。

$$x_j = [s_0, s_1, \dots, s_{m-1}] w_j \quad (26)$$

ここに、 s_j は次式で定義されるベクトルである。

$$s_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^j A(z)^{-1} v dz \quad (27)$$

なお、重複固有値が存在する場合にはその数値計算の精度を改良したブロック版を用いる必要があり、上記のランダムベクトル $u, v \in \mathbb{C}^n$ を行列 $U, V \in \mathbb{C}^{n \times \ell}$ で置き換える。

4. 高速直接多重極法 (direct FMM)

ブロック版の SS 法を用いる場合、式 (22) の計算において $A(z)^{-1} V$ を計算する必要がある。すなわち、 ℓ 本の右辺ベクトルに対し、 $A(z)$ を係数行列とする代数方程式を解く必要がある。代数方程式のソルバに反復法を利用する場合、 ℓ 回の境界要素解析を行うことになり、効率が悪い。そこで、本研究では高速な直接解法を利用する。直接解法を用いることにより、 $A(z)^{-1} V$ の計算にかかるコストは $A(z)^{-1} v$ のそれとほぼ等しくなると期待される。境界要素法の高速直接解法の選択肢としては Martinsson and Rokhlin の手法⁽¹⁶⁾ をはじめ、いくつかの選択肢があるが、ここでは Pals⁽¹⁴⁾ に倣い、高速多重極法の諸式を利用した高速直接解法を利用する。なお、以降、本論文では Pals の方法を高速直接多重極法あるいは direct FMM と呼称する。

紙面の制約からその詳細は省略するが、direct FMM の基本的なアイデアは、もとの未知数に加え、多重極モーメント及び局所展開係数を未知数とすることであり、これに対応して係数行列には M2L 等の多重極法の各種オペレータが並ぶ。この場合、未知数は素朴な境界要素法のそれと比して増大するが、スパースな系を得る。得られたスパースな係数行列を持つ代数方程式を大規模疎行列用の汎用ソルバで解く。多重極展開が必ずしも「最良な」低ランク近似を与えないことに起因して、各種オペレータを代数的な手法で低ランク近似できる可能性があるため、係数行列のサイズが大きくなりすぎる場合には、多重極法の各種オペレータを代数的な手法で低ランク近似する。低ランク近似に特異値分解を用いれば、低ランク近似のランクを固定した場合に元の行列と近似行列の差が作用素ノルム及びフロベニウスノルムの意味で最小となる⁽¹⁷⁾ が、計算時間の観点から、本研究ではオペレータの低ランク近似には Interpolative decomposition (ID)⁽¹⁸⁾ を用いる。

なお、本論文では多重極法の諸式には低周波多重極法のそれを用いる。

5. 数値計算例

本節では、SS法と高速直接多重極法を利用した固有値解析及び上述のトポロジー導関数の validation に関する数値計算結果と併せて、簡便なトポロジー最適化を行った例を示す。

5.1. 正方形領域における Neumann 問題の固有値

はじめに、direct FMM と SS 法の code の validation とし、 $\Omega = \{x \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$ において Helmholtz 方程式 (1) 及び $\partial\Omega$ において斉次 Neumann 条件 (3) を満たす非自明解 u が存在する固有値 k を求める問題を解いた。この問題の固有値の二乗 $\lambda_{n,m}$ 、式 (12) で正規化された固有ベクトル $u_{n,m}$ は解析的に評価でき、次式で与えられる。

$$\lambda_{n,m} = \pi^2(n^2 + m^2) \quad (28)$$

$$u_{n,m}(x) = 2 \cos(m\pi x_1) \cos(n\pi x_2) \quad (29)$$

ここに、 n, m は非負の整数である。

SS法を利用して、 $\lambda_{1,1} \simeq 19.7392088022$ (ここで、SS法で求まる固有値は $\sqrt{\lambda_{1,1}} = \sqrt{2}\pi$ であることに注意する) を求めた。SS法の使用に際しては、複素面における積分路 γ は $4.5 + 0i$ を中心とする半径 0.5 の円とし、 γ 上に積分点を 512 点等間隔に配置した。また、Hankel 行列の次数は 8、block SS法のランダムベクトルは 6 本使用し、特異値の打ち切り基準は $\delta = 1$ とした。direct FMM においては、正方形の一边を 320 の境界要素に分割し、ID の打ち切り誤差は 10^{-16} とした。数値計算の結果、 $19.739848076 - 3.955671281 \times 10^{-4}i$ が得られた。数値解の解析解との相対誤差は 3.530×10^{-5} であり、工学的に十分な精度で固有値を計算することができたことが分かる。なお、計算時間は CPU として Intel Xeon E5-2630 v2 (2.60GHz) を搭載した PC で 358.15 秒であった。code は OpenMP を用いて並列化しており、使用した thread 数は 12 である。また、素朴な境界要素法を用いた場合の計算時間は 1754 秒であった。direct FMM により解法を加速できたことが分かる。

5.2. 正方形領域における Neumann 問題の固有値の感度

次に、Neumann 問題の固有値の感度を計算した例を示す。式 (28) の $\lambda_{n,m}$ のトポロジー導関数は、式 (16) を用いると次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n,m}(x) = & -8\pi^2(m^2 \sin^2 m\pi x_1 \cos^2 n\pi x_2 \\ & + n^2 \cos^2 m\pi x_1 \sin^2 n\pi x_2) \\ & + 4\pi^2(n^2 + m^2) \cos^2 m\pi x_1 \cos^2 n\pi x_2 \end{aligned} \quad (30)$$

図 1 に、 Ω のいくつかの点における式 (30) を用いて計算したトポロジー導関数 $\mathcal{T}_{1,1}$ を SS 法と境界要素法によって求めた固有値の二乗 $\lambda_{1,1}$ のトポロジー差分 ($\Omega \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$ に対する固有値の二乗と $\lambda_{1,1}$ の差を微小円 Ω_ε の面積で除したものと) 併せて plot した。両者は概ね一致しており、上記の定式化の validation となったと考える。なお、差分計算においては半径 $\varepsilon = 0.01$ の微小円を用い、その表面を 80 個の境界要素で

分割した。その他の parameter は全て前小節で示したものと同じ値を用いた。

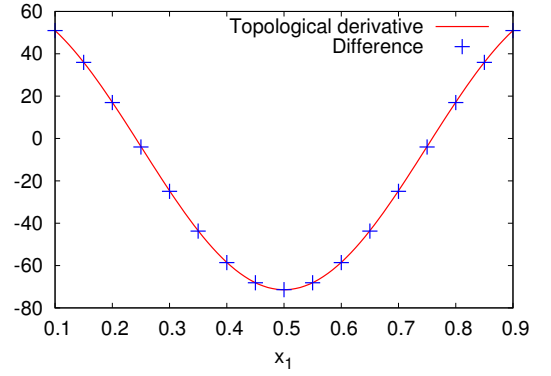


Fig. 1 Topological derivatives for the Neumann problem on $x_2 = 0.1$.

5.3. トポロジー導関数を用いた簡便な最適設計

最後に提案法を用いてトポロジー導関数 (16) を求め、最適設計を行った例を示す。図 2 に示すような、 $\Omega = \{x \mid 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ 、中心 (0.45, 0.5), (1.0, 0.5), (1.55, 0.5)、半径 0.1 の空孔を持つ初期形状を設定し、上下端と空孔を斉次 Neumann 境界、左右端を斉次 Dirichlet 境界とした場合に、 Ω 内に新たに空孔を配置することにより固有値 (の二乗) を最大・小化をする最適化問題を取り扱った。

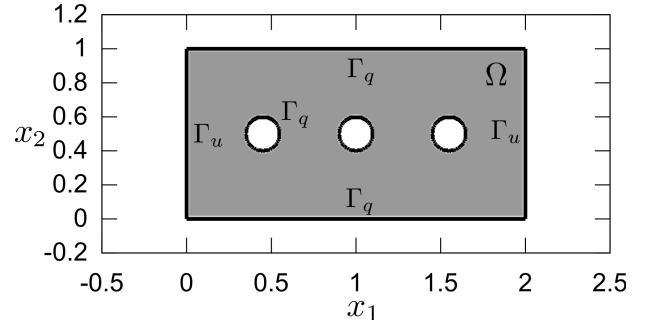


Fig. 2 The initial configuration.

SS法の積分路 γ を中心 $3.0 + 0i$ 、半径 1.5 の円とし、積分点の数は 256 とした。初期形状 (図 2) に対する固有値は図 3 のように得られた。ここで、図 3 における 2 つ目に小さい固有値の二乗 λ_2 と 3 つ目に小さい固有値の二乗 λ_3 についてそれぞれ最小化、最大化を行った。すなわち、目的関数として

$$J = \lambda_2 - \lambda_3 \quad (31)$$

を設定し、 J の最小化を考えた。ここでは、式 (31) の J に対するトポロジー導関数 (16) をもとに得られたトポロジー導関数を用いて形状を決定した。具体的には、以下を満たす領域 Ω_{void} を空孔とする最適設計を行った。

$$\Omega_{\text{void}} = \left\{ x \mid \frac{\mathcal{T}(x)}{\max_{y \in \Omega} |\mathcal{T}(y)|} < c \text{ かつ } \min_{y \in \partial\Omega} |x - y| > d \right\} \quad (32)$$

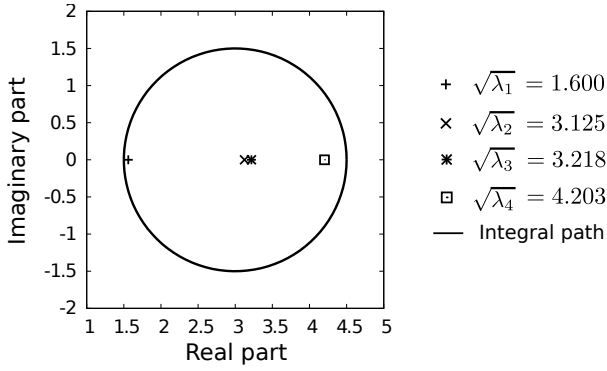


Fig. 3 Eigenvalues for the initial configuration.

なお、(32)の二つ目の条件は、トポロジー導関数は境界が移動した場合の目的関数の変化に関する情報は持たないため、設計領域を $(d, 2-d) \otimes (d, 1-d)$ に制限したことを意味する。式(32)において $c = -0.26$, $d = 0.05$ としたところ、図4に示す形状が得られた。また、最適形状における固有値は図5のように得られた。

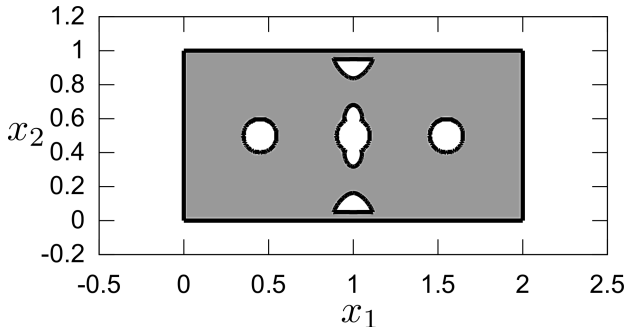


Fig. 4 An optimal configuration.

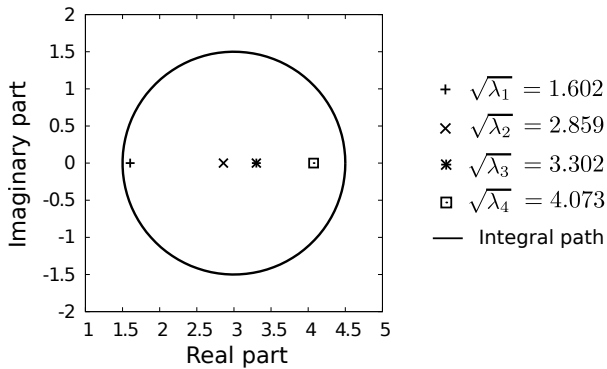


Fig. 5 Eigenvalues for the optimal configuration.

図5から確認できるように、初期形状に対して $\sqrt{\lambda_2} = 3.125$, $\sqrt{\lambda_3} = 3.218$ であった固有値は最適形状に対しては $\sqrt{\lambda_2} = 2.859$, $\sqrt{\lambda_3} = 3.302$ となった。図3と図5を比較しても、両固有値間の距離が大きくなったことが確認できる。初期形状、最適形状における固有値ベクトルは図6、7に示すとおりとなった。モードの大まかな形状は初期形状と最適形状で変化しておらず、所望の固有値を移動させることに成功したこと

が確認できる。

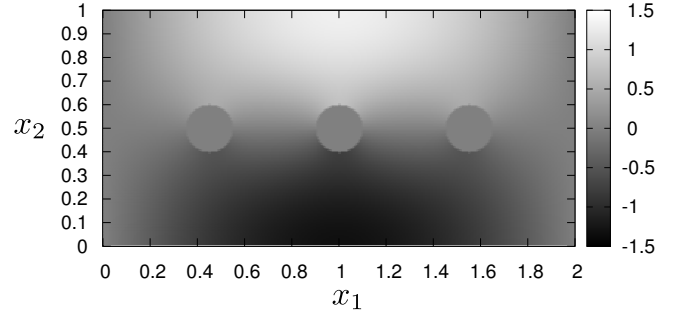
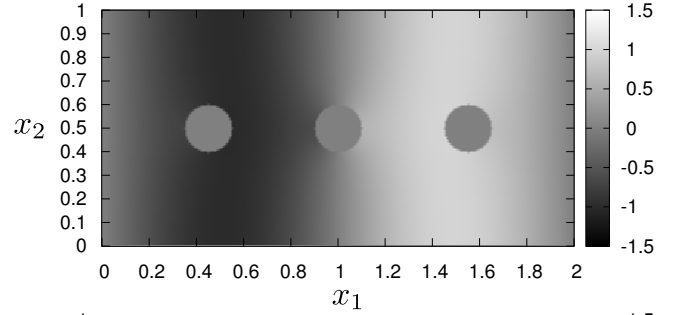


Fig. 6 Eigenvectors for the initial configuration for (top:) $\sqrt{\lambda_2} = 3.125$, (bottom:) $\sqrt{\lambda_3} = 3.218$.

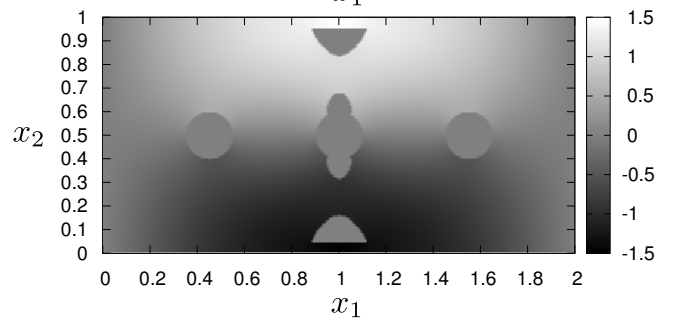
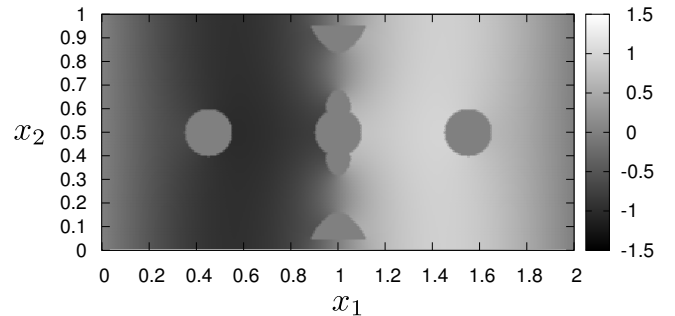


Fig. 7 Eigenvectors for the optimal configuration for (top:) $\sqrt{\lambda_2} = 2.859$, (bottom:) $\sqrt{\lambda_3} = 3.302$.

なお、ここでは、境界要素解析は $\partial\Omega$ を 960, $\partial\Omega_{\text{void}}$ を 3622 の境界要素に分割し、ID の tolerance を 10^{-8} として行った。

6. 結

本研究では、境界要素法に由来する非線形固有値のトポロ

ジー感度の導出を行った。得られた結果が、高速直接多重極法に基づくSS法による結果と一致することをいくつかの数値実験において確認した。また、導出したトポロジー感度に基づく簡便な最適設計を行い、固有振動数を所望の方向に移動させる空孔配置の設計を行い、その有効性を確認した。

今後の課題としては、

- 重複固有値に対する検討
- トポロジー最適化のため direct FMM 及び SS 法の各種パラメータの決定を自動化
- トポロジー最適化 software への install
- 周期境界値問題への応用
- 局所共振フォノンニック材料 (LRSM) への応用

等が挙げられる。

謝辞

2名の校閲委員の方には非常に丁寧に有益なご意見を頂きました。この場を借りてお礼申し上げます。また、本研究の一部は、JSPS 科研費 (26870269) の助成を受けて行ったものです。

参考文献

- (1) E. Yablonovitch. Photonic band-gap structures. *Journal of the Optical Society of America B*, Vol. 10, No. 2, pp. 283–295, 1993.
- (2) MS. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review Letters*, Vol. 71, No. 13, p. 2022, 1993.
- (3) JD. Joannopoulos, RB. Meade, and JN. Winn. *Photonic crystals*. Princeton University Press, Princeton, 1995.
- (4) L. Brillouin. *Wave propagation in periodic structures*. Dover Pubns, 2003.
- (5) RL Fox and MP Kapoor. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA journal*, Vol. 6, No. 12, pp. 2426–2429, 1968.
- (6) ZD. Ma, N. Kikuchi, and HC. Cheng. Topological design for vibrating structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 121, No. 1, pp. 259–280, 1995.
- (7) DC. Dobson and SJ. Cox. Maximizing band gaps in two-dimensional photonic crystals. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 59, No. 6, pp. 2108–2120, 1999.
- (8) M. Burger, B. Hackl, and W. Ring. Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No. 1, pp. 344–362, 2004.
- (9) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and K. Kimura. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals. *JSIAM Letters*, Vol. 1, No. 0, pp. 52–55, 2009.
- (10) H. Gao, T. Matsumoto, T. Takahashi, and T. Yamada. Eigenvalue analysis for 2D acoustic problem by BEM with block SS method. *Transactions of JASCOME*, Vol. 11, p. 59, 2011.
- (11) 野瀬大一郎, 西村直志. 2次元 Helmholtz 方程式の周期境界値問題に現れる固有値問題に対する Sakurai-Sugiura 法と周期多重極法を用いた数値計算. 日本応用数理学会論文誌, Vol. 24, No. 3, pp. 185–201, 2014.
- (12) V. Rokhlin. Rapid solution of intergral equations of classical potential theory. *Journal of Computational Physics*, Vol. 60, pp. 187–207, 1985.
- (13) L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 73, No. 2, pp. 325–348, 1987.
- (14) TP. Pals. *Multipole for scattering computations: Spectral discretization, stabilization, fast solvers*. PhD thesis, University of California Santa Barbara, 2004.
- (15) A. Carpio and M.L. Rapn. Solving inhomogeneous inverse problems by topological derivative methods. *Inverse Problems*, Vol. 24, No. 4, p. 045014, 2008.
- (16) PG. Martinsson and V. Rokhlin. A fast direct solver for boundary integral equations in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, Vol. 205, No. 1, pp. 1–23, 2005.
- (17) M. Bebendorf. *Hierarchical matrices*. Springer, 2008.
- (18) H. Cheng, Z. Gimbutas, PG. Martinsson, and V. Rokhlin. On the compression of low rank matrices. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 26, No. 4, pp. 1389–1404, 2005.